Задачи линейного программирования и их решение в современных вычислительных средах

Лекция №12. Продолжение

Инструменты решения задач ЛП

Excel: Поиск решения

Matlab: функция linprog

Mathcad: блок Given и функции нахождения оптимума

Решение задачи ЛП в средах Matlab и Mathcad

Для решения задачи ЛП в средах Matlab и Mathcad целевую функцию и ограничения удобнее записать в матричном виде.

Далее мы рассмотрим запись в матричном виде для двух типов задач ЛП.

Целевая функция задачи ЛП

$C=C(x_1, x_2, \ldots, x_n)=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n$

Или: $$C=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

:

n – число переменных модели.

ЦФ в векторном виде:

$$C=C(x)=c^{\mathrm{T}} \cdot x,$$

где т – транспонирование,

$\cdot$ - матричное произведение.

Или:

$$C= C(x)= c \cdot x,$$

где $\cdot$ - скалярное

$$c=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \ldots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Пример 1. Стандартная (нормальная) форма задачи ЛП

1. ЦФ => максимум.
Ограничения–линейные неравенства (≤) + условие положительности всех переменных:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n \le b_1 \\ \ldots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n \le b_m \\ x_j \ge 0,\ j = 1,2,\ldots,n \end{cases}$$

Или в сокращенной записи:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j \le b_i \\ x_{j\ge}0 \end{cases},$$

i=1, 2, …, *m*,
J=1, 2, …, *n*.

Ограничения стандартной формы задачи ЛП в матричном виде

Обозначим:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1.2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Тогда ограничения в матричном виде запишутся так:

$$\begin{cases} Ax \le b \\ x \ge 0 \end{cases}$$

Пример 2. Транспортная задача

На n станциях отправления $A_1, \ldots, A_n$ имеется, соответственно, $a_1, \ldots, a_n$ единиц некоторого груза. Этот груз следует доставить в m пунктов назначения $B_1, \ldots, B_m$, и в каждый из них должно быть завезено, соответственно, $b_1, \ldots, b_m$ единиц этого груза. Стоимость перевозки одной единицы груза из пункта A_i в пункт B_k равна $c_{i,k}$. Составить такой план перевозок, чтобы суммарная стоимость перевозок была минимальной. Считать, что количество всего груза на двух пунктах отправления равно потребности в грузе на всех трех пунктах назначения, то есть:

$$a_1 + \ldots + a_n = b_1 + \ldots + b_m.$$

Пример 2. Транспортная задача

Расположим исходные данные этой задачи в виде таблицы:

Пункт отправления	Пункт назначения			Запас груза
	B_1	…	B_m	
A_1	$c_{1,1}$	…	$c_{1, m}$	a_1
…	…	…	…	…
A_n	$c_{n,1}$	…	$c_{n,m}$	a_n
Потребность в грузе	b_1	…	b_m	

Пример 2. Транспортная задача

Обозначим: $x_{i,k}$ – количество перевезенного груза из пункта A_i в пункт B_k. Тогда ЦФ (которую нужно минимизировать) равна:

$$C = \sum_{i=1}^{2} \sum_{k=1}^{3} c_{i,k} x_{i,k}$$

Ограничения:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{3} x_{i,k} = a_i, i = 1,2 \\ \sum_{i=1}^{2} x_{i,k} = b_k, k = 1,2,3 \\ x_{i,k} \geq 0, i = 1,2; k = 1,2,3 \end{cases}$$

Запись ограничений транспортной задачи в матричном виде

Обозначим:

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,m} \\ & \dots & \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,m} \end{bmatrix}$$

Пусть t – вектор-столбец из единиц длины n,

q – вектор-столбец из единиц длины m. Тогда ограничения имею вид:

$$\begin{cases} X \cdot q = a \\ t^{T} \cdot X = b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

Решение задачи ЛП (на примере стандартной формы) в среде Mathcad

- Задание параметров задачи – присваиванием или вводом:

$$A := \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1.2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}, \; b := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

- Задание начального приближения: x:=0.
- Запись ЦФ: $C(x) := c \cdot x$
- Given

Ограничения: $Ax \le b$

$x \ge 0$

- Result:=Maximize(C,x) оптимальное решение задачи ЛП

См. https://gigabaza.ru/doc/80570.html и ЛР11.

Ограничение целочисленности *x* в среде Mathcad

Для некоторых версий MathCAD существует пакет расширения SOEP (Solving and Optimization Extension Pack), в котором имеется возможность уточнить тип результата - просто в завершающих функциях блока Given последним параметром ставится строка, указывающая тип переменной в системе уравнений. Местоположение целой переменной обозначается I, бинарной - B, и т.д.:

f(x1,x2)=5*x2-3*x1

Given

2x1+3x2≤5 x1≥0 x2≥0

Minimize (f,x1,x2,"II")

В базовой комплектации MathCAD нет инструментов для установления целочисленных ограничений.

НО можно самостоятельно разработать такой алгоритм!

См., например, http://blog.kislenko.net/show.php?id=974

Решение задачи ЛП в среде Matlab – функция linprog

x = linprog(C,A,b) решает min $c^T \cdot x$ таким образом, что $A \cdot x \le b$.

x = linprog(C,A,b,Aeq,beq) включает ограничения равенства $Aeq \cdot x = beq$. Установите A = [] и b = [] если никакие неравенства не существуют.

x = linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub) задает набор нижних и верхних границ на переменных проекта, x, так, чтобы решением всегда был в области значений $lb \le x \le ub$. Установите Aeq = [] и beq = [] если никакие равенства не существуют.

Функция linprog принадлежит пакету Optimization Toolbox, который требует дополнительной установки.