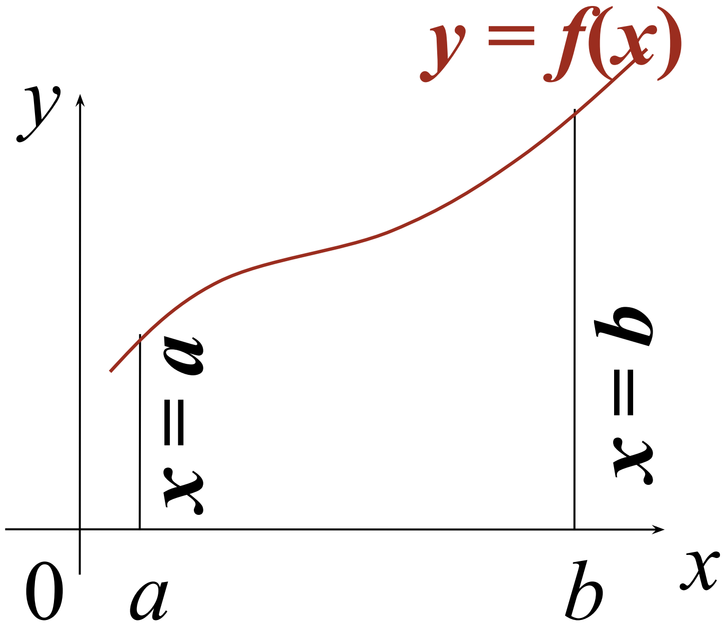
ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Ащеулова Алена Сергеевна,

кандидат физико-математических наук

ПОНЯТИЕ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА



Криволинейная трапеция- это фигура, ограниченная графиком непрерывной неотрицательной функции f(x), x∈ [a;b], параллельными прямыми x=a и x=b и отрезком оси OX.

ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

верхний предел интегрирования

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

подынтегральная функция

переменная интегрирования

подынтегральное выражение

нижний предел интегрирования

СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

1° $$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

2° $$\int_a^b k\cdot f(x)\,dx = k\cdot\int_a^b f(x)\,dx, \quad k = const$$

3° $$\int_a^b \big(f(x)\pm g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

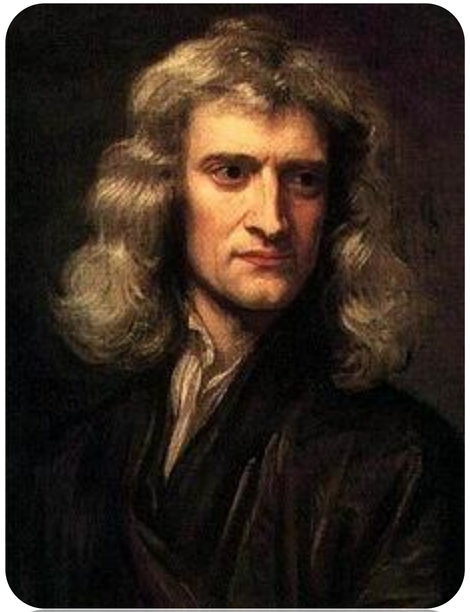
СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

4° $$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

5° Если функция f(x) интегрируема на [a;b] и a<c<b, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНИЦА



Исаак Ньютон
(25.12.1642 -20.03.1727)

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

знак двойной подстановки

Готфрид Вильгельм Лейбниц
(21.06 (01.07) 1646 – 14.11.1716)

ВЫЧИСЛИТЬ ИНТЕГРАЛ

$$1.\ \int_1^2 x^3 dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = 3\frac{3}{4}$$

$$2.\ \int_1^4 (x^3 + 2x)dx = \int_1^4 x^3 dx + \int_1^4 2x dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_1^4 + 2\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_1^4 = \left.\frac{x^4}{4}\right|_1^4 + x^2\Big|_1^4 =$$

$$= \left(\frac{4^4}{4} - \frac{1^4}{4}\right) + (4^2 - 1^2) = \left(\frac{256}{4} - \frac{1}{4}\right) + (16-1) = \frac{255}{4} + 15 = 78{,}75$$

$$3.\ \int_1^8 \frac{x-\sqrt[3]{x}}{x}dx = \int_1^8 dx - \int_1^8 x^{-\frac{2}{3}}dx = x\Big|_1^8 - 3\sqrt[3]{x}\Big|_1^8 =$$

$$= (8-1) - 3(\sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{1}) = 7 - 3(2-1) = 4$$

$$4.\ \int_0^{\pi} \sin x\, dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = -(\cos\pi - \cos 0) = -(-1-1) = 2$$

МЕТОД ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННОЙ

$$1.\ \int_{-1}^{2}\frac{2x\,dx}{\left(2x^2+1\right)^2}=\left|\begin{array}{l} t=2x^2+1 \\ dt=\left(2x^2+1\right)'=4x\,dx \\ dt=\dfrac{dx}{4} \\ x=-1\quad \alpha=2\cdot(-1)^2+1=3 \\ x=2\quad \beta=2\cdot 2^2+1=9 \end{array}\right|=\int_{3}^{9}\frac{2dt}{4t^2}=-\frac{1}{2t}\Big|_3^9=\frac{1}{2t}\Big|_3^9=$$

$$=\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{2\cdot 9}=\frac{1}{6}-\frac{1}{18}=\frac{1}{9}$$

Новые пределы интегрирования

$$2.\int_1^5 x\sqrt{x-1}\,dx = \left|\begin{array}{l} t=x-1 \quad \Rightarrow \quad x=t+1 \\ dt=(x-1)'=dx \\ x=1 \quad \alpha=1-1=0 \\ x=5 \quad \beta=5-1=4 \end{array}\right| = \int_0^4 (t+1)\sqrt{t}\,dt = \int_0^4 t^{\frac{3}{2}}\,dt + \int_0^4 t^{\frac{1}{2}}\,dt$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{t^5}\Big|_0^4 + \frac{2}{3}\sqrt{t^3}\Big|_0^4 = \frac{2}{5}t^2\sqrt{t}\Big|_0^4 + \frac{2}{3}t\sqrt{t}\Big|_0^4 = \frac{2}{5}\cdot 16\cdot 2 + \frac{2}{3}\cdot 4\cdot 2 = \frac{272}{15}$$

МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ЧАСТЯМ

$$1.\ \int_1^e \ln x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x, du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx, v = x \end{matrix} \right| = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e x\frac{dx}{x} = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e dx$$

$$= e\ln e - \ln 1 - x\Big|_1^e = e - e + 1 = 1$$

$$2.\ \int_1^e x\ln x\,dx = \left|\begin{matrix} u=\ln x & dv = x\,dx \\ du=\dfrac{dx}{x} & v=\dfrac{x^2}{2}\end{matrix}\right| = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e \frac{x^2}{x}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{x^2}{4}\Big|_1^e = \left(\frac{e^2}{2}\ln e - \frac{1}{2}\ln 1\right) - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}\right) =$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1+e^2}{4}$$