Математика

***Тема урока:***

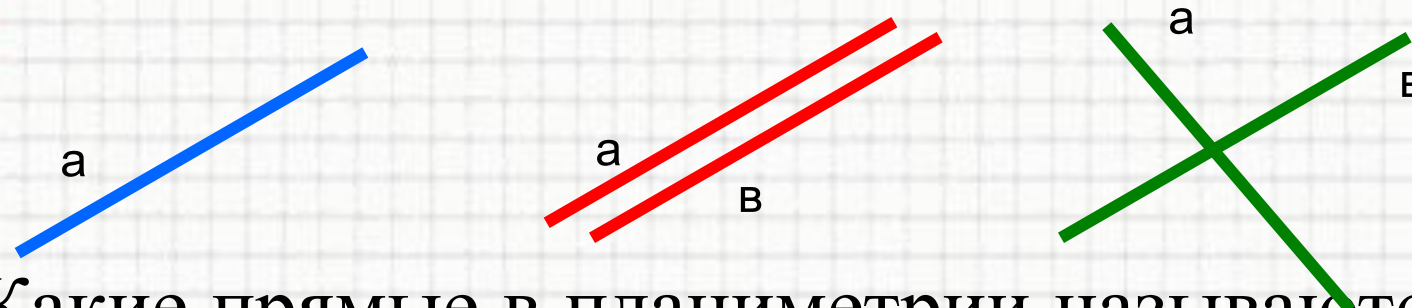
## ***«Перпендикулярность прямых и плоскостей»***

# Устные вопросы

- Что изучает раздел «Стереометрия»?
- Какие неопределяемые понятия стереометрии?
- Сформулируйте аксиому А1.
- Сформулируйте аксиому А2.
- Сформулируйте аксиому А3.
- Сформулируйте первое следствие из аксиом.
- Сформулируйте второе следствие из аксиом.
- Сформулируйте определение параллельных прямых в пространстве.
- Сформулируйте определение скрещивающихся прямых.
- Сформулируйте признак параллельности прямых.
- Сформулируйте лемму о параллельных прямых.
- Сформулируйте теорему о трех параллельных прямых.

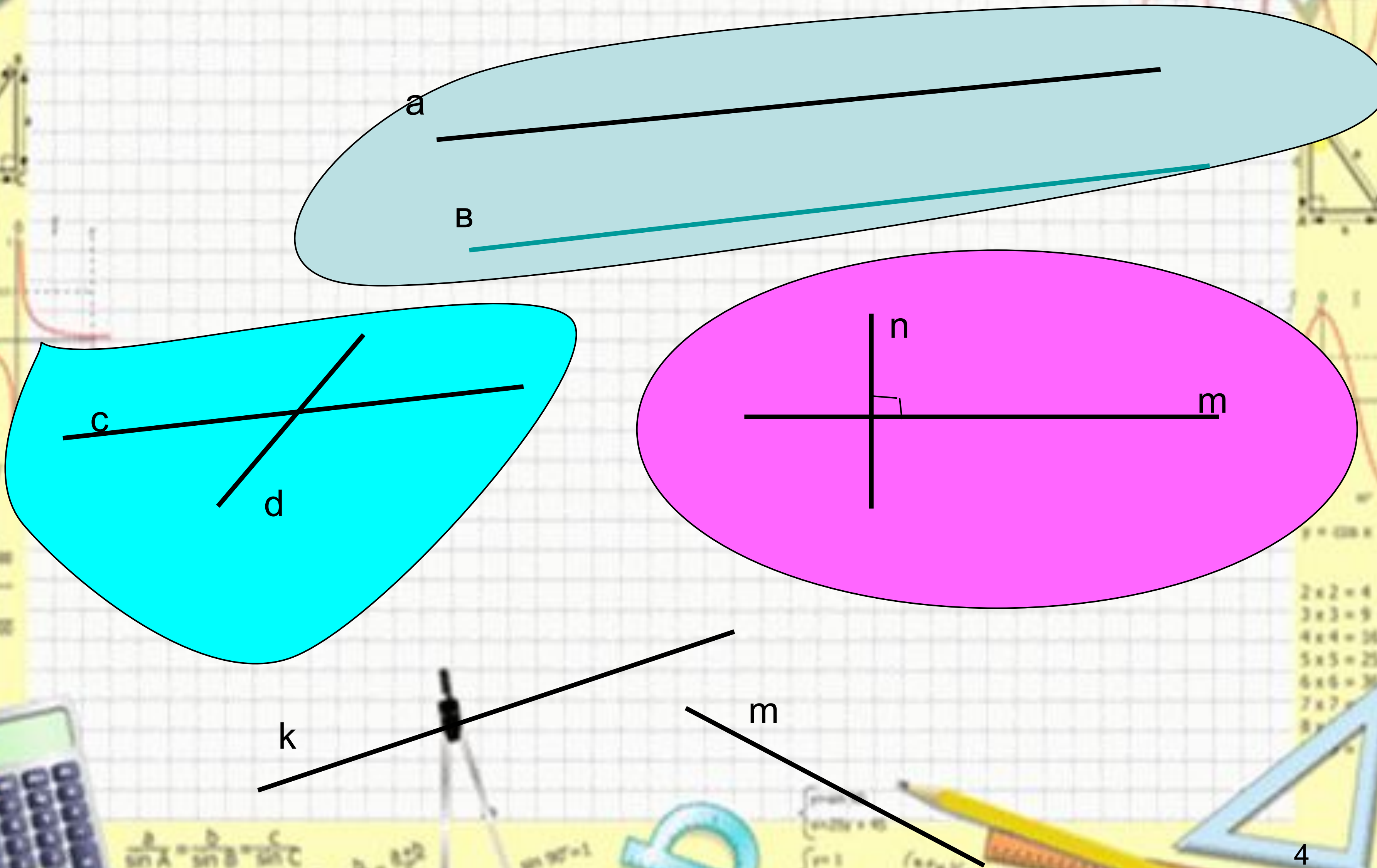
# ВСПОМНИМ ПЛАНИМЕТРИЮ

- Каково может быть взаимное расположение двух прямых на плоскости?




- Какие прямые в планиметрии называются перпендикулярными?

***Взаимное расположение двух прямых в пространстве***

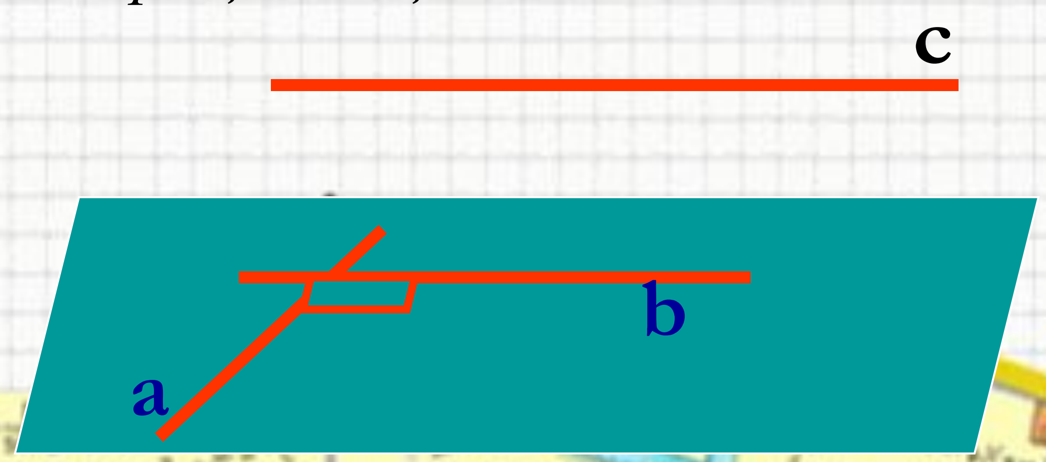


# Перпендикулярные прямые в пространстве

***Две прямые в пространстве называются перпендикулярными (*взаимно перпендикулярными*), если угол между ними равен 90°.***

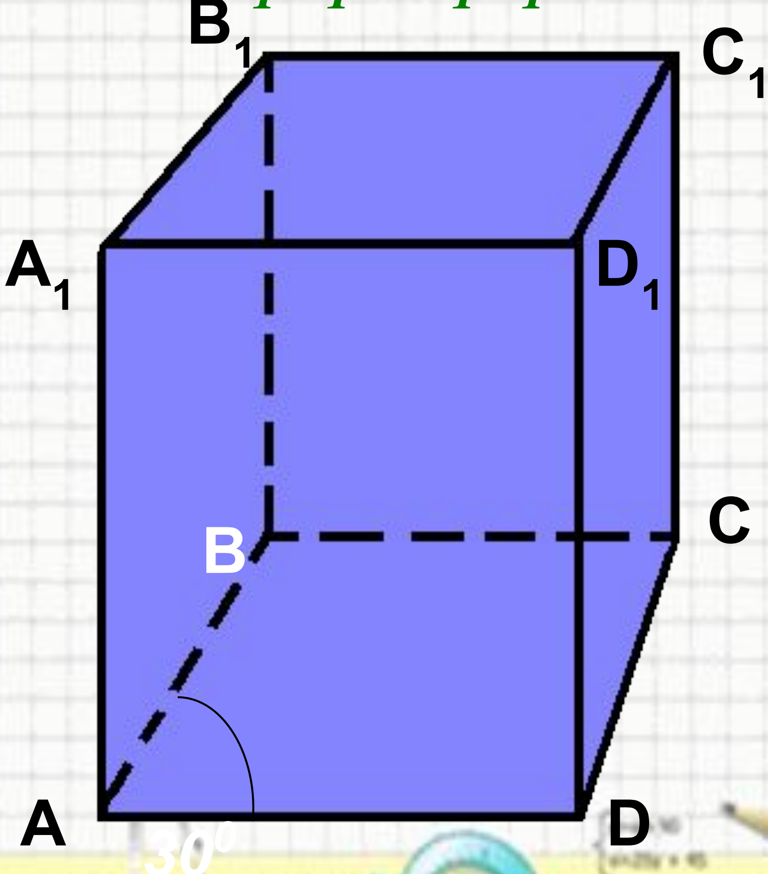
*Обозначается* $a \perp b$

*Перпендикулярные прямые могут пересекаться и могут быть скрещивающимися.*

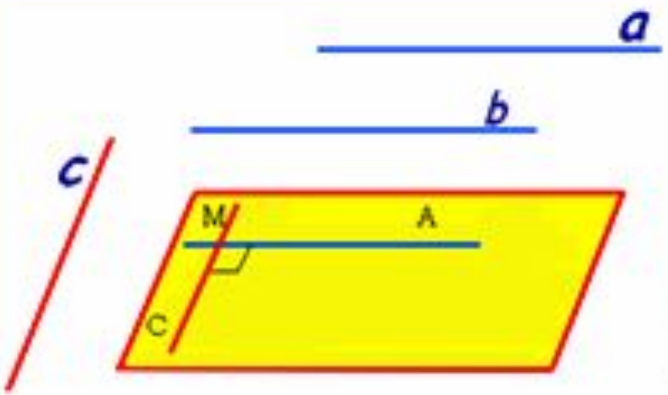


Математика

- *Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед, угол BAD равен $30^o$. Найдите углы между прямыми AB и $A_1D_1$; $A_1B_1$ и AD; AB и $B_1C_1$.*



# ЛЕММА О ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ДВУХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ К ТРЕТЬЕЙ ПРЯМОЙ




**Доказательство:**

Пусть $a \parallel b$ и $a \perp c$.

Докажем, что $b \perp c$.

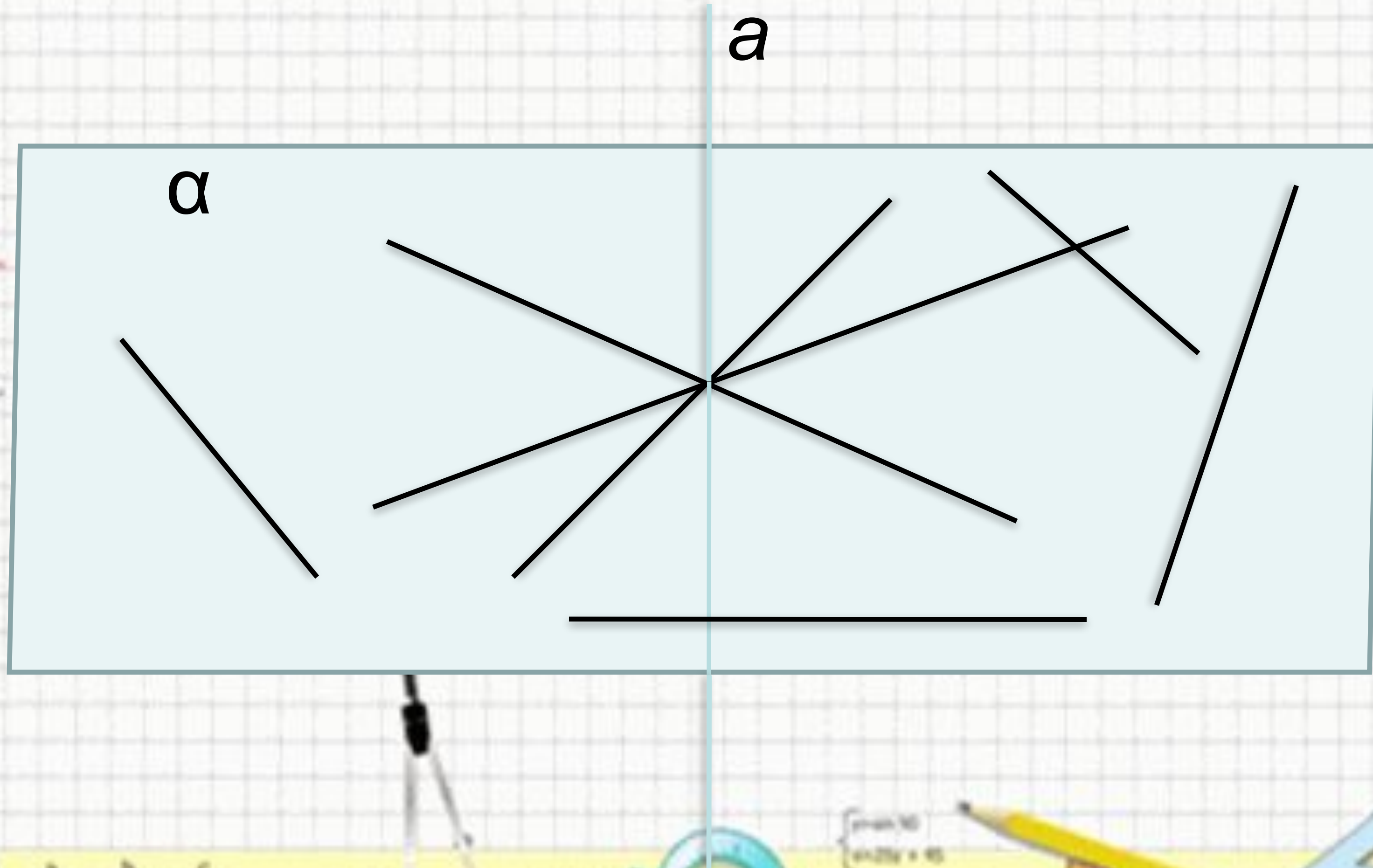
*Доказательство:*

1. $MA \parallel a$ и $MC \parallel c$. Т.к. $a \perp c$, *то угол* $AMC = 90°$

2. $b \parallel a$ *(по условию)*, $a \parallel MA$ (по построению), => $b \parallel MA$.
$b \parallel MA$ и $c \parallel MC$, *угол* $AMC = 90°$ => $(b,\hat{}c) = 90°$, т. е. $b \perp c$

***Определение:***

***Прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости.***

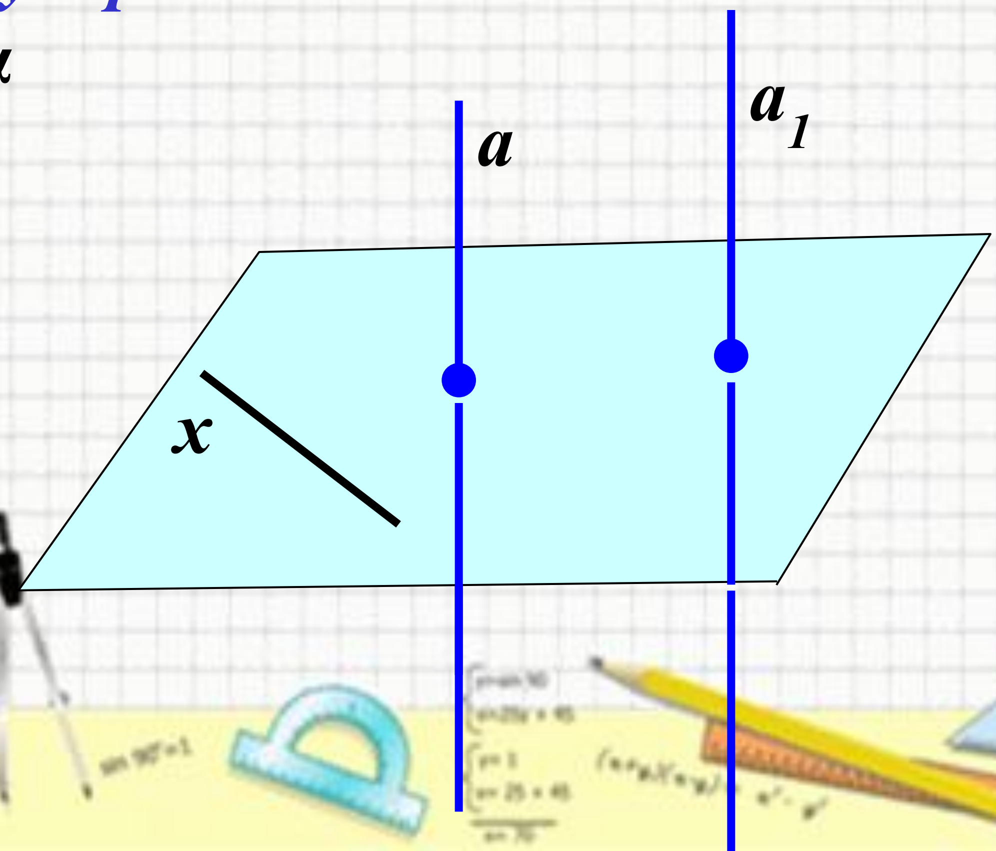


Математика

**Теорема:** ***Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости.***

**Дано:** ***прямая а параллельна прямой $a_1$ и перпендикулярна плоскости $\alpha$.***

**Доказать:** $a_1 \perp \alpha$



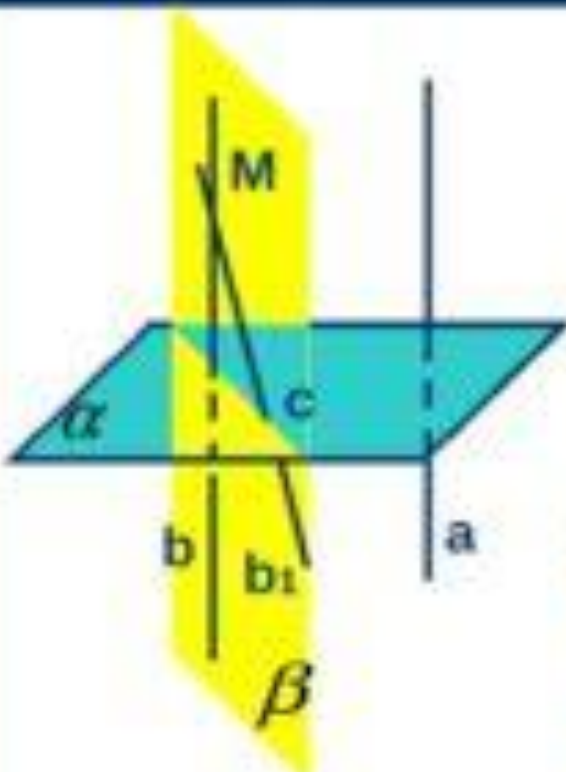
Математика

# Доказательство:

- Проведем прямую $x$ в плоскости $\alpha$. Так как $a \perp \alpha$, то $a \perp x$. По лемме о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей $a \perp x$. Т.о., прямая $a1$ перпендику1лярна к любой прямой, лежащей в плоскости $\alpha$, т.е. $a \perp \alpha$.

1

**Теорема:** Если две прямые перпендикулярны к плоскости, то они параллельны.




<u>Дано</u>: $a \perp \alpha$ $b \perp \alpha$

<u>Доказать:</u> $a \parallel b$

<u>Доказательство:</u>

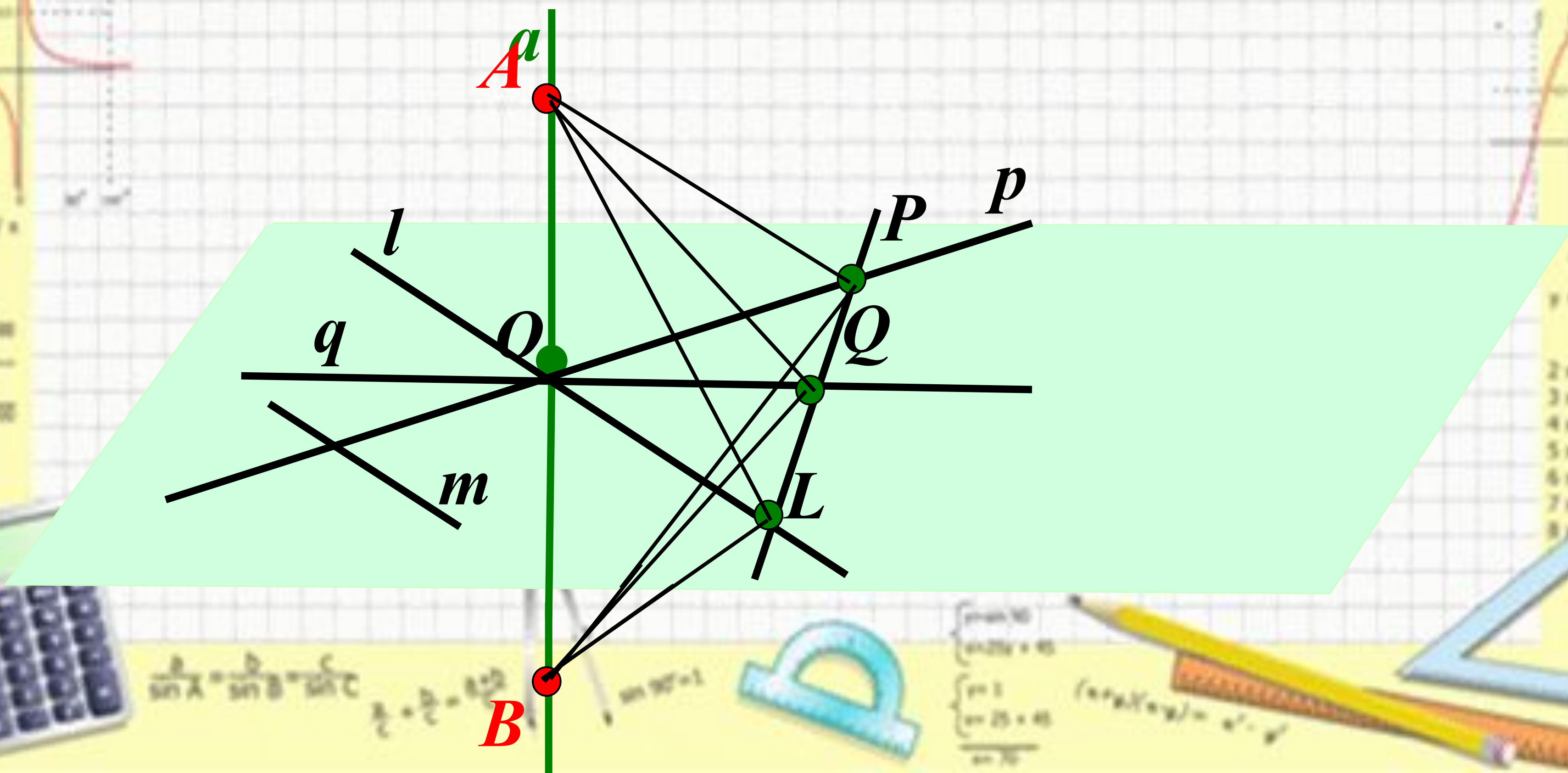
Через точку М прямой b проведем $b1 \parallel a$, => $b_1 \perp \alpha$

Докажем, что b и $b_1$ совпадают

Допустим, что они не совпадают. Тогда в плоскости через точку М проходят две прямые , перпендикулярные к прямой с но это невозможно. **Значит $a \parallel b$.**

# Признак перпендикулярности прямой и плоскости.

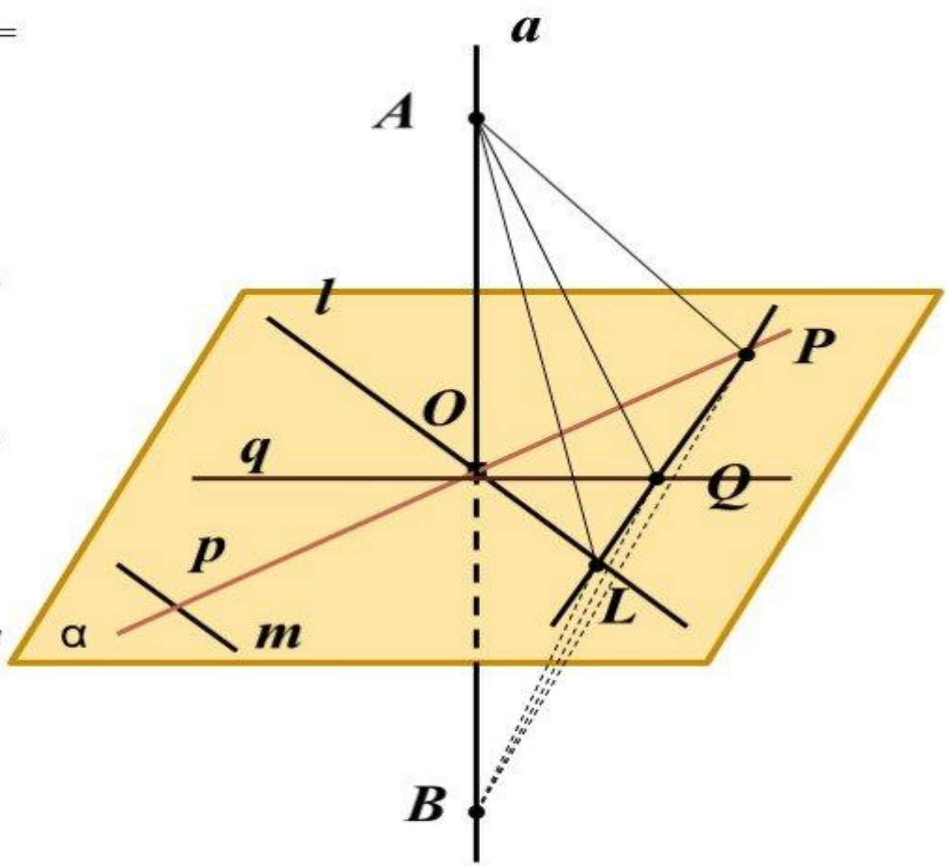
- Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.



# Доказательство:

Так как прямые $p$ и $q$ – серединные перпендикуляры к отрезку $AB$, то $AP = BP$ и $AQ = BQ$. Следовательно, $\Delta APQ = \Delta BPQ$ по трем сторонам. Поэтому *угол* $APQ$ = *углу* $BPQ$.

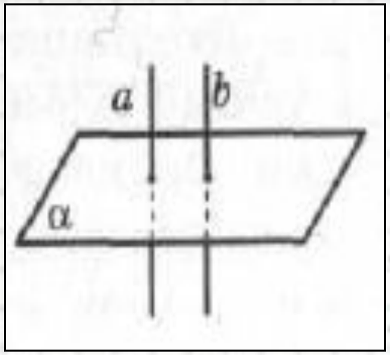
Сравним $\Delta APL$ и $\Delta BPL$. Они равны по двум сторонам и углу между ними ($AP = BP$, $PL$ – общая сторона, *угол* $APL$ = *углу* $BPL$), поэтому $AL = BL$. Но это означает, что треугольники $ABL$ равнобедренный и его медиана $LO$ является высотой, т. е. $l$ перпендикулярна к $a$. Так как $l \parallel m$ и $l$ *перпендикулярна* $a$, то $m$ *перпендикулярна* $a$ (по лемме о перпендикулярности двух параллельных прямых к третей). Итак, прямая $a$ перпендикулярна к любой прямой $m$ плоскости $\alpha$, т. е. $a$ *перпендикулярна* $\alpha$.



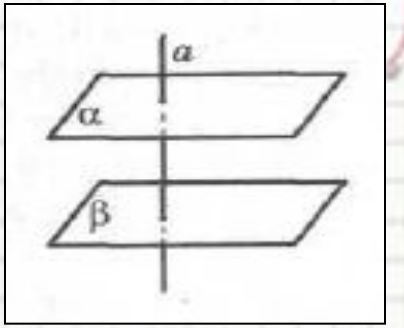
Математика

# Свойства :

**1**. Если плоскость перпендикулярна одной
- из двух параллельных прямых,
- то она перпендикулярна другой
- прямой. (a ⊥ α b и a II b => b ⊥ α)




- **2.** Если две прямые перпендикулярны
- одной и той же плоскости,
- то они параллельны. (a ⊥ α и b ⊥ α => a II b)

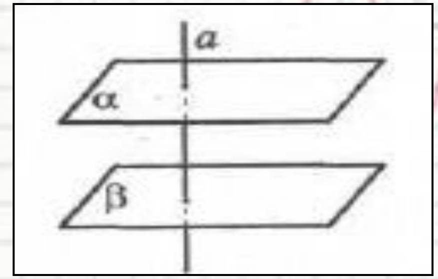



- **3.** Если прямая перпендикулярна
- одной из двух параллельных
- плоскостей, то она перпендикулярна
- и другой плоскости. (α II β и a ⊥ α => a ⊥ β)

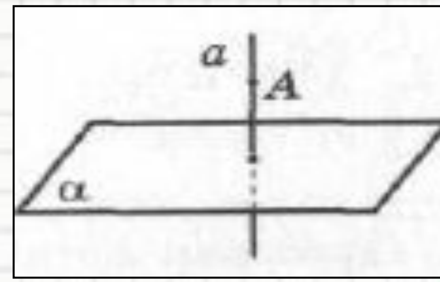
Математика

# Свойства :

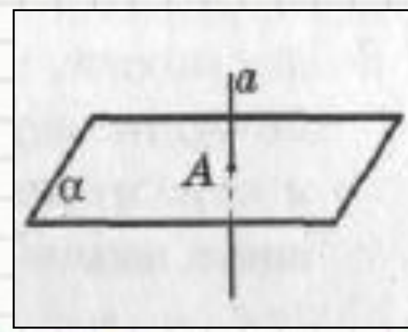
- **4**. Если две различные плоскости
- перпендикулярны одной и той же прямой,
- то эти плоскости параллельны.
- $(a \perp \alpha$ и $a \perp \beta \Rightarrow a \parallel \beta)$



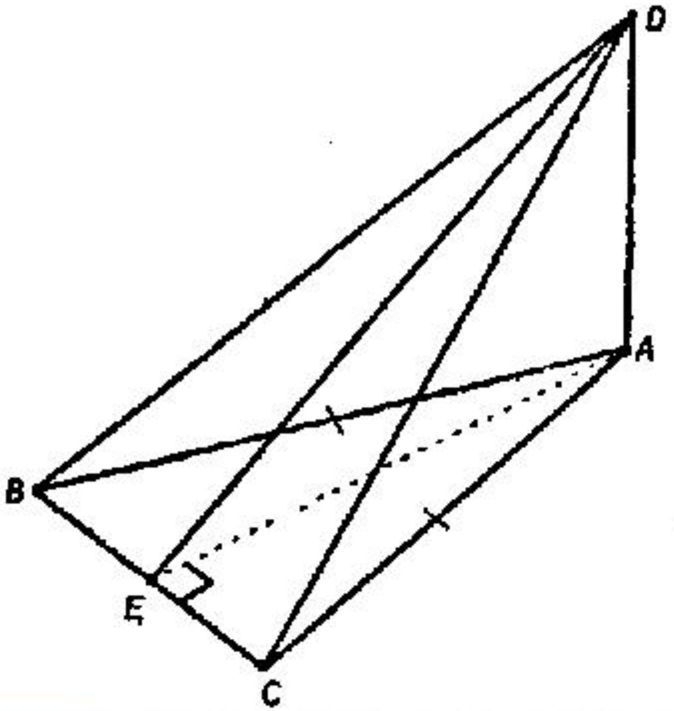

- **5.** Через любую точку пространства можно
- провести прямую, перпендикулярную
- данной плоскости, и притом только одну.




- **6.** Через любую точку прямой можно
- провести плоскость, перпендикулярную ей
- и притом только одну.



**149** Отрезок $AD$ перпендикулярен к плоскости равнобедренного треугольника $ABC$. Известно, что $AB = AC = 5$ см, $BC = 6$ см, $AD = 12$ см. Найдите расстояния от концов отрезка $AD$ до прямой $BC$.




Дано: $\Delta ABC$ – равнобедренный;

$AD \perp (ABC)$;

$AB = AC = 5$ см;

$BC = 6$ см; $AD = 12$ см.

***Решение***:

Проведем $AE \perp BC$;

в равнобедренном $\Delta ABC$

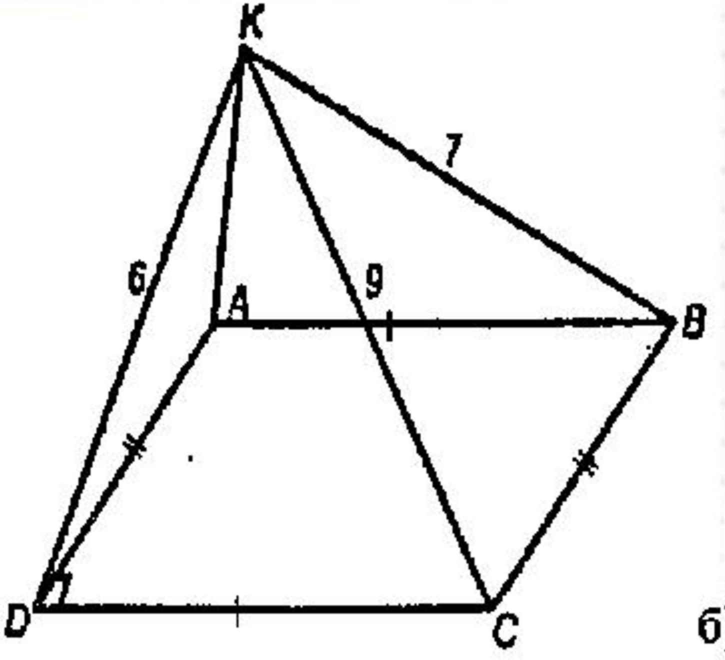
$AE$ – высота и ме диана, $BE = EC = 3$см.

Из $\Delta CEA$ $AE = \sqrt{AC^2 - EC^2}$,

$AE = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ (см).

**150** Через вершину $A$ прямоугольника $ABCD$ проведена прямая $AK$, перпендикулярная к плоскости прямоугольника. Известно, что $KD = 6$ см, $KB = 7$ см, $KC = 9$ см. Найдите: а) расстояние от точки $K$ до плоскости прямоугольника $ABCD$; б) расстояние между прямыми $AK$ и $CD$.

Дано: $ABCD$; $KD = 6$ см; $KB = 7$ см; $KC = 9$ см.




*Решение*: $\rho(K$, пл. $ABCD) - KA$,

$KA \perp$ пл. $ABCD$ – по условию

$\Delta KDC$ – прямоугольный,

$\angle KDC = 90^\circ$ ($KA \perp DC$, $AD \perp DC$ – по теореме о 3-х перпендикулярах $KD \perp DC$).

$DC = \sqrt{KC^2 - KD^2}$; $DC = \sqrt{81-36} = 3\sqrt{5}$ см.

$\angle KAB = 90^\circ$.

$KA = \sqrt{KB^2 - AB^2}$; $AB = DC$;

$KA = \sqrt{49-45} = \sqrt{4} = 2$ см.

б) Плоскость $KAB \parallel DC$, т.к. $DC \parallel AB$.

Расстояние между **двумя** скрещивающимися прямыми $\rho(AK, CD) = DA$, ведь $DA \perp$ пл. $KAB$

Из $\Delta DAK$ $DA = \sqrt{DK^2 - KA^2}$; $DA = \sqrt{36-4} = 4\sqrt{2}$ см.

# Математика

Спасибо за работу!