

Уравнения Максвелла для электромагнитного поля

- 1. Аналогия между характеристиками электрического и магнитного полей:

| Электрическое поле | Магнитное поле |
|---|---|
| <p>Напряженность эл. поля \vec{E}</p> <p><i>Для точечного заряда</i></p> $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{\epsilon r^2}$ | <p>Индукция магн. поля \vec{B}</p> <p><i>Для прямого провода</i></p> $B = \mu\mu_0 \cdot \frac{I}{2\pi \cdot r}$ |
| <p>Электрическое смещение $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$</p> | <p>Напряженность магн. поля $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu\mu_0}$</p> |

Характеристики \vec{D} и \vec{H} вспомогательные, физ. смысла не имеют, но упрощают матем. описание полей.

Первое уравнение Максвелла

- представляет собой закон полного тока:

$$\oint_l \vec{H} dl = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) dS$$

- Смысл первого уравнения Максвелла состоит в том, что **любой ток проводимости I порождает вихревое магнитное поле, циркуляция которого вдоль произвольного замкнутого контура l равна I . Одновременно, всякое изменение вектора электрического смещения**

- **$\partial \vec{D} / \partial t$ также как и ток проводимости, порождает вихревое магнитное поле**

$$I = \int_S \vec{j} dS$$

$$I_{\text{см}} = \int_S \vec{j}_{\text{см}} dS = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} dS = \int_S \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} dS$$

\vec{H}

Второе уравнение Максвелла

- представляет собой закон электромагнитной индукции.
- Максвелл высказал гипотезу, что всякое переменное магнитное поле \vec{B} возбуждает в окружающем пространстве электрическое поле, которое и является причиной возникновения индукционного тока в проводящем контуре.
- Иначе «изменяющееся во времени магнитное поле порождает вихревое электрическое поле, циркуляция которого вдоль произвольного замкнутого контура l равна $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$ »

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_s \vec{B} \cdot d\vec{S} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

$$\Phi = \int_s \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Третье и четвертое уравнения Максвелла

- ◆ Третье уравнений Максвелла в интегральной форме

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

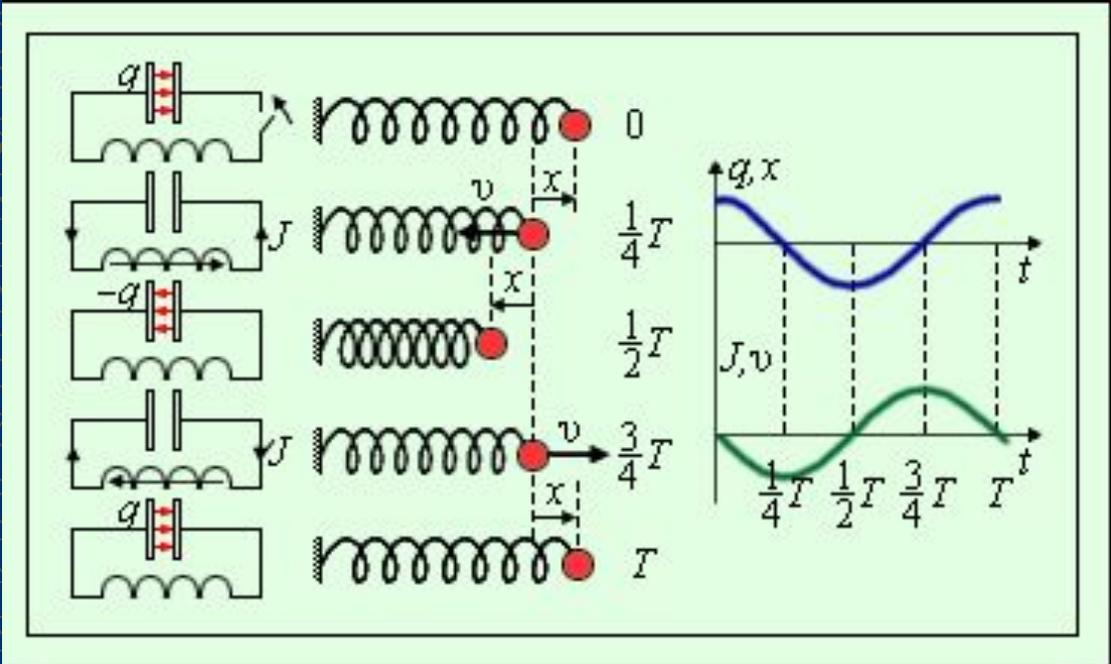
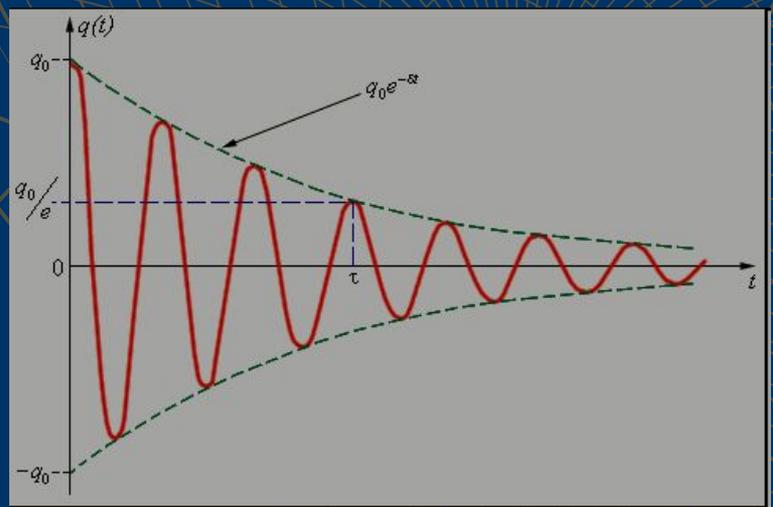
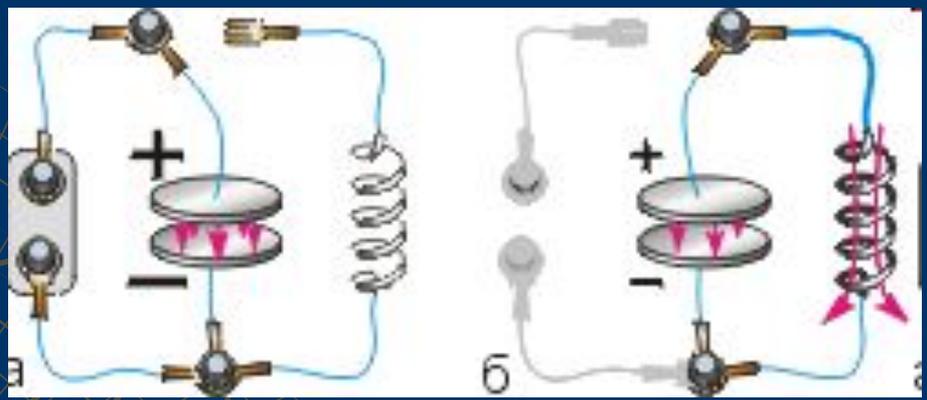
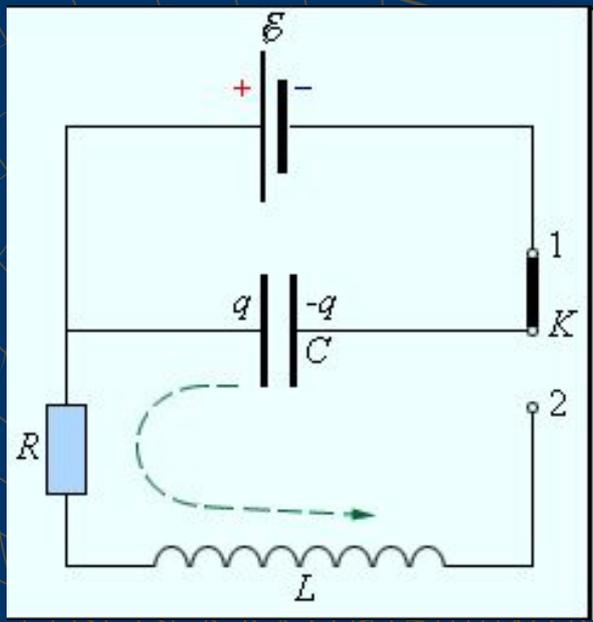
- ◆ выражает тот факт, что в природе отсутствуют магнитные заряды, т.е. все силовые линии вектора являются замкнутыми линиями.
- ◆ Суть четвертого уравнения состоит в том, что поток вектора электрического смещения через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме свободных зарядов ΣQ , расположенных внутри этой поверхности.

- ◆ Полная система уравнений Максвелла в дифференциальной форме

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

- ◆ Отметим, что в уравнениях Максвелла (1873 г.) заложено **существование электромагнитных волн**. Согласно уравнениям Максвелла, всякое переменное магнитное поле возбуждает в окружающем пространстве вихревое электрическое поле, а всякое переменное электрическое поле вызывает появление вихревого магнитного поля.
- ◆ Возбуждение взаимосвязанных электрического и магнитного полей и есть электромагнитная волна. Экспериментальное подтверждение гениальных предсказаний Максвелла было осуществлено в опытах Герца в 1888 г.

Свободные и вынужденные гармонические колебания в резонансном контуре

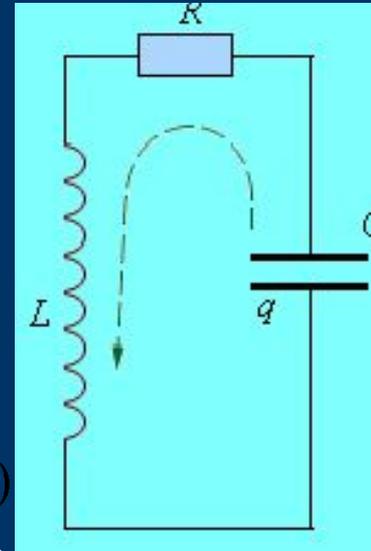


- ♦ II Закон Кирхгофа для замкнутой RLC-цепи:

$$iR + u_c = -L \frac{di}{dt}; \quad i = \frac{dq}{dt}; \quad q = u_c C \rightarrow u_c = \frac{q}{C};$$

$$\frac{dq}{dt} R + \frac{q}{C} + L \frac{d^2 q}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{dq}{dt} \frac{R}{L} + \frac{q}{LC} = 0. \quad (1)$$

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} C + \frac{du_c}{dt} \frac{RC}{L} + \frac{u_c}{LC} = 0; \quad \frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{du_c}{dt} \frac{R}{L} + \frac{u_c}{LC} = 0 \quad (2)$$



- ♦ Рассмотрим сначала случай, когда в контуре нет потерь ($R = 0$). Тогда

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \omega_0^2 u_c = 0$$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0$$

$$u_c(t) = U_{Cm} \cos(\omega_0 t + \varphi) = U_{Cm} \cos \psi \quad q(t) = q_{\max} \cos(\omega_0 t + \varphi) = q_{\max} \cos \psi;$$

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

- собственная частота свободных колебаний контура

$$T = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

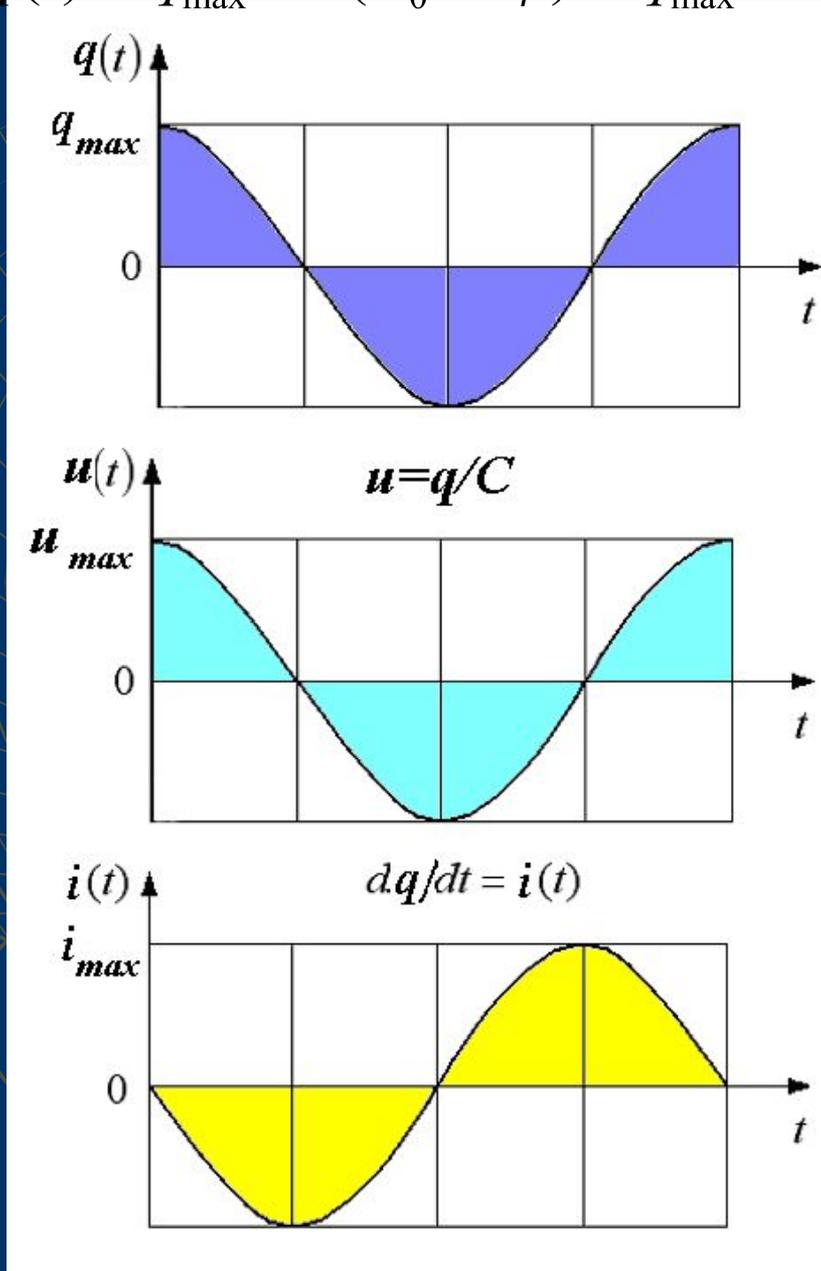
- период свободных колебаний.

$$\psi = \omega_0 t + \varphi$$

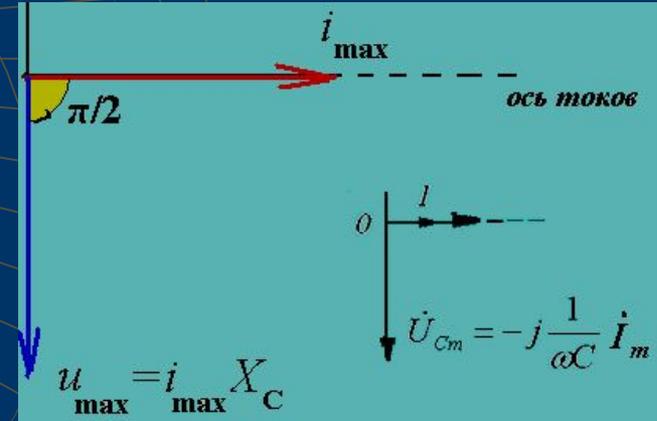
$$q(t) = q_{\max} \cos(\omega_0 t + \varphi) = q_{\max} \cos \psi; \quad u_C(t) = U_{Cm} \cos(\omega_0 t + \varphi) = U_{Cm} \cos \psi$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} q(t) &= i(t) = -(q_{\max} \omega_0) \sin(\omega_0 t + \varphi) = \\ &= -(i_{\max}) \sin(\omega_0 t + \varphi) = (i_{\max}) \cos(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}). \end{aligned}$$

Колебания тока опережают по фазе на $\pi/2$ колебания напряжения.



$$i_{\max} = q_{\max} \omega_0 = u_C C \omega_0 = \frac{u_C}{\frac{1}{\omega_0 C}} = \frac{u_C}{X_C};$$



Векторные диаграммы на действительной и мнимой плоскости

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

| Электрические величины | Механические величины |
|--|-------------------------------|
| Заряд конденсатора $q(t)$ | Координата $x(t)$ |
| Ток в цепи $i = dq/dt$ | Скорость $v = dx/dt$ |
| Индуктивность L | Масса m |
| Величина, обратная емкости $1/C$ | Жесткость пружины k |
| Напряжение на конденсаторе $u_c = q/C$ | Упругая сила kx |
| Магнитная энергия катушки $Li^2/2$ | Кинетическая энергия $mv^2/2$ |
| Магнитное потокосцепление Li | Импульс mv |

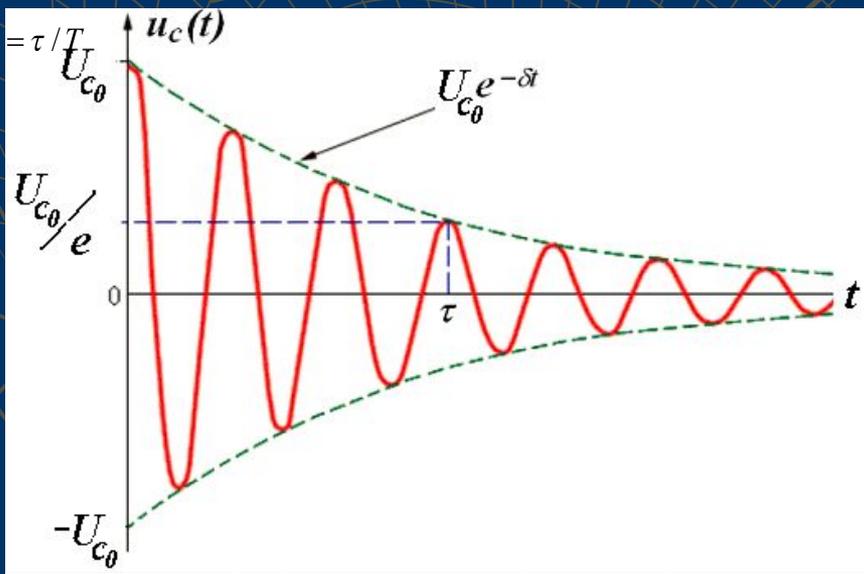
Затухающие колебания

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{du_c}{dt} \frac{R}{L} + \frac{u_c}{LC} = 0, \quad \frac{R}{L} = 2\delta; \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC};$$

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + 2\delta \cdot \frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 \cdot u_c = 0.$$

$$u_c = U_{c0} e^{-\delta t} \cos \omega t$$

$$\tau = \frac{1}{\delta} = \frac{2L}{R}$$



-**Время релаксации** – время
-в течение которого амплитуда колебаний
уменьшается в e раз

**Частота ω и период T затухающих
колебаний:**

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

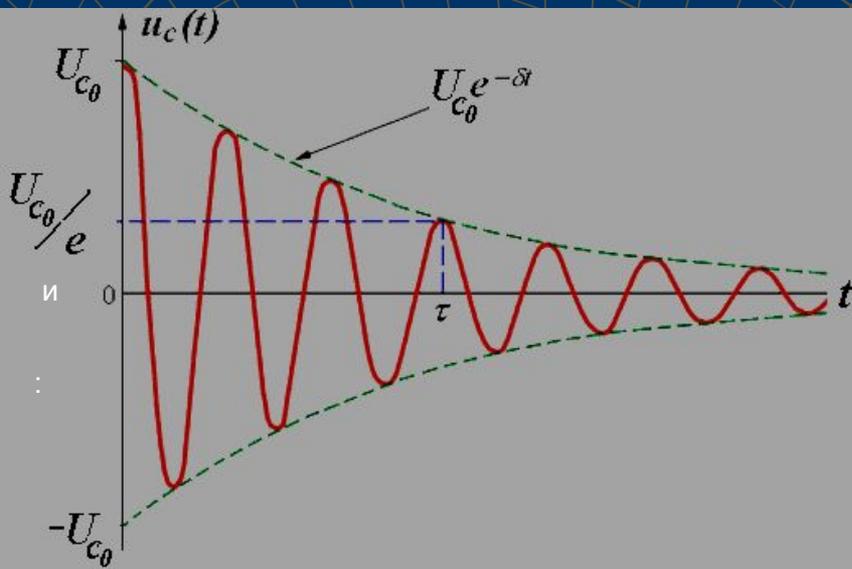
$$(\omega < \omega_0)$$

$$N = \tau / T$$

- **Число полных колебаний, совершаемых системой
за время затухания τ .**

◆ Вычислим отношение

$$\frac{u_C(t)}{u_C(t+T)} = \frac{U_{C0} \cdot e^{-\delta t} \cdot \cos \omega t}{U_{C0} \cdot e^{-\delta(t+T)} \cdot \cos \omega(t+T)} = e^{\delta T}$$



Оно, как и в механике, называется **декрементом затухания**, а его логарифм

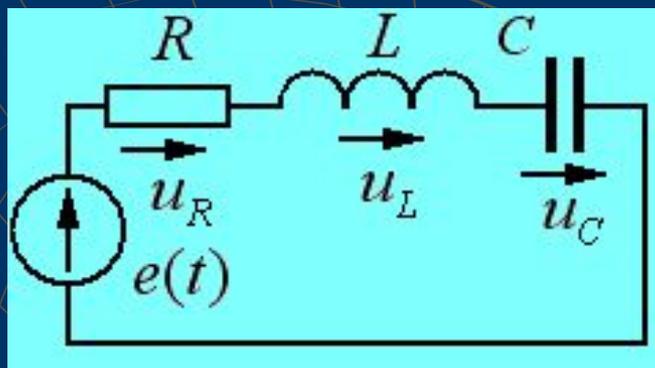
$$\theta = \ln \frac{u_C(t)}{u_C(t+T)} = \delta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N}$$

-логарифмическим декрементом затухания. $\theta = \delta T$

Величина, обратная логарифмическому декременту называется **добротностью** Q колебательного контура:

$$Q = \frac{\pi}{\theta} = \frac{\pi}{\delta T} = \pi \frac{\tau}{T} \approx \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Вынужденные колебания в RLC контуре



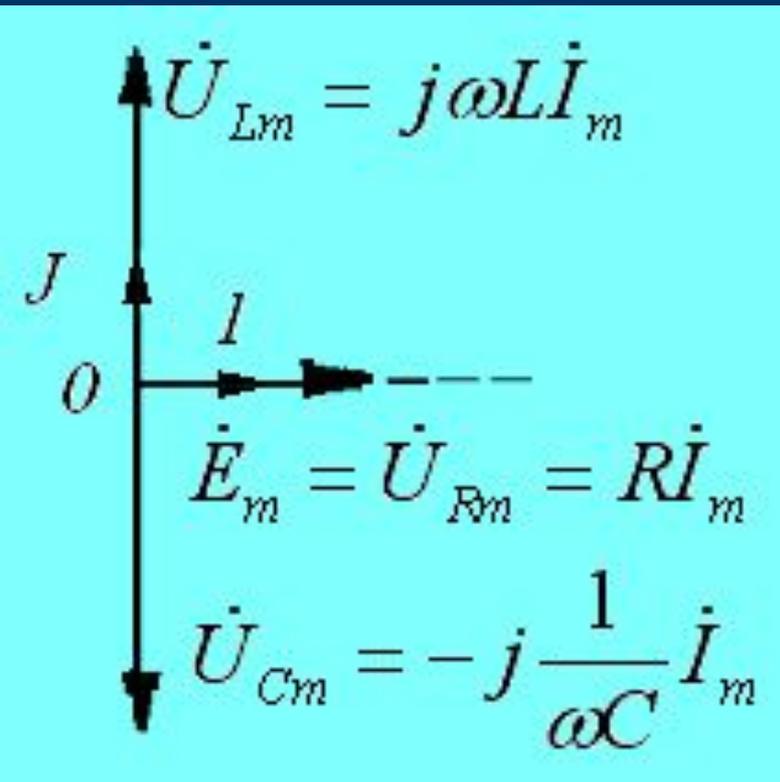
Установившиеся колебания, возникающие в контуре под действием синусоидальной ЭДС, называются **вынужденными колебаниями**.

Периодический внешний источник обеспечивает приток энергии к системе и, несмотря на наличие потерь, не дает колебаниям затухнуть. **Установившиеся вынужденные колебания всегда происходят на частоте внешней ЭДС ω .**

$$u_L(t) + u_R(t) + u_C(t) = e(t)$$

Дифференциальное уравнение вынужденных синусоидальных колебаний в резонансном контуре при действии ЭДС $e(t) = E_m \sin \omega t$

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + 2\delta \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E_m \sin \omega t$$



$$I_m = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + [\omega L - 1/(\omega C)]^2}}$$

$$Z = R + j[\omega L - 1/(\omega C)]$$

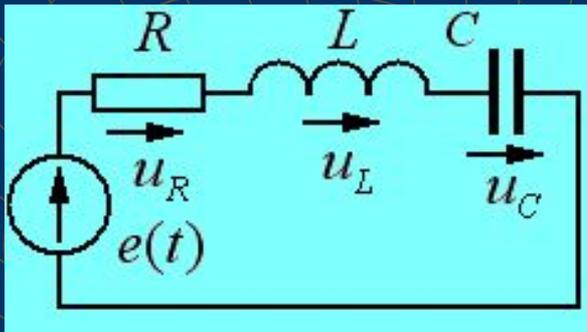
$$|Z| = \sqrt{R^2 + [\omega L - 1/(\omega C)]^2}$$

$$\varphi = -\arctg \left[\frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R} \right]$$

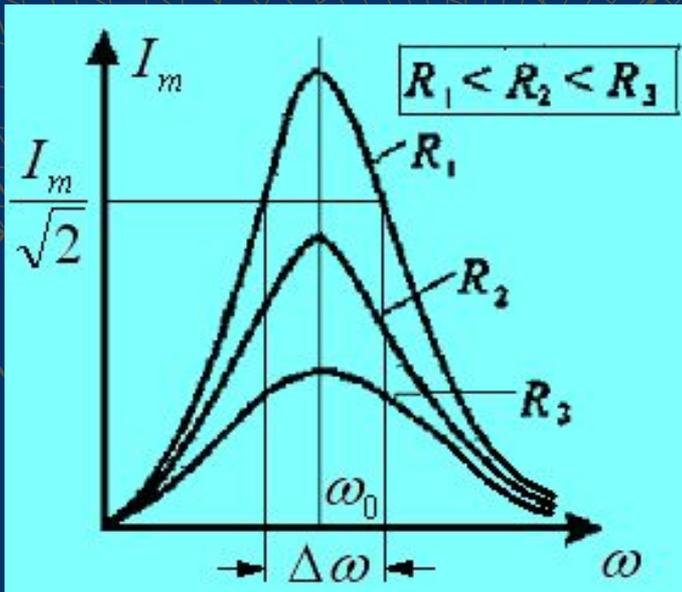
Вектор напряжения на резисторе U_{Rm} и ток в резисторе I_m совпадают по фазе, вектор напряжения на индуктивности U_{Lm} опережает ток в индуктивности I_m на 90° , а вектор напряжения на конденсаторе U_{Cm} отстает от тока в конденсаторе I_m на 90° .

Резонанс

Явление резкого возрастания амплитуды тока при равенстве частоты ω внешнего воздействия и собственной резонансной частоты свободных колебаний контура ω_0 называется резонансом.



$$|Z| = \sqrt{R^2 + [\omega L - 1/(\omega C)]^2}$$



Чем меньше сопротивление потерь R в контуре, тем выше и острее резонансная характеристика.

Степень “остроты” определяется добротностью Q колебательной системы:

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\rho}{R}$$

Мощность в цепи переменного тока

$$p(t) = u(t)i(t) \quad P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int U_m I_m \sin(\omega t + \varphi) \sin \omega t dt = UI \cos \varphi$$

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \quad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

действующие или **эффективные значения**

- напряжения и тока;
- множитель $\cos \varphi$ называется **коэффициентом мощности**.

Пример. В сеть переменного тока и напряжением $U = 220$ В и частотой $f = 50$ Гц включены последовательно конденсатор $C = 31,8$ мкФ, резистор $R = 100$ Ом и индуктивность $L = 0,318$ Гн. Найдите действующее значение тока I , напряжений U_C , U_R , U_L на элементах контура и мощность P , потребляемую цепью.

$$Z_R = R = 100 \text{ Ом}, \\ Z_L = j\omega L = jX_L = j220 \text{ Ом},$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -jX_C = -j90 \text{ Ом}$$

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + [\omega L - 1/(\omega C)]^2}} = 1,34 \text{ А} \quad \varphi = -\arctg \left[\frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R} \right] = -52,5^\circ$$

$$U_R = Ir = 134 \text{ В}, \quad U_L = I\omega L = 295 \text{ В}, \quad U_C = I/(\omega C) = 120,6 \text{ В}. \quad P = UI \cos \varphi = 179,5 \text{ Вт}$$