Построение нормального псевдорешения СЛАУ

- Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений (далее – СЛАУ):

$$K\varphi = \tilde{f},$$

где K – матрица размером N×M, φ – вектор размерности M, f – вектор размерности N.

$\tilde{f} = \bar{f} + \eta$, где $\bar{f}$ - вектор точной правой части, η – вектор ошибок.

Вектор φ_{HK} размерностью M называют псевдорешением, если он доставляет минимум следующему функционалу

$$\Psi_{HK}(\varphi) = \left|\tilde{f} - K\varphi\right|^2 = \left(\tilde{f} - K\varphi\right)^T \left(\tilde{f} - K\varphi\right)$$

среди всех векторов евклидова пространства E^M.

Решение, обеспечивающее минимум данному функционалу, является решением следующей СЛАУ

$$K^T K\varphi_{HK} = K^T \tilde{f},$$

которая называется системой нормальных уравнений.

- В отличие от исходной системы $K\varphi = \tilde{f}$ эта система всегда разрешима, т.е. для любой правой части $\tilde{f}$ существует псевдорешение φ_{HK}. Если матрица К имеет ранг, равный М, то

$$\varphi_{HK} = (K^T K)^{-1} K^T f.$$

Сингулярным разложением прямоугольной N×M матрицы К (SVD-разложением) называется представление:

$$K = U\Lambda V^T,$$

где U – ортогональная N×N матрица, V – ортогональная M×M матрица, Λ – матрица размера N×M следующего вида:

$$\Lambda = \left(\begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_M \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\right)$$

Величины $\lambda_j \geq 0, j = \overline{1, M}$, называют сингулярными числами матрицы К и в дальнейшем предполагаем, что они упорядочены по убыванию.

SVD-алгоритм построения нормального превдорешения

- Рассмотрим векторы

$$y = U^T \tilde{f}, x = V^T \varphi$$

размерностью N и M соответственно.

Тогда, учитывая $K = U \Lambda V^T$ систему $K\varphi = \tilde{f}$ можно преобразовать к эквивалентной системе:

$$\lambda_j = y_j, j = \overline{1, M};$$
$$0 = y_j, j = \overline{M+1, N},$$

которая хорошо характеризует информативность правой части: чем меньше сингулярное число λ_j, тем с меньшим весом проекция x_j входит в правую часть. Предельный случай $\lambda_j = 0, p+1 \le j \le M$, говорит о вырожденности К.

Невыполнение условия $\sum_{j=M+1}^{N} |y_j| = 0$ говорит о несовместимости исходной системы.

- С учетом ортогональности матриц U, V и соотношений $K = U\Lambda V^T$ функционал можно записать в виде:

$$\Psi_{HK}(\varphi) = \Psi_{HK}(x) = \sum_{j=1}^{p}\left(y_i - \lambda_j x_j\right)^2 + \sum_{j=p+1}^{M}\left(y_j - 0 \cdot x_j\right)^2 + \sum_{j=M+1}^{N} y_j^2$$

Третье слагаемое обусловлено несовместностью исходной системы, и не зависит от x. Второе слагаемое отражает вырожденность системы, и, следуя определению нормального псевдорешения, проекции x_j, входящее во второе слагаемое, следует принять равным 0. Тогда минимум функционала достигается на векторе x^+ размерности *p* с элементами

$$x_j^+ = \frac{y_j}{\lambda_j}, j = \overline{1, p},$$

а нормальное псевдорешение $\varphi^+ = \sum_{j=1}^{p} x_j^+ \cdot \nu_j$

- Рассмотрим построение псевдорешения с помощью пакета Mathcad.

Функция svds(K). Вычисляет вектор размерности M, состоящий из сингулярных чисел λ_j матрицы K, которые расположены в убывающем порядке.

Функция svd(K). Выполняет SVD-разложение на множители матриц. Первая вложенная матрица представляет собой вектор, состоящий из сингулярных чисел, вторая – матрицу U, третья - матрицу V.

Пример 1.

- Дана матрица

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \\ 6 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Вычислить сингулярные числа и матрицы U и V.

Решение:

$$K := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \\ 6 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} N &:= 5 \\ M &:= 3 \end{aligned}$$

$$\lambda := \mathrm{svds}(K) \qquad \frac{\max(\lambda)}{min(\lambda)} = 90.55 \qquad \lambda = \begin{bmatrix} 22.294 \\ 1.979 \\ 0.246 \end{bmatrix}$$

$$UV := \mathrm{svd}(K) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 22.294 \\ 1.979 \\ 0.246 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0.166 & 0.289 & -0.088 \\ 0.558 & -0.026 & 0.583 \\ 0.602 & -0.528 & -0.599 \\ 0.483 & 0.175 & 0.33 \\ 0.256 & 0.779 & -0.429 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0.393 & 0.571 & 0.721 \\ -0.772 & -0.222 & 0.596 \\ 0.5 & -0.791 & 0.353 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$U := UV_1 \qquad U = \begin{bmatrix} 0.166 & 0.289 & -0.088 \\ 0.558 & -0.026 & 0.583 \\ 0.602 & -0.528 & -0.599 \\ 0.483 & 0.175 & 0.33 \\ 0.256 & 0.779 & -0.429 \end{bmatrix}$$

$$V := UV_2 \qquad V = \begin{bmatrix} 0.393 & 0.571 & 0.721 \\ -0.772 & -0.222 & 0.596 \\ 0.5 & -0.791 & 0.353 \end{bmatrix}$$

Задания:

- Вычислить сингулярные числа и матрицы U и V для матрицы K:

$$1.\ K = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2{,}3 & 4 & 4 \\ -2 & 5{,}1 & 1 \\ 0 & 0{,}8 & 6 \end{pmatrix}$$

$$2.\ K = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Спасибо за внимание