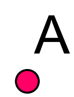
Изображение пространственных фигур на плоскости.

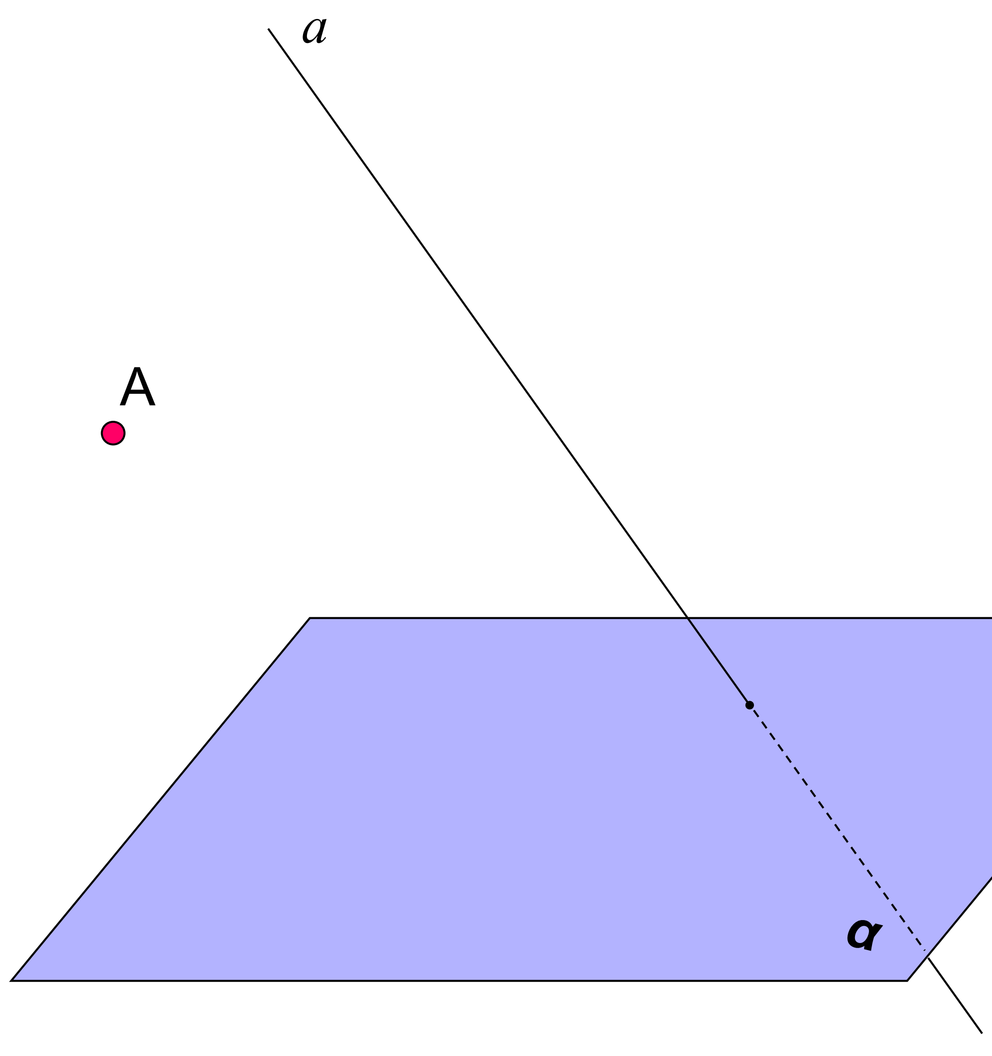
Итак, мы приступили к изучению *стереометрии* – геометрии в пространстве. Как всегда нам необходимо уметь изображать геометрические фигуры, причем все чертежи мы по-прежнему выполняем на плоскости (на странице тетради, на доске и т.д.). Каким образом пространственную фигуру (например, куб) можно «уложить» в плоскость?



Для решения этой задачи применяется *метод параллельного проектирования*. Выясним его суть на примере простейшей геометрической фигуры – точки.

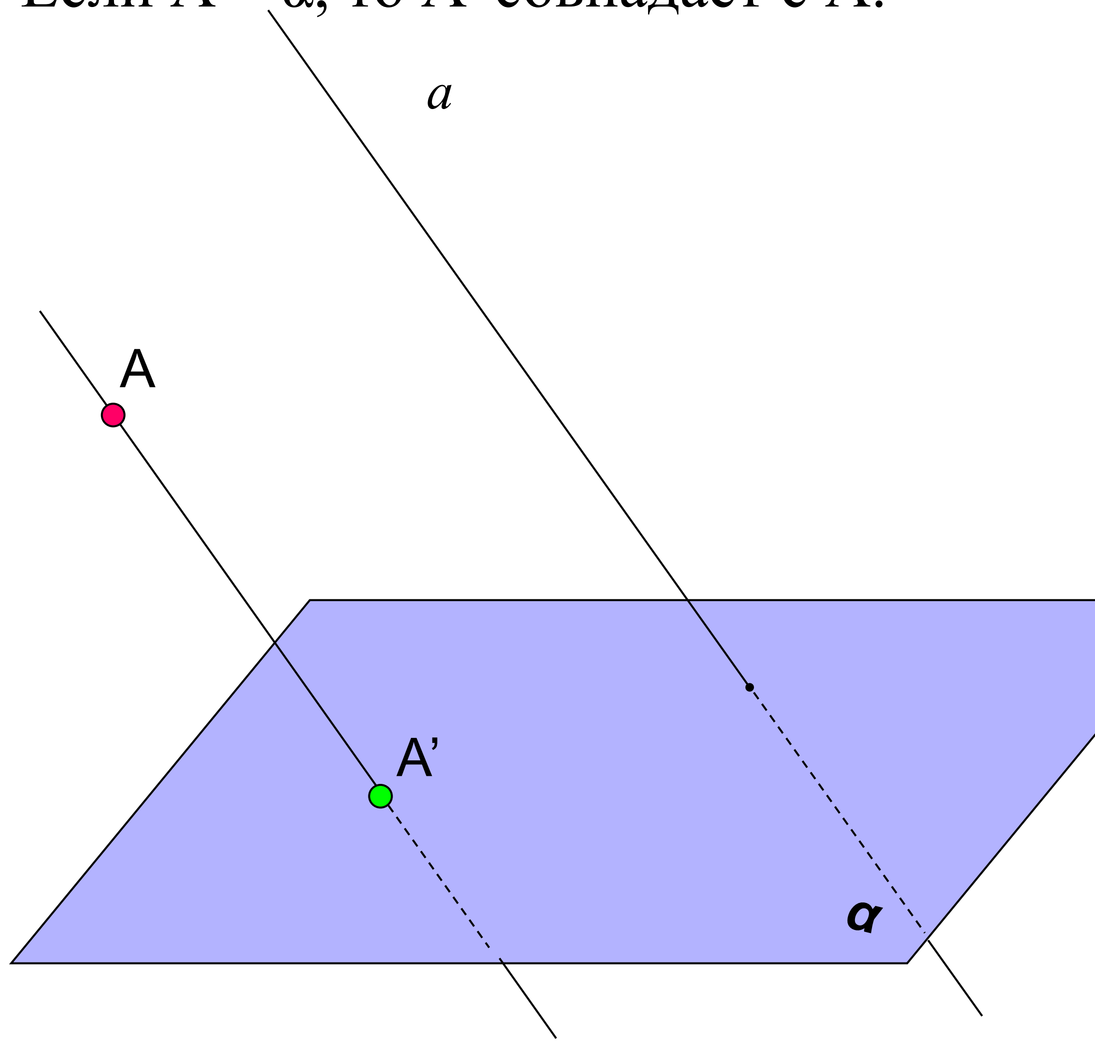
Итак, у нас есть геометрическая фигура в пространстве – точка А.

Выберем в пространстве произвольную плоскость α (её мы будем называть *плоскостью проекций*) и любую прямую *a* пересекает **α** (она задает *направление параллельного проектирования*).

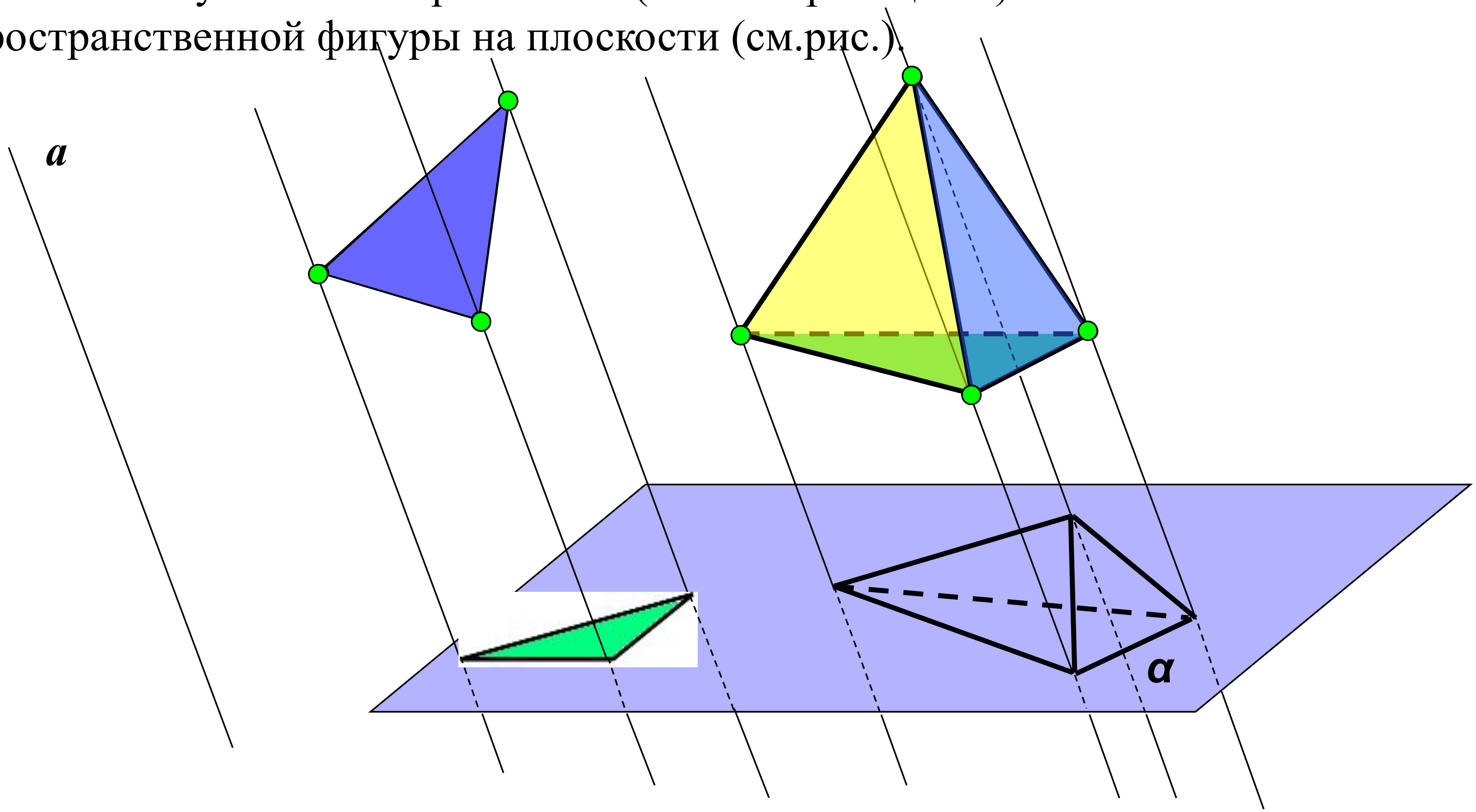


Проведем через точку А прямую, параллельную прямой a.

Точка А' пересечения этой прямой с плоскостью и есть *проекция* точки А на плоскость α. Точку А ещё называют *прообразом*, а точку А' – *образом*. Если А $\in$ α, то А' совпадает с А.

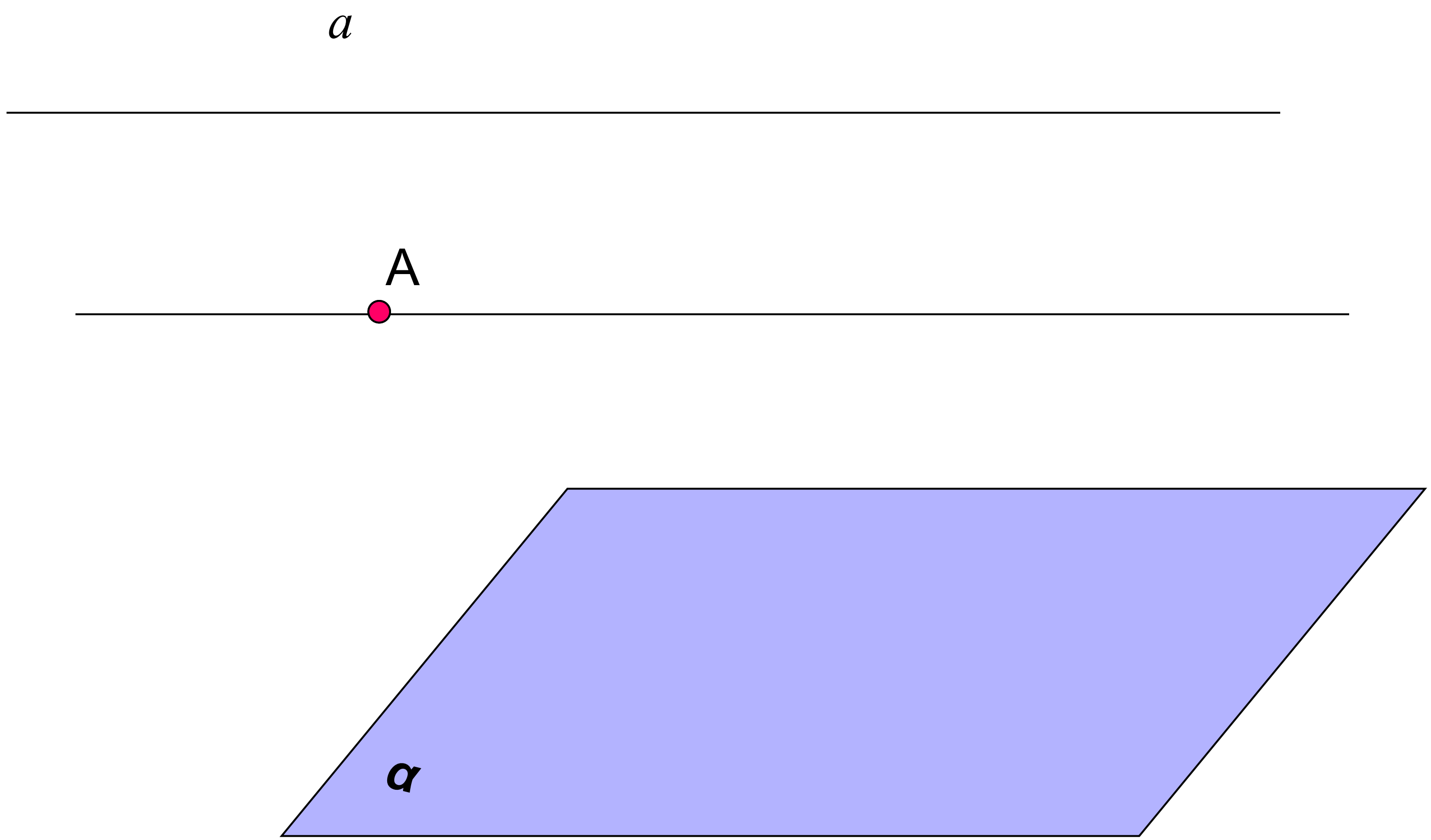


Рассматривая любую геометрическую фигуру как множество точек, можно построить в заданной плоскости проекцию данной фигуры. Таким образом можно получить изображение (или «проекцию») любой плоской или пространственной фигуры на плоскости (см.рис.).

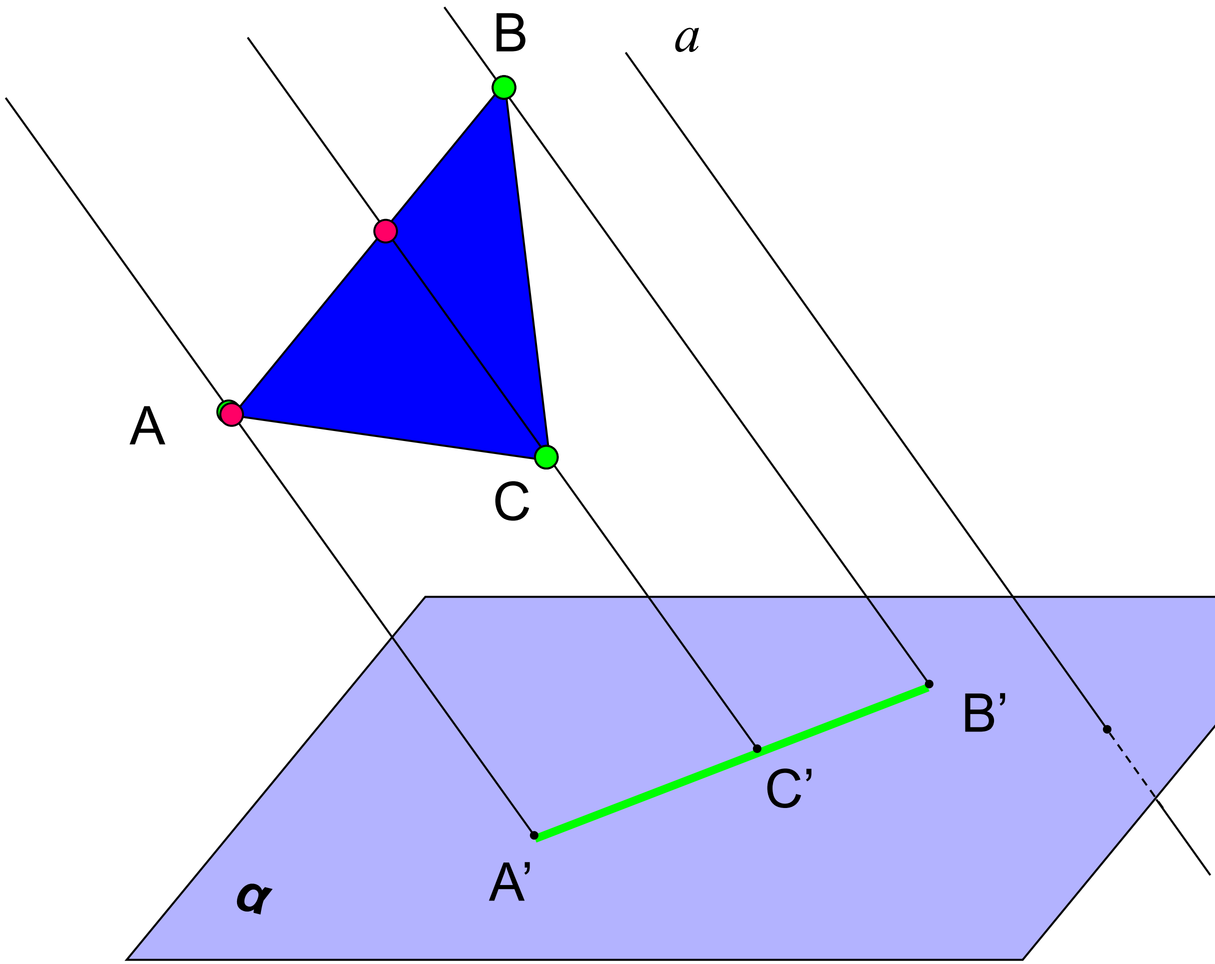


Наглядным примером параллельного проектирования является отбрасываемая любым объектом(*прообраз*) в пространстве тень(*образ*) от солнечных лучей (*направление параллельного проектирования*) на Земле(*плоскость проекций*).

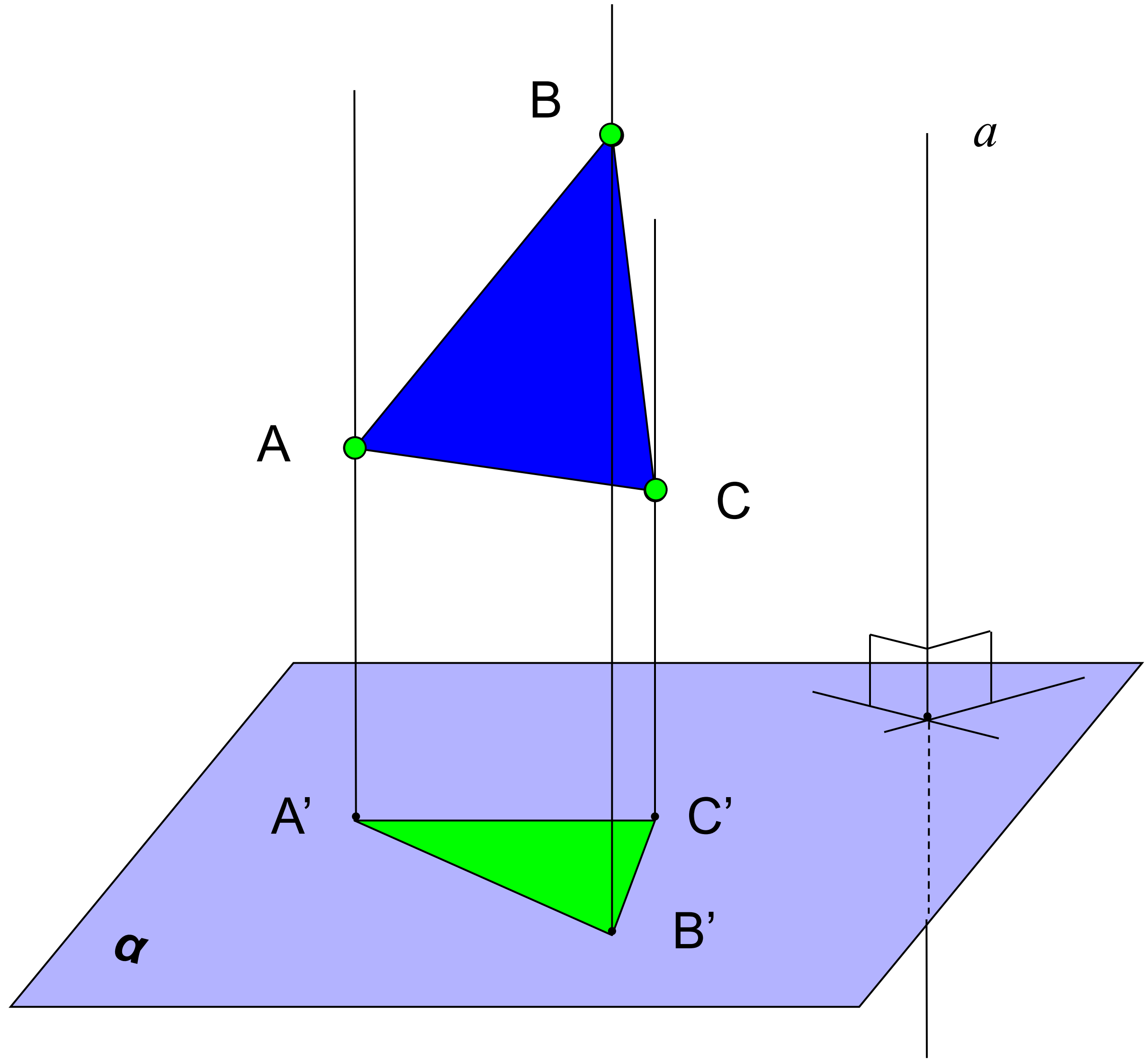
Примечание 1. При параллельном проектировании **не выбирают** направление параллельного проектирования параллельно плоскости проекции (самостоятельно обоснуйте почему).



Примечание 2. При параллельном проектировании плоских фигур **не выбирают** направление параллельного проектирования параллельно плоскости, которой принадлежит эта плоская фигура, т.к. получающаяся при этом проекция не отражает свойства данной плоской фигуры.

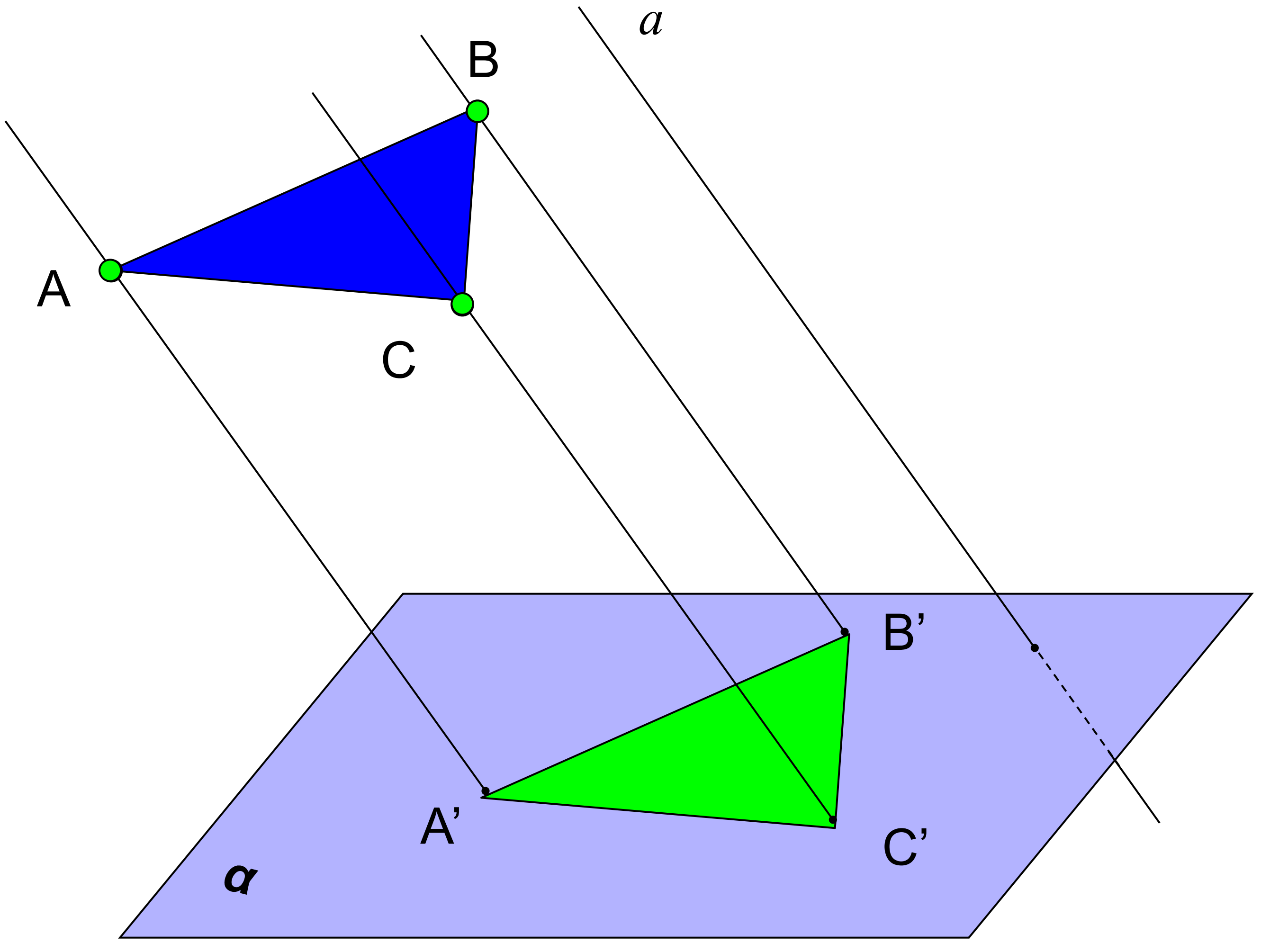


Примечание 3. Если направление параллельного проектирования перпендикулярно плоскости проекций, то такое параллельное проектирование называется **ортогональным** *(прямоугольным)* **проектированием**.



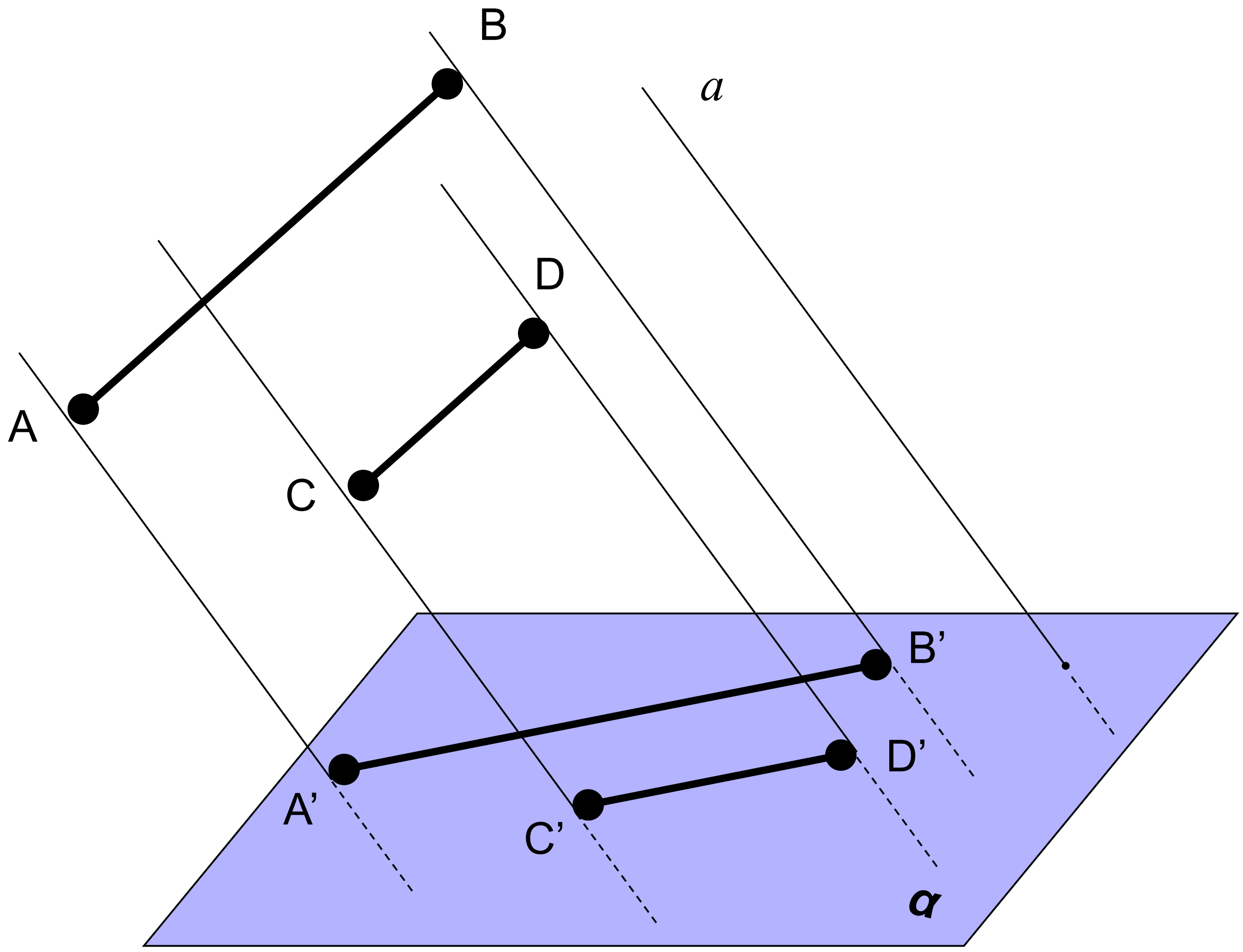
Примечание 4. Если плоскость проекций и плоскость, в которой лежит данная фигура параллельны (α||(ABC)), то получающееся при этом изображение…

...правильно – **равно прообразу!**



Параллельное проектирование обладает свойствами:

1) параллельность прямых (отрезков, лучей) **сохраняется**;

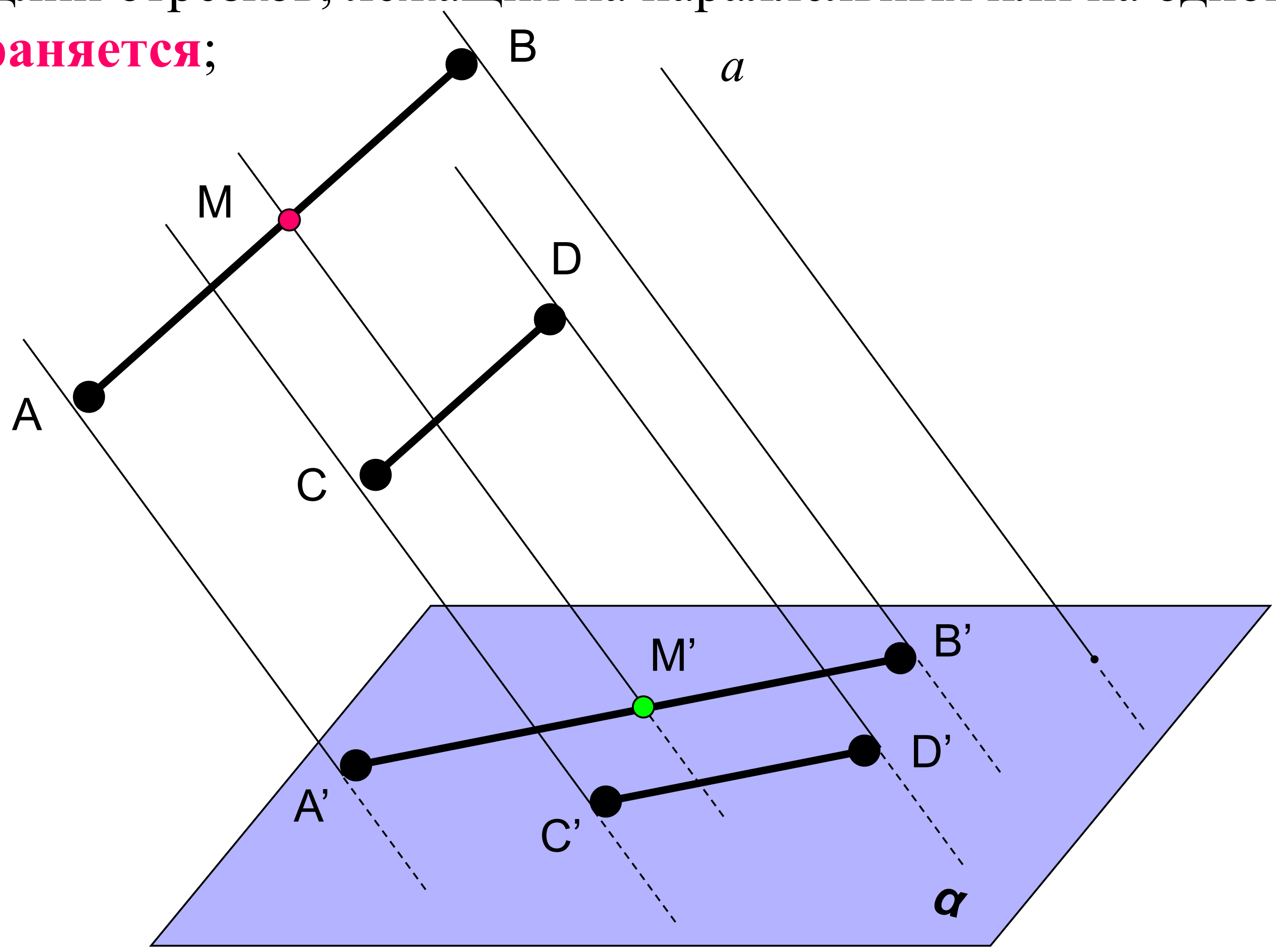


$$AB \parallel CD \Rightarrow A'B' \parallel C'D'$$

Параллельное проектирование обладает свойствами:

1) параллельность прямых (отрезков, лучей) **сохраняется**;

2) отношение длин отрезков, лежащих на параллельных или на одной прямой **сохраняется**;



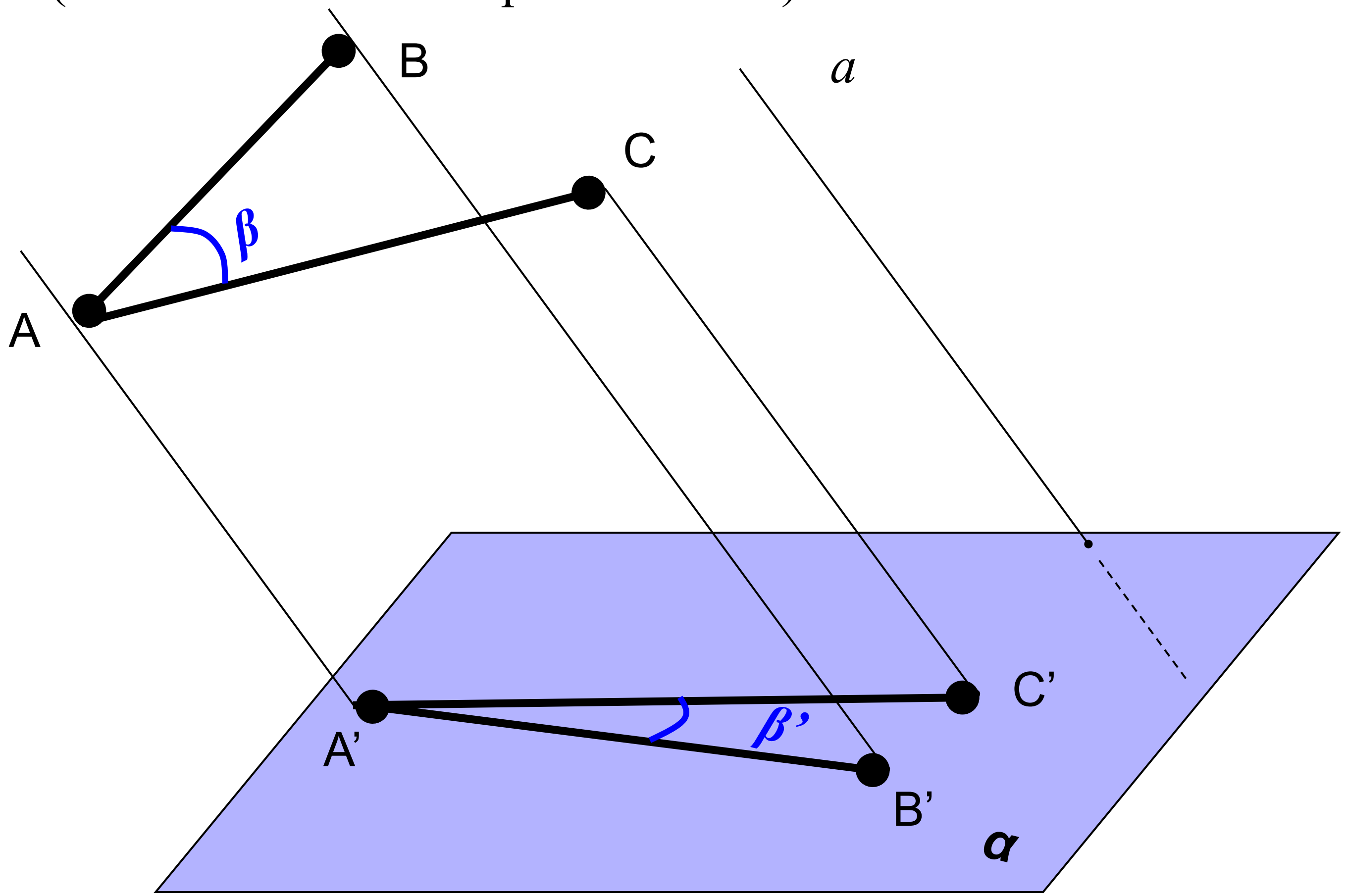
Если, например, AB=2CD, то A'B'=2C'D' или $\frac{AM}{MB} = \frac{A'M'}{M'B'}$

Параллельное проектирование обладает свойствами:

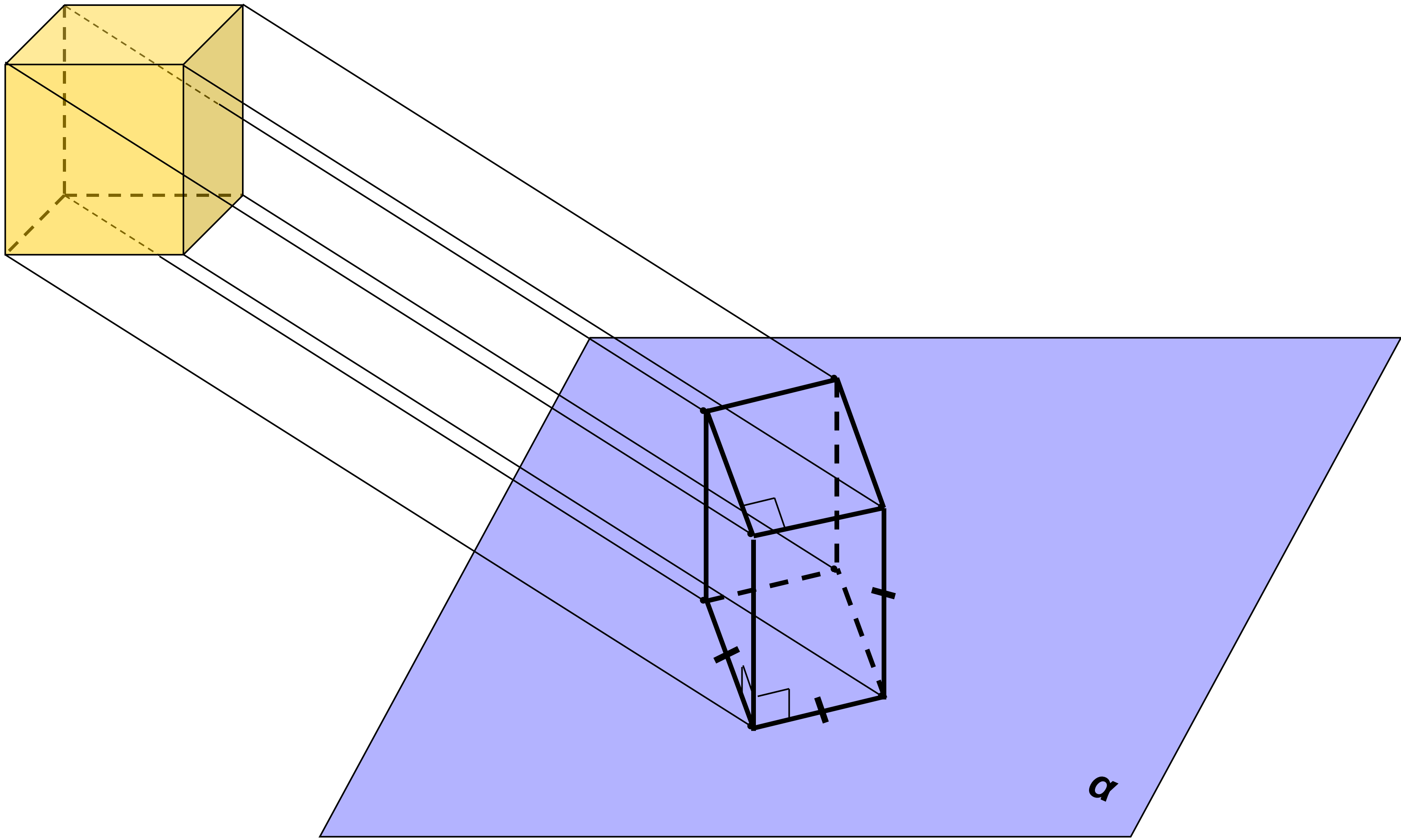
1) параллельность прямых (отрезков, лучей) **сохраняется**;

2) отношение длин отрезков, лежащих на параллельных или на одной прямой **сохраняется**;

3) Линейные размеры плоских фигур(длины отрезков, величины углов) **не** **сохраняются** (исключение – см. примечание 4).

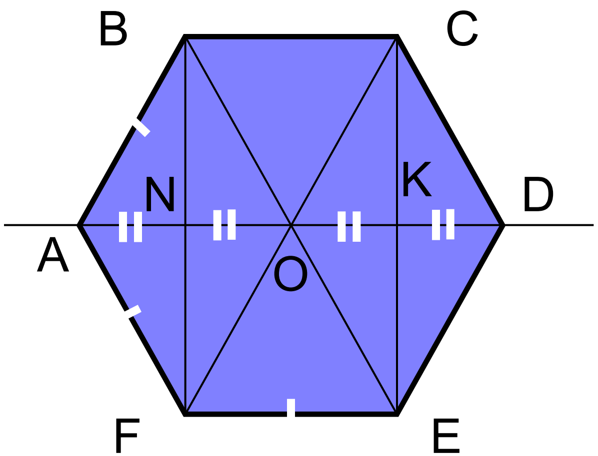


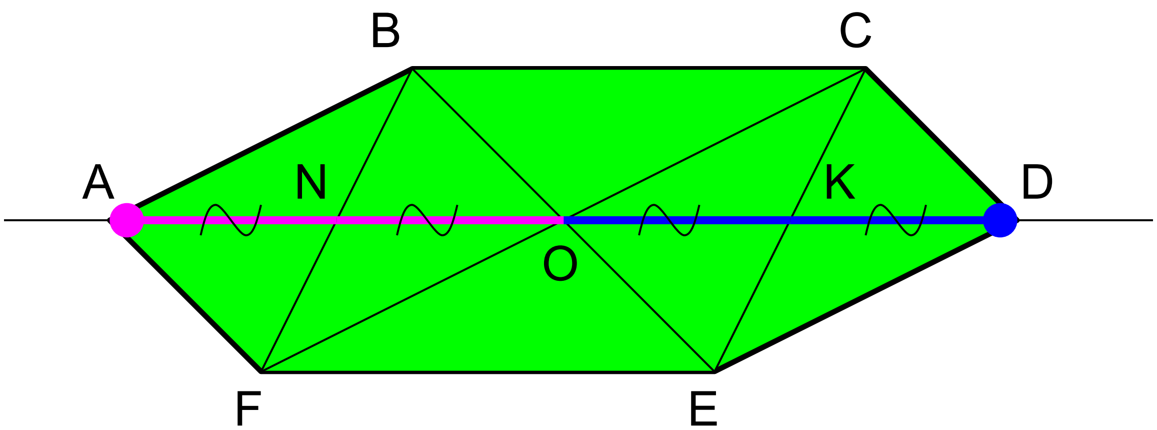
Итак, построим изображение куба:



Далее разберем примеры изображения некоторых плоских фигур…

Разберемся, как построить изображение правильного шестиугольника.



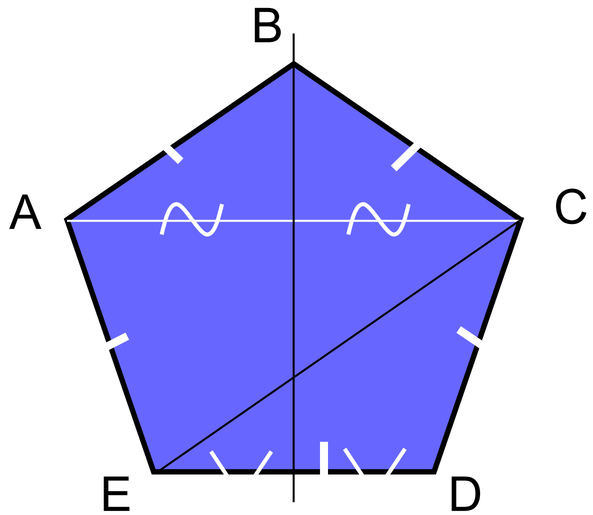


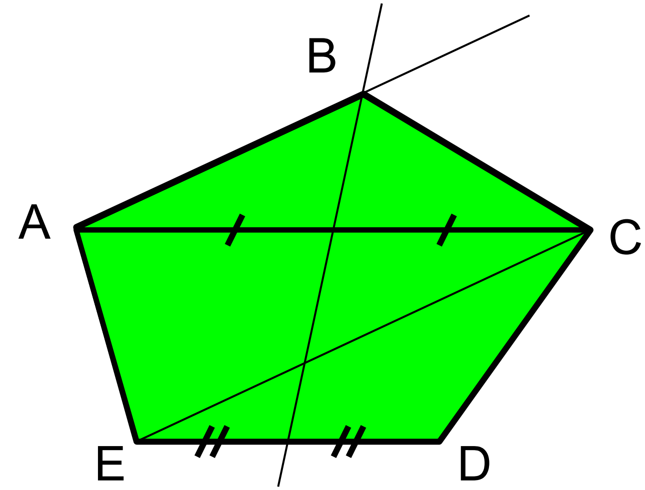
Разобьем правильный шестиугольник на три части: прямоугольник FBCE и два равнобедренных треугольника ΔFAB и ΔCDE. Построим вначале изображение прямоугольника FBCE – произвольный параллелограмм FBCE. Осталось найти местоположение двух оставшихся вершин – точек A и D.

Вспомнив свойства правильного шестиугольника, заметим, что: 1) эти вершины лежат на прямой, проходящей через центр прямоугольника и параллельной сторонам BC и FE; 2) OK=KD и ON=NA.

Значит, 1) находим на изображении точку O и проводим через неё прямую, параллельную BC и FE, получив при этом точки N и K;

2) откладываем от точек N и K от центра O на прямой такие же отрезки – в итоге получаем две оставшиеся вершины правильного шестиугольника A и D.



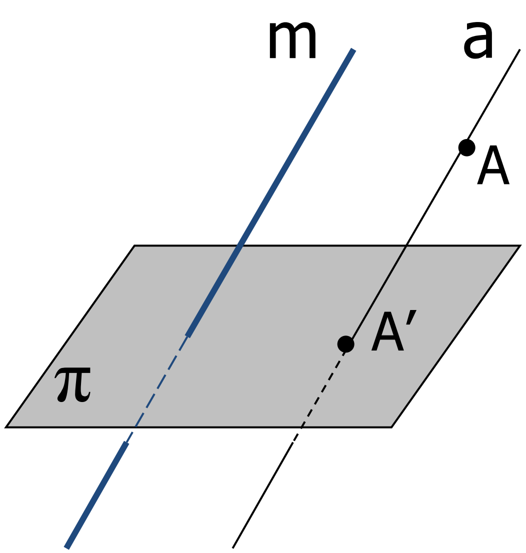


Попробуйте самостоятельно построить изображение *правильного пятиугольника*.

Подсказка: разбейте фигуру на две части – равнобокую трапецию и равнобедренный треугольник, а затем воспользуйтесь некоторыми свойствами этих фигур и ,конечно же, свойствами параллельного проектирования.

Решение. Просмотрите ход построения…

Параллельное проектирование



π – некоторая плоскость

m – прямая, пересекающая плоскость

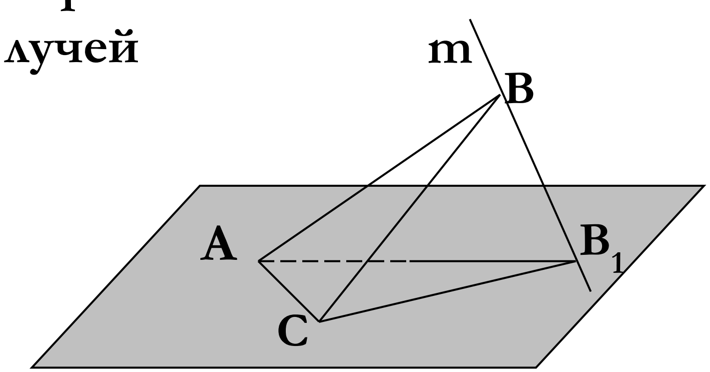
A – произвольная точка вне плоскости

m | | a

A′ – параллельная проекция A на плоскость π

Ф – некоторая фигура в пространстве ;
проекции ее точек на плоскость π
образуют фигуру Ф' ;
Ф' – параллельная проекция фигуры Ф
на плоскость π в направлении
прямой m

Примеры параллельных
проекций – тени предметов
под воздействием пучка
параллельных солнечных
лучей



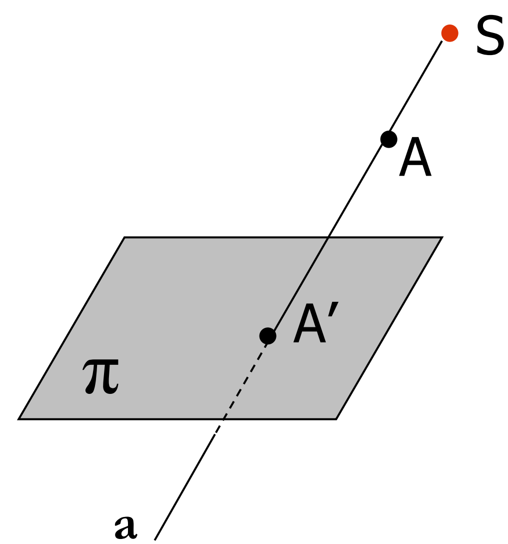
1. Приведите примеры геометрических фигур, расположенных в пространстве, которые проектируются в а) прямую ; б) отрезок.

2. Изобразите параллельную проекцию: а) прямоугольника ; б) трапеции

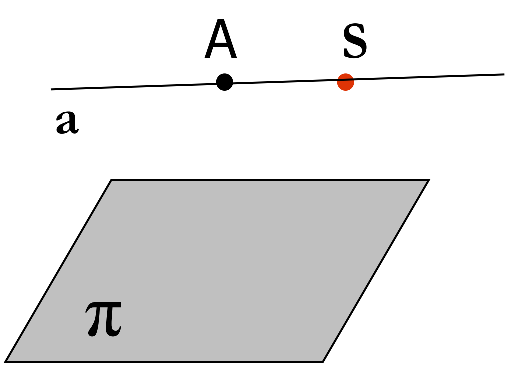
3. Изобразите параллельную проекцию равностороннего треугольника

4. Изобразите параллельную проекцию квадрата: а) с вписанной в него окружностью; б) с описанной около него окружностью

Центральное проектирование



π – некоторая плоскость
S – произвольная точка, не принадлежащая плоскости, - центр проектирования
A – произвольная точка пространства
Прямая a соединяет точки A и S
A' – центральная проекция A на плоскость π



a || π , то
A не имеет проекции на эту плоскость

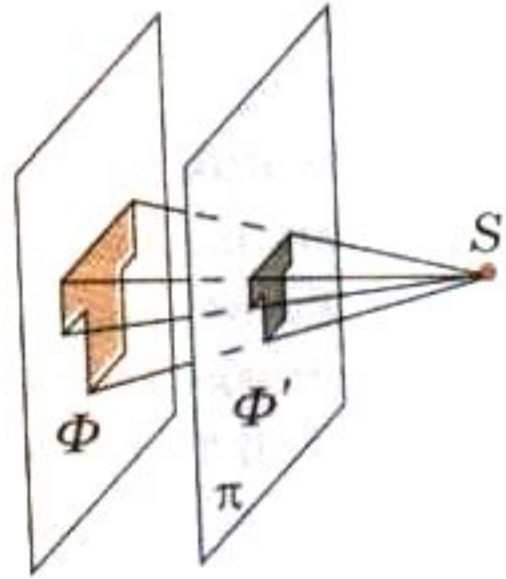
Центральное проектирование

в жипописи

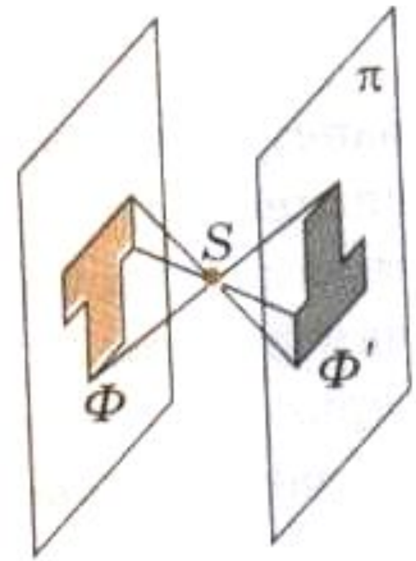
в фотографии

восприятие человеком окружающих предметов посредством зрения

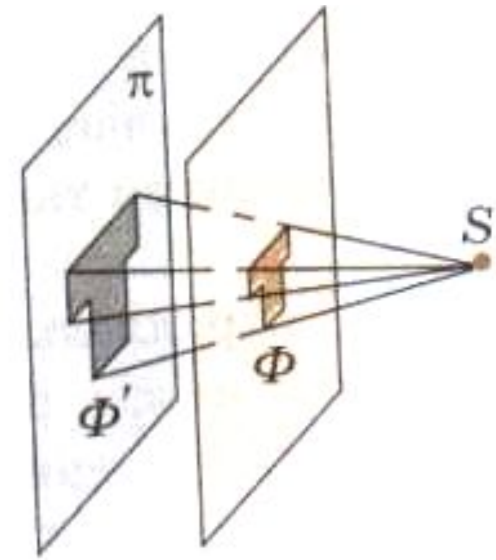
Ф – некоторая фигура в пространстве ;
проекции ее точек на плоскость π образуют фигуру Ф' ;
Ф' – центральная проекция фигуры Ф



Плоскость проектирования π расположена между фигурой Ф и центром проектирования S



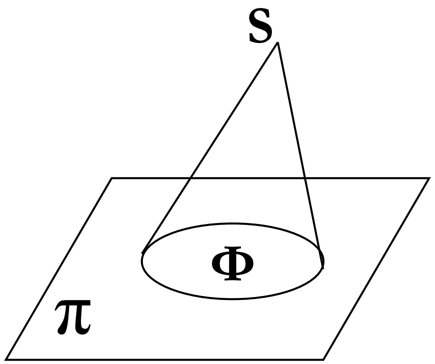
Центр проектирования S расположен между фигурой Ф и плоскостью проектирования π

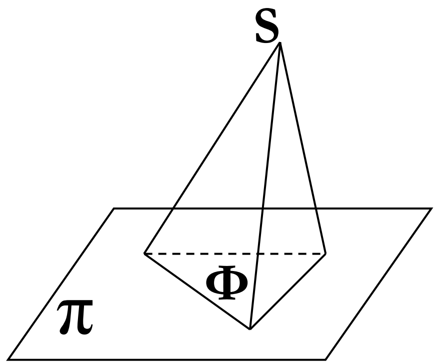


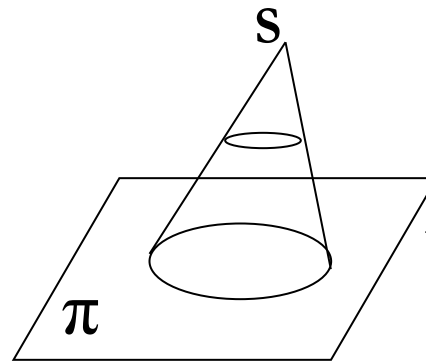
Фигура Ф расположена между плоскостью проектирования π и центром проектирования S

Пусть Ф – фигура на плоскости π и S – точка вне этой плоскости. Отрезки, соединяющие точки фигуры Ф с точкой S, образуют конус.

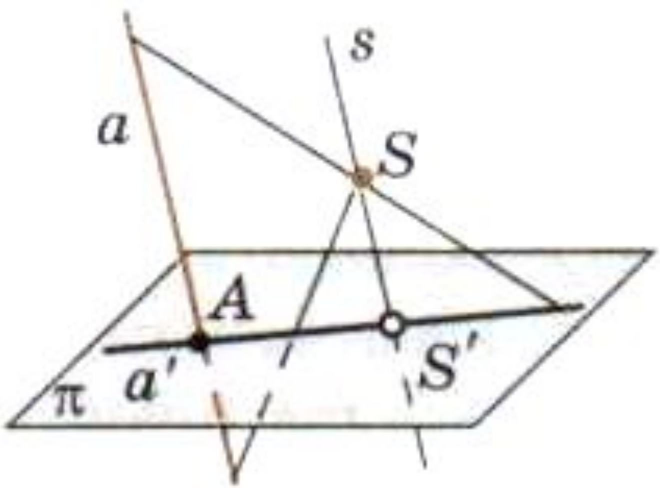
Частный случай конуса – пирамида.



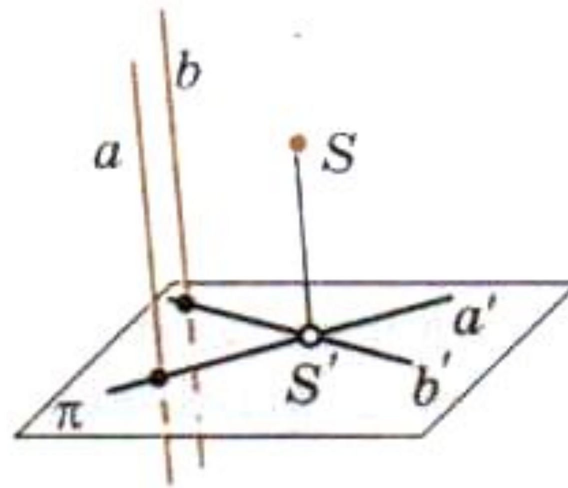




усеченный конус

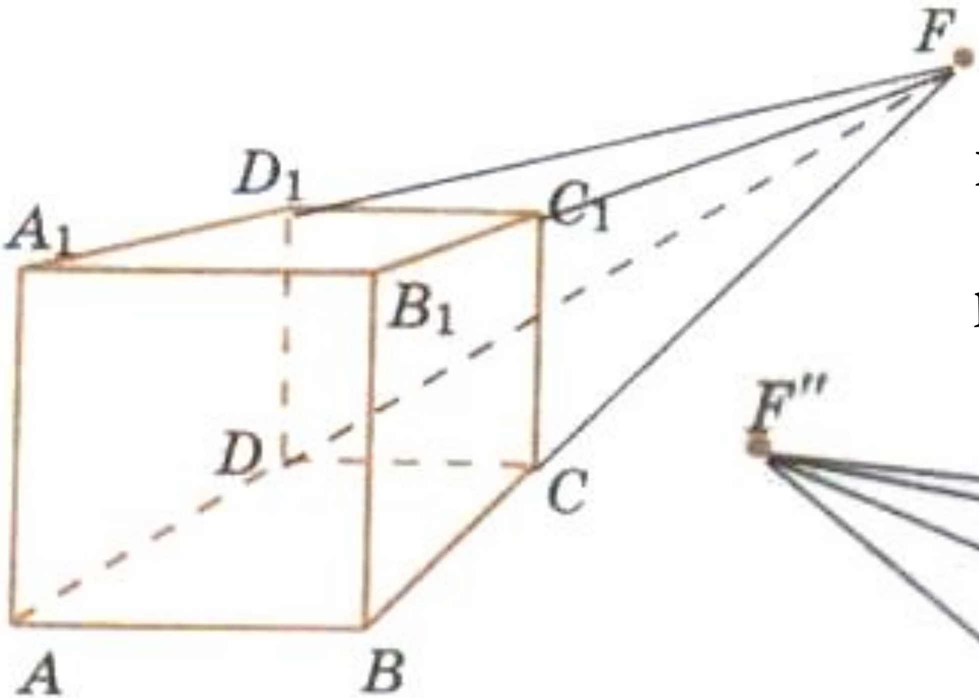


Центральная проекция прямой - прямая

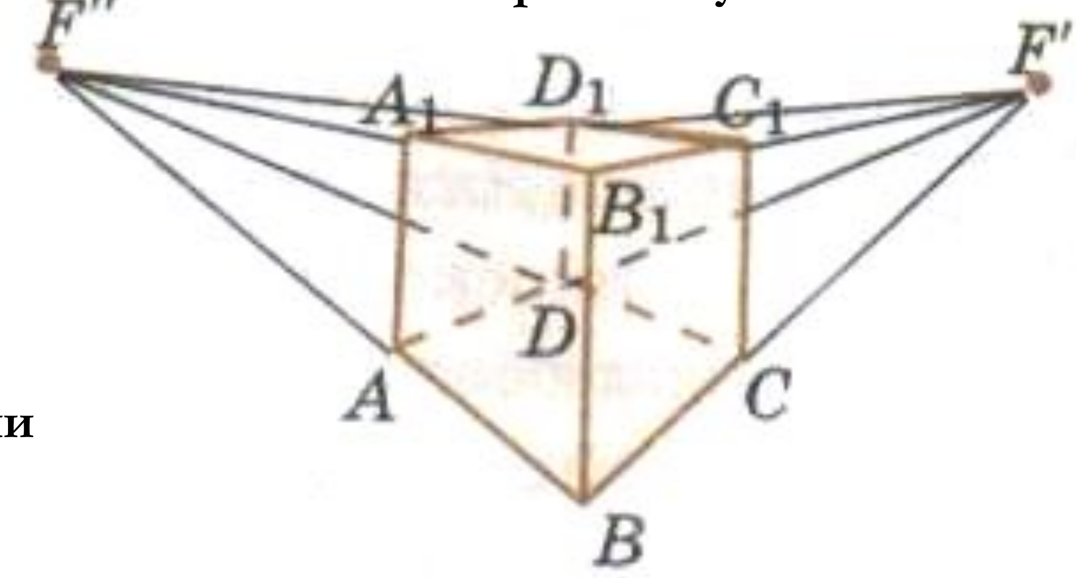


Центральная проекция параллельных прямых – пересекающиеся прямые

Изображение пространственных фигур в центральной проекции



Куб в центральной проекции
на плоскость, параллельную
ребру BB_1, но не параллельную
граням куба



Куб в центральной проекции
на плоскость, параллельную
грани $ABBA_1$