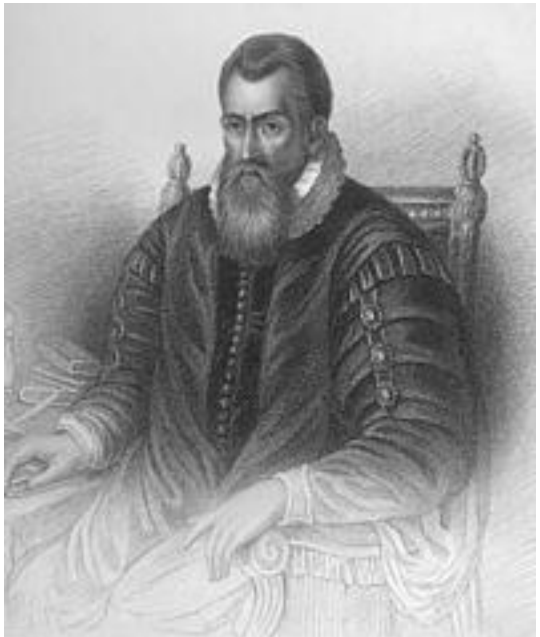
# Логарифмы и их свойства

# ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА



Логарифмы были придуманы для ускорения и упрощения вычислений.
Идея логарифма, т. е. идея выражать числа в виде степени одного и того же основания, принадлежит Михаилу Штифелю. Но во времена Штифеля математика была не столь развита и идея логарифма не нашла своего развития.
Логарифмы были изобретены позже одновременно и независимо друг от друга шотландским учёным Джоном Непером (1550-1617) и швейцарцем Иобстом Бюрги (1552-1632).

Джон Непер

В1614г. была опубликована работа Непера под названием «Описание удивительной таблицы логарифмов»
Слово «логарифм» введено Непером, происходит от греческих слов **logoz** и **ariumoz** - оно означает буквально “**числа отношений**”.

# ПОВТОРЕНИЕ

Показательная функция, показательные уравнения

Устно:

Основание $a^n$ Показатель

$$2^x = 4$$

$$2^x = 1$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 8$$

$$2^x = \frac{1}{2}$$

# ПОВТОРЕНИЕ

Показательная функция, показательные уравнения и неравенства.

Устно:

Основание $a^n$ Показатель

$$2^x = 4$$

$x = 2$

$$2^x = 1$$

$x = 0$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 8$$

$x = -3$

$$2^x = \frac{1}{2}$$

$x = -1$

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Логарифмом по основанию ***a*** от аргумента ***x*** называют степень, в которую нужно возвести ***a***, чтобы получить ***x***.

$$\boldsymbol{\log_a x = b}$$

Где:
***a*** – основание логарифма;
***x*** – аргумент (число или выражение под знаком логарифма);
***b*** – значение логарифма.

Например:
$\log_2 8 = 3$
(логарифм по основанию 2 от числа 8 равен 3, поскольку $2^3 = 8$ )

# ВАЖНЫЕ ФАКТЫ:

*1.*Аргумент и основание логарифма всегда должны быть больше нуля. Это следует из определения степени с рациональным показателем, к которому сводится определение логарифма.

*2.*Основание должно быть отличным от единицы, поскольку единица в любой степени все равно остается единицей.

$$\log_a x = b \Rightarrow x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1.$$

*3.*На число *b* (значение логарифма) никаких ограничений не накладывается.

# Определение логарифма числа

Логарифмом числа ***b*** по основанию ***a*** называется показатель степени, в которую нужно возвести основание ***a***, чтобы получить число ***b***.

Формулу $a^{\log b} = b$ где ***a≠1, a>0, b>0*** называют ***основным логарифмическим тождеством.***

# ОСНОВНОЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ ТОЖДЕСТВО

$$a^{\log_a b} = b$$

Равенство справедливо при **b > 0, a > 0, a ≠ 1**

$$3^{\log_3 5} = 5$$

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{\log_{\frac{1}{7}} 2} = 2$$

# Основные формулы

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a^c = c$$

# Вычислить

$$\log_2 2 = 1$$

$$\log_{12} 12 = 1$$

$$\log_3 3 = 1$$

$$\log_5 5 = 1$$

# Вычислить

$$\log_3 1 = 0$$

$$\log_{13} 1 = 0$$

$$\log_5 1 = 0$$

$$\log_7 1 = 0$$

# Вычислить

$$\log_a a^c = c$$

$$\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$$

$$\log_2 64 = \log_2 2^6 = 6$$

$$\log_3 27 = \log_3 3^3 = 3$$

$$\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4$$

# Вычислить

$$\log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1$$

$$\log_3 \frac{1}{3} = \log_3 3^{-1} = -1$$

$$\log_2 \frac{1}{8} = \log_2 2^{-3} = -3$$

# Выполнить устно

$$3^{\log_3 18}$$

$$5^{\log_5 14}$$

$$7^{\log_7 8}$$

# Выполнить устно

$3^{\log_3 18}$ =18

$5^{\log_5 14}$ =14

$7^{\log_7 8}$ =8

# ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

| Докажите, что: | Доказательство: |
|---|---|
| $log_2 8 = 3$ | $2^3 = 8$ |
| $log_{0,3} 0,09 = 2$ | $0,3^2 = 0,09$ |
| $log_{16} 4 = \frac{1}{2}$ | $16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$ |
| $log_{\frac{1}{3}} 81 = -4$ | $(\frac{1}{3})^{-4} = 3^4 = 81$ |
| $log_{19} 19 = 1$ | $19^1 = 19$ |
| $log_{51} 1 = 0$ | $51^0 = 1$ |

# ВЫЧИСЛИТЕ:
# ПРОВЕРКА:

$$log_2 16 = 4$$

$$log_3 27 = 3$$

$$log_2 2 = 1$$

$$log_3 3 = 1$$

$$log_2 \frac{1}{2} = -1$$

$$log_3 \frac{1}{9} = -2$$

$$log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$$

$$log_3 \sqrt[4]{3} = \frac{1}{4}$$

# Основные свойства логарифмов

При любом $a>0$ $(a \neq 1)$ и любых положительных $x$ и $y$ выполнены равенства:

$$\log_a x*y = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a x/y = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^p = p*\log_a x$$

для любого действительного $p$.

# Свойства логарифмов

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_{24} 3 + \log_{24} 8 =$$

$$= \log_{24} 24 = 1$$

# Вычислить

$$\log_{12} 4 + \log_{12} 3$$

$$\log_{15} 5 + \log_{15} 3$$

$$\log_{6} 9 + \log_{6} 4$$

$$\log_{8} 16 + \log_{8} 4$$

# Вычислить

$$\log_{12} 4 + \log_{12} 3 = \log_{12} 12 = 1$$

$$\log_{15} 5 + \log_{15} 3 = \log_{15} 15 = 1$$

$$\log_{6} 9 + \log_{6} 4 = \log_{6} 36 = 2$$

$$\log_{8} 16 + \log_{8} 4 = \log_{8} 64 = 2$$

# Свойства логарифмов

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_6 24 - \log_6 4 =$$

$$= \log_6 \frac{24}{4} = \log_6 6 = 1$$

# Вычислить

$$\log_{12} 48 - \log_{12} 4$$

$$\log_5 75 - \log_5 3$$

$$\log_2 12 - \log_2 3$$

$$\log_{10} 50 - \log_{10} 5$$

# Вычислить

$$\log_{12} 48 - \log_{12} 4 = \log_{12} \frac{48}{4} = \log_{12} 12 = 1$$

$$\log_5 75 - \log_5 3 = \log_5 \frac{75}{3} = \log_5 25 = 2$$

$$\log_2 12 - \log_2 3 = \log_2 \frac{12}{3} = \log_2 4 = 2$$

$$\log_{10} 50 - \log_{10} 5 = \log_{10} \frac{50}{5} = \log_{10} 10 = 1$$

# Свойства логарифмов

$$\log_{a^n} b = \frac{1}{n}\log_a b$$

$$\log_a b^n = n\log_a b$$

# Свойства логарифмов

$$\log_{a^n} b^n = \log_a b$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

# Примеры

$$\log_{36} 6 = \log_{6^2} 6^1 = \frac{1}{2}$$

$$\log_5 125 = \log_5 5^3 = 3$$

$$\log_{16} 64 = \log_{2^4} 2^6 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

# ВЫЧИСЛИТЕ:

# ПРОВЕРКА: $\log_a b^n = n\log_a b$

$3^{\log_3 18} = 18$ $\quad$ $0,3^{2\log_{0,3} 6} = 36$

$10^{\log_{10} 2} = 2$ $\quad$ $8^{\log_2 5} = 125$

$3^{5\log_3 2} = 32$ $\quad$ $16^{\log_4 7} = 49$

# Проблема

Обратите внимание - действия с логарифмами *возможны только при одинаковых основаниях*! А если основания разные!?

$$\log_5 16 \cdot \log_2 25$$

# Переход к другому основанию

Теорема

- Пусть дан логарифм $\log_a b$. Тогда для любого числа c такого, что c > 0 и c ≠ 1, верно равенство:

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}$$

- В частности, если положить c = b, получим:

$$\boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_c a}}$$

# Логарифмические уравнения

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Логарифмом по основанию ***а*** от аргумента ***х*** называют степень, в которую нужно возвести ***а***, чтобы получить ***х***.

$$\log_a x = b$$

Где:
***а*** – основание логарифма;
***х*** – аргумент (число или выражение под знаком логарифма);
***b*** – значение логарифма.

Например:
$\log_2 8 = 3$
(логарифм по основанию 2 от числа 8 равен 3, поскольку $2^3 = 8$ )

$$a^{\log_a b} = b$$

$a > 0$

$a \neq 1$

$b > 0$

$c > 0$

$d > 0$

$d \neq 1$

## Свойства логарифмов:

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$
3. $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$
4. $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$
5. $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$
6. $\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \cdot \log_a b$
7. $\log_{a^k} b^n = \frac{n}{k} \cdot \log_a b$
8. $\log_{a^n} b^n = \log_a b$

10. $\log_a b = \frac{\log_d b}{\log_d a} = \frac{1}{\log_b a}$
11. $\log_a b \cdot \log_b a = 1$
12. $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

# Примеры с логарифмами

- Найдите значение выражения:
- № 1. $(log_2 16) \cdot (log_6 36)$ ;
- № 2. $7 \cdot 5^{log_5 4}$ ;
- № 3. $36^{log_6 5}$ ;
- № 4. $log_4 8$ ;
- № 5. $log_5 0,2 + log_{0,5} 4$ ;
- № 6. $log_{0,3} 10 - log_{0,3} 3$ ;
- № 7. $\frac{log_3 25}{log_3 5}$ ;
- № 8. $\frac{log_7 13}{log_{49} 13}$ ;
- № 9. $log_5 9 \cdot log_3 25$ ;

# *Примеры с логарифмами

* Найдите значение выражения:
* № 1. $(log_2 16) \cdot (log_6 36)$ ;
* № 2. $7 \cdot 5^{log_5 4}$ ;
* № 3. $36^{log_6 5}$ ;
* № 4. $log_4 8$ ;
* № 5. $log_5 0,2 + log_{0,5} 4$ ;
* № 6. $log_{0,3} 10 - log_{0,3} 3$ ;
* № 7. $\frac{log_3 25}{log_3 5}$ ;
* № 8. $\frac{log_7 13}{log_{49} 13}$ ;
* № 9. $log_5 9 \cdot log_3 25$ ;

•

# *Примеры с логарифмами

*Найдите значение выражения:

*№ 1. $(\log_2 16)\cdot(\log_6 36)$ ;

*№ 2. $7\cdot 5^{\log_5 4}$ ;

*№ 3. $36^{\log_6 5}$ ;

*№ 4. $\log_4 8$ ;

*№ 5. $\log_5 0,2+\log_{0,5} 4$ ;

*№ 6. $\log_{0,3} 10-\log_{0,3} 3$ ;

*№ 7. $\frac{\log_3 25}{\log_3 5}$ ;

*№ 8. $\frac{\log_7 13}{\log_{49} 13}$ ;

*№ 9. $\log_5 9\cdot\log_3 25$ ;

***Логарифмическим уравнением*** *называют уравнение, содержащее переменную под знаком логарифма*

*Например:* $\log_2(x+6)=3$ $\log_3 x=1-x$

***Решить*** *логарифмическое уравнение- это значит найти* ***все*** *его корни или доказать , что* ***их нет.***

***Надо помнить!!!!***

**Существуют логарифмы ТОЛЬКО положительных чисел**

ПРОВЕРКА *или*

ОДЗ(область допустимых значений)

Способы решения логарифмических уравнений

## *На основании определения логарифма*

- *<u>Логарифмом</u> положительного числа b по положительному и отличному от 1 основанию a называют **показатель степени**, в которую нужно **возвести число a, чтобы получить число b.***

**Решить уравнение**

$$\log_a x = b,\ a > 0;\ a = 1.$$

ОДЗ. **X>0**

имеет единственное решение

$$x = a^b$$

# Решить уравнение

$\log_3(2x+1)=2$

*ОДЗ* (*ЗНАЮ!!!* *что существуют логарифмы только положительных чисел*)

$2x+1>0$

$2x+1=3^2$

$2x=9-1$

$2x=8$

$x=4$

Ответ : $x=4$

Или ПРОВЕРКА $\log_3(2\cdot 4+1)= \log_3 9=2$

# Простейшее логарифмическое уравнение

$$\log_a x = b \Rightarrow x = a^b,\ x > 0$$

Например: $\log_3 x = 2$ $\qquad (x > 0)^*$

$$x = 3^2$$

$$x = 9;$$

$$\mathit{Ответ}: 9$$

# Решить уравнения

$$а)\ \log_2(x+1)=3$$

$$в)\ \lg(x+3)=2\lg 2-\lg x$$

$$б)\ \log_2(x+1)+\log_2(x+3)=3$$

$$г)\ \log_7 36-\log_7(3x-12)=\log_7 4$$

## №1. Решить уравнения

$$a)\log_2(x+1)=3$$

$$x+1>0$$

$$x>-1^{*}$$

$$\log_2(x+1)=\log_2 2^3$$

$$x+1=8$$

$$x=7$$

$$Ответ: 7$$

$$б)\, \log_2(x+1)+\log_2(x+3)=3$$

$$\begin{cases} x+1>0 \\ x+3>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x>-3 \end{cases} \Rightarrow x>-1\,*$$

$$\log_2((x+1)(x+3))=\log_2 2^3$$

$$x^2+4x+3=8$$

$$x^2+4x-5=0$$

$$x_1=1$$

$$x_2=-5-\ \textit{исключено}\,*$$

$$\textit{Ответ}:1$$

# Решение уравнения под буквой в

$$в)\ \lg(x+3)=2\lg 2-\lg x$$

$$\begin{cases} x+3>0 \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-3 \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow x>0\,*$$

Согласно свойству:

$$p\log_a b=\log_a b^p$$

$$\lg(x+3)+\lg x=\lg 2^2$$

$$\lg(x(x+3))=\lg 4$$

$$x^2+3x=4$$

$$x^2+3x-4=0$$

$$x_1=1;$$

$$x_2=-4;\quad -исключено\,*$$

$$Ответ:1$$

Назад

# Решение уравнения под буквой г

$$г)\ \log_7 36 - \log_7(3x-12) = \log_7 4$$

$$\log_7(3x-12) = \log_7 36 - \log_7 4$$

$$\log_7(3x-12) = \log_7 \frac{36}{4}$$

$$3x-12=9$$

$$3x=21$$

$$x=7;$$

$$3x-12>0$$

$$3x>12$$

$$x>4\,*$$

$$Ответ: 7$$

Назад

# Примеры с логарифмами

- Найдите значение выражения:
- № 1. $(log_2 16) \cdot (log_6 36)$ ;
- № 2. $7 \cdot 5^{log_5 4}$ ;
- № 3. $36^{log_6 5}$ ;
- № 4. $log_4 8$ ;
- № 5. $log_5 0,2 + log_{0,5} 4$ ;
- № 6. $log_{0,3} 10 - log_{0,3} 3$ ;
- № 7. $\frac{log_3 25}{log_3 5}$ ;
- № 8. $\frac{log_7 13}{log_{49} 13}$ ;
- № 9. $log_5 9 \cdot log_3 25$ ;

•

# *Примеры с логарифмами

*Найдите значение выражения:

*№ 1. $(log_2 16) \cdot (log_6 36)$ ;

*№ 2. $7 \cdot 5^{log_5 4}$ ;

*№ 3. $36^{log_6 5}$ ;

*№ 4. $log_4 8$ ;

*№ 5. $log_5 0,2 + log_{0,5} 4$ ;

*№ 6. $log_{0,3} 10 - log_{0,3} 3$ ;

*№ 7. $\frac{log_3 25}{log_3 5}$ ;

*№ 8. $\frac{log_7 13}{log_{49} 13}$ ;

*№ 9. $log_5 9 \cdot log_3 25$ ;

• # *Примеры с логарифмами

*Найдите значение выражения:

*№ 1. $(log_2 16) \cdot (log_6 36)$ ;

*№ 2. $7 \cdot 5^{log_5 4}$ ;

*№ 3. $36^{log_6 5}$ ;

*№ 4. $log_4 8$ ;

*№ 5. $log_5 0,2 + log_{0,5} 4$ ;

*№ 6. $log_{0,3} 10 - log_{0,3} 3$ ;

*№ 7. $\frac{log_3 25}{log_3 5}$ ;

*№ 8. $\frac{log_7 13}{log_{49} 13}$ ;

*№ 9. $log_5 9 \cdot log_3 25$ ;

## №1

Найдите корень уравнения $\log_2(4-x)=7.$

# №1

$$\log_2(4-x)=7 \Leftrightarrow 4-x=2^7 \Leftrightarrow 4-x=128 \Leftrightarrow x=-124.$$

# №2

Найдите корень уравнения $\log_5(5-x)=\log_5 3.$

# №2

$$\log_5(5-x)=\log_5 3 \Leftrightarrow 5-x=3 \Leftrightarrow x=2.$$

# №3

Найдите корень уравнения $\log_4(x+3)=\log_4(4x-15)$.

# №3

$$\log_4(x+3)=\log_4(4x-15) \Leftrightarrow \begin{cases} x+3=4x-15, \\ 4x-15>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6, \\ 4x>15 \end{cases} \Leftrightarrow x=6.$$

# №4

Найдите корень уравнения $\log_{\frac{1}{7}}(7-x)=-2.$

# №4

$$\log_{\frac{1}{7}}(7-x)=-2 \Leftrightarrow 7-x=\left(\frac{1}{7}\right)^{-2} \Leftrightarrow 7-x=49 \Leftrightarrow x=-42.$$

# №5

Найдите корень уравнения $\log_5(5-x) = 2\log_5 3$.

# №5

$$\log_5(5-x)=2\log_5 3 \Leftrightarrow 5-x=3^2 \Leftrightarrow 5-x=9 \Leftrightarrow x=-4.$$

# №6

Решите уравнение $\log_5(7-x)=\log_5(3-x)+1.$

# №6

**Решение.**

Заметим, что $1 = \log_5 5$ и используем формулу $\log_a b + \log_a c = \log_a bc$. Имеем:

$$\log_5(7-x) = \log_5(3-x) + 1 \Leftrightarrow \log_5(7-x) = \log_5(3-x) + \log_5 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-x>0, \\ 7-x=5(3-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x>-3, \\ 7-x=15-5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<3, \\ x=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

Ответ: 2.

# №7

Найдите корень уравнения $\log_2(5x-7)-\log_2 5=\log_2 21$.

# №7

$$\log_2(5x-7)-\log_2 5=\log_2 21 \Leftrightarrow \frac{5x-7}{5}=21 \Leftrightarrow 5x-112=0 \Leftrightarrow x=22{,}4.$$

Найдите корень уравнения $\log_4(x+2)+\log_4 3=\log_4 15.$

$$\log_4(x+2)+\log_4 3=\log_4 15 \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x+2)=15, \\ x+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3, \\ x>-2 \end{cases} \Leftrightarrow x=3.$$

Найдите корень уравнения $\log_8 2^{8x-4} = 4.$

**Решение.**

Используем формулу $\log_{a^m} a^n = \frac{n}{m}$:

$$\log_8 2^{8x-4} = 4 \Leftrightarrow \log_{2^3} 2^{8x-4} = 4 \Leftrightarrow \frac{8x-4}{3} = 4 \Leftrightarrow 8x-4=12 \Leftrightarrow x=2.$$

*Приведем другое решение:*

$$\log_8 2^{8x-4} = 4 \Leftrightarrow 2^{8x-4} = 8^4 \Leftrightarrow 2^{8x-4} = 2^{12} \Leftrightarrow 8x-4=12 \Leftrightarrow x=2.$$

Ответ: 2.

$$7 \cdot 5^{\log_5 4} = 7 \cdot 4 = 28.$$

$$7^{-2\log_7 2} = 7^{\log_7 2^{-2}} = 7^{\log_7 \frac{1}{4}} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

$$2^{3\log_2 7} = 2^{\log_2 7^3} = 2^{\log_2 343} = 343.$$

$$6 \cdot 7^{\log_7 2} = 6 \cdot 2 = 12.$$

$$5^{2\log_5 6} = 5^{\log_5 6^2} = 5^{\log_5 36} = 36.$$

$$36^{\log_6 5} = \left(6^{\log_6 5}\right)^2 = 25.$$

$$\log_{0,5} 32 = \log_{2^{-1}} 32 = -\log_2 32 = -5.$$

$$\log_{a^n} b = \frac{1}{n}\log_a b$$

$$\log_4 8 = \log_{2^2} 2^3 = \frac{3}{2}\log_2 2 = 1,5.$$

$$\log_5 60 - \log_5 12 = \log_5 \frac{60}{12} = \log_5 5 = 1.$$

$$\log_2 112 - \log_2 7 = \log_2 \frac{112}{7} = \log_2 16 = 4.$$

$$\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b:$$

$$\log_4 2 + \log_{0,25} 8 = \log_{2^2} 2 + \log_{2^{-2}} 2^3 = \frac{1}{2} \log_2 2 + \frac{3}{-2} \log_2 2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1.$$

$$\log_3 1,8 + \log_3 5 = \log_3 (1,8 \cdot 5) = \log_3 9 = 2.$$

$$\log_{0,3} 10 - \log_{0,3} 3 = \log_{0,3} \frac{10}{3} = -\log_{0,3} \frac{3}{10} = -\log_{0,3} 0,3 = -1.$$

$$\log_{\sqrt[8]{4}} 4 = \log_{4^{\frac{1}{8}}} 4 = 8\log_4 4 = 8.$$

$$\log_{\sqrt[3]{5}} 5 = 3\log_5 5 = 3.$$

$$5^{3+\log_5 2} = 5^3 \cdot 5^{\log_5 2} = 125 \cdot 2 = 250.$$

$$6^{2+\log_6 8} = 6^2 \cdot 6^{\log_6 8} = 36 \cdot 8 = 288.$$

$$8^{2\log_8 3} = (8^{\log_8 3})^2 = 3^2 = 9.$$

$$6^{2\log_6 12} = (6^{\log_6 12})^2 = 12^2 = 144.$$