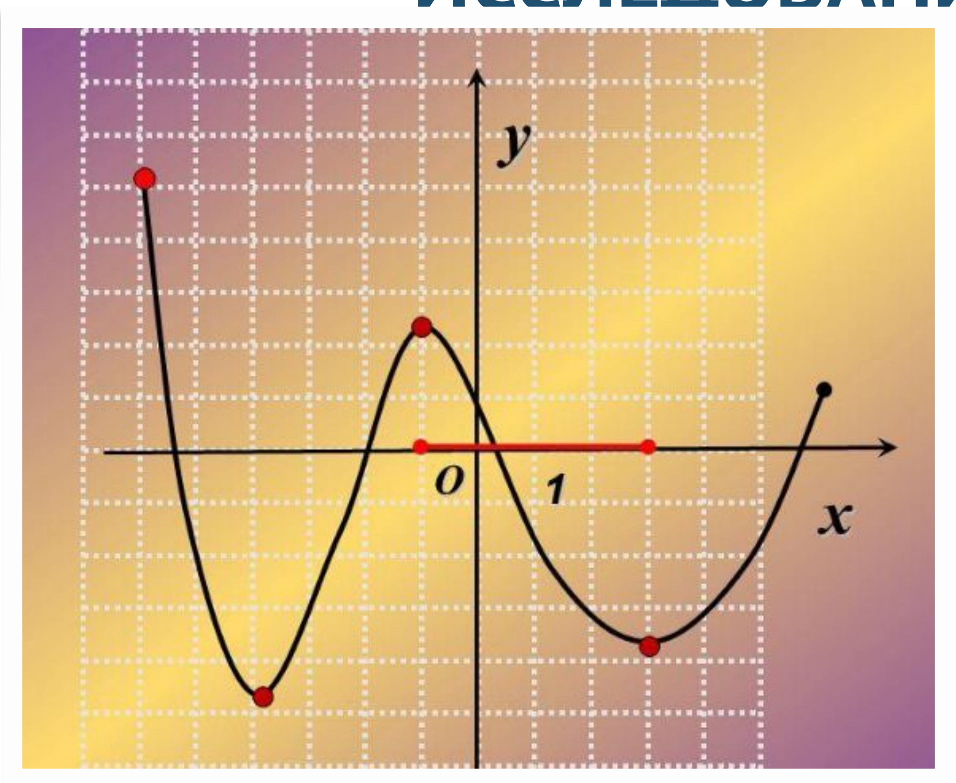
ПРОИЗВОДНАЯ

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ НА
Ь И ЭКСТРЕМУМЫ



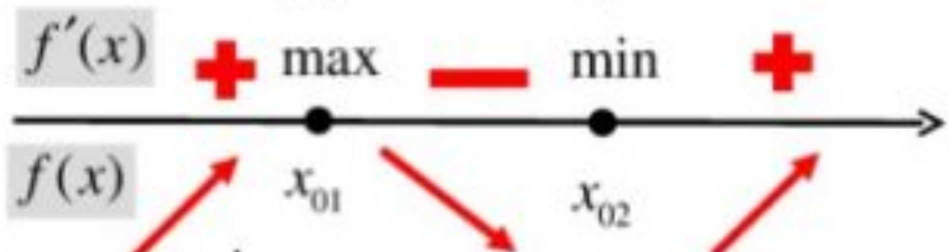
Преподаватель:
Махмудов
Кароматулло Азизович

Новосибирск – 2021

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ НА МОНОТОННОСТЬ И ЭКСТРЕМУМЫ

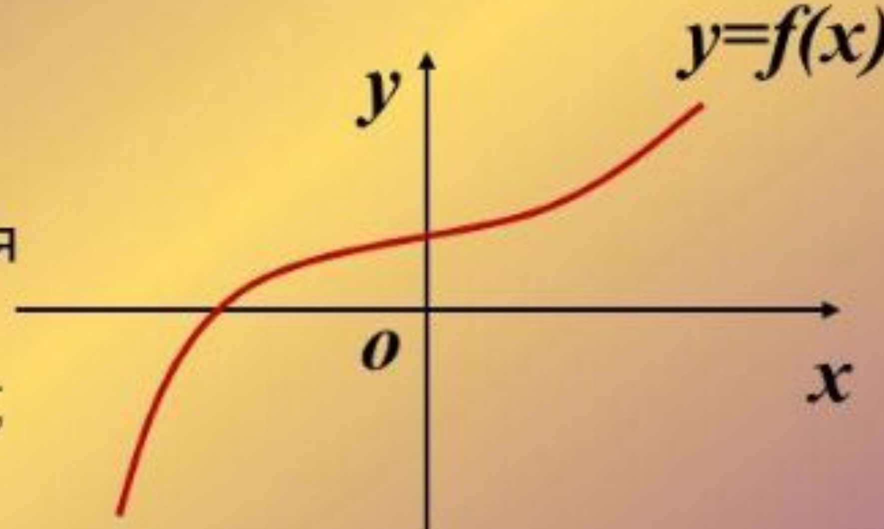
Алгоритм исследования непрерывной функции $y = f(x)$ на монотонность и экстремумы

1. Найти производную $f'(x)$.
2. Найти стационарные (**решить уравнение $f'(x) = 0$**) и критические точки (**найти $D(f')$**).
3. Отметить стационарные и критические точки на числовой прямой и определить знаки производной на получившихся промежутках.



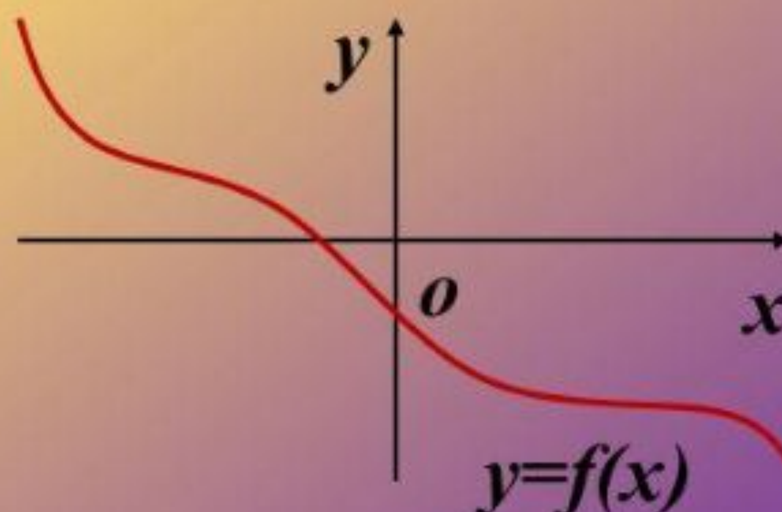
4. Сделать выводы о монотонности функции и о ее точках экстремума.

Исследование функций на монотонность (по графику).



- если двигаться по графику слева направо, то ординаты точек графика всё время увеличиваются («поднимаемся в горку»);

говорят, что функция возрастает;



- если двигаться по графику слева направо, то ординаты точек графика всё время уменьшаются («спускаемся с горки»);

говорят, что функция убывает.

Как найти промежутки монотонности для функций ?

- **достаточное условие возрастания функции.**

Если $f'(x)>0$ в каждой точке интервала, то функция $f(x)$ возрастает на этом интервале.

- **достаточное условие убывания функции.**

Если $f'(x)<0$ в каждой точке интервала, то функция $f(x)$ убывает на этом интервале.

Пример: Исследовать на монотонность функцию $y=2x^3+3x^2-1$.

Исследовать функцию на монотонность – это значит выяснить, на каких промежутках области определения функция возрастает, а на каких – убывает. Согласно теоремам 1 и 2, это связано со знаком производной.

Найдем производную данной функции:

$$f'(x)=6x^2+6x=6x\,(x+1)$$

Если функция непрерывна не только на открытом промежутке, но и в его концевых точках (именно так обстоит дело для заданной функции), эти концевые точки включают в промежуток монотонности функции.

Ответ: ***функция возрастает*** $x \in (-\infty; -1]$, $[0; +\infty)$, ***функция убывает*** $x \in [-1; 0]$

Экстремумы функции

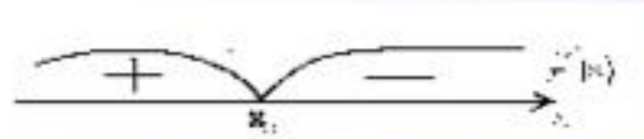
Определение 1. Точку $x=x_0$ называют точкой минимума функции $f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$

Определение 2. Точку $x=x_0$ называют точкой максимума функции $f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$

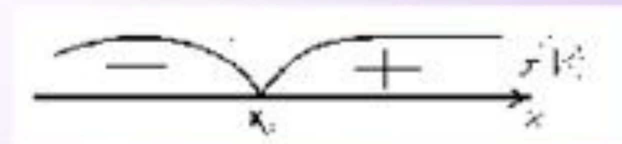
Точки максимума и минимума объединяют общим термином – точки экстремума

Достаточное условие существования экстремума функции:

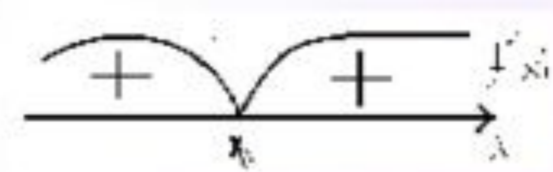
- Если при переходе через критическую точку x_0 функции f(x) ее производная меняет знак с «+» на «-», то x_0 – точка максимума функции f(x).

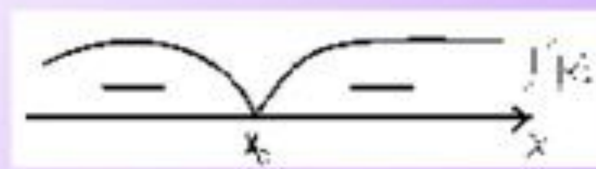


- Если при переходе через критическую точку x_0 функции f(x) ее производная меняет знак с «-» на «+», то x_0 – точка минимума функции f(x).



- Если при переходе через критическую точку x_0 функции f(x) ее производная не меняет знака, то в точке x_0 экстремума нет.





Пример: Найти точки экстремума функции

$y=3x^4 – 16x^3 + 24x^2 – 11.$

Решение: *найдем производную данной функции:* $y^1=12x^3 – 48x^2 + 48x.$

Найдем стационарные точки:

$$12x^3 – 48x^2 + 48x=0$$

$$12x(x^2 – 4x + 4)=0$$

$$12x(x – 2)^2=0$$

Производная обращается в нуль в точках x=0 и x=2

Значит, x=0 – точка минимума.

Ответ: $y_{min}= - 11.$

График функции $y=x^2$

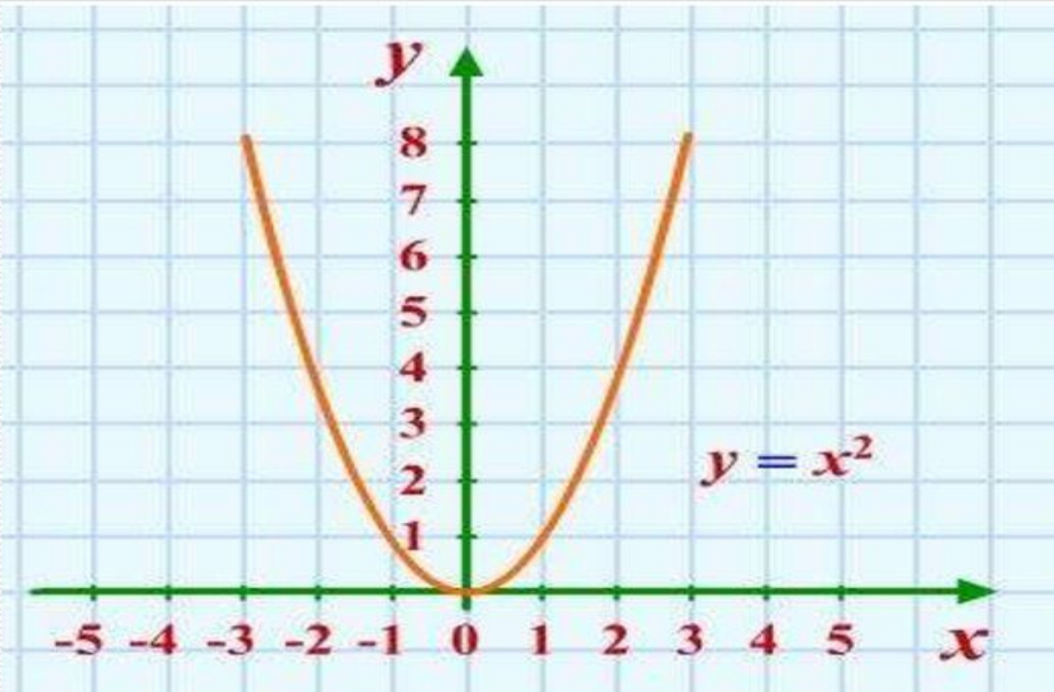


График функции $y=x^2$ называют <u>параболой</u>.