МАТЕМАТИКА

ТРИГОНОМЕТРИЯ

Наталья Владимировна Крупина

Москва, 2021

Выведем формулы синуса и косинуса двойного угла, используя формулы сложения.

1. $\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$. Итак,

$$\mathbf{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.} \qquad (1)$$

Задача 1 Вычислить $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha = -0{,}6$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

▶ По формуле (1) находим
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot(-0{,}6)\cdot\cos\alpha = -1{,}2\cos\alpha$.
Так как $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то $\cos\alpha < 0$, и поэтому

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-0{,}36} = -0{,}8.$$

Следовательно, $\sin 2\alpha = -1{,}2\cdot(-0{,}8) = 0{,}96$. ◁

2. $\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$. Итак,

$$\mathbf{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.} \qquad (2)$$

Задача 2 Вычислить $\cos 2\alpha$, если $\cos \alpha = 0{,}3$.

▶ Используя формулу (2) и основное тригонометрическое тождество, получаем

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) =$$
$$= 2\cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot (0{,}3)^2 - 1 = -0{,}82. \quad \triangleleft$$

Задача 3 Упростить выражение $\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha}$.

$$\blacktriangleright\ \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha)}=$$

$$=\frac{\sin 2\alpha}{2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)}=\frac{\sin 2\alpha}{2\cos 2\alpha}=\frac{1}{2}\operatorname{tg}2\alpha.\ \triangleleft$$

Задача 4 Вычислить $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$.

► Полагая в формуле $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$

$\beta = \alpha$, получаем

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}. \qquad (3)$$

Если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$, то по формуле (3) находим

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3}. \ \triangleleft$$

Задача 5* Вычислить $\sin 3\alpha$, если $\sin \alpha = \frac{1}{4}$.

▶ $\sin 3\alpha = \sin(\alpha + 2\alpha) = \sin \alpha \cos 2\alpha + \cos \alpha \sin 2\alpha =$
$= \sin \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + \cos \alpha \, 2 \sin \alpha \cos \alpha =$
$= \sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha + 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha =$
$= 3 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha = 3 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) -$
$- \sin^3 \alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha = \sin \alpha (3 - 4 \sin^2 \alpha)$.

При $\sin \alpha = \frac{1}{4}$ получаем $\sin 3\alpha = \frac{1}{4}\left(3 - \frac{1}{4}\right) = \frac{11}{16}$. ◁

Упражнения

Выразить синус, косинус или тангенс, используя формулы двойного угла (**498—499**).

498 1) $\sin 48°$; 2) $\cos 164°$; 3) $\operatorname{tg} 92°$; 4) $\sin \frac{4\pi}{3}$; 5) $\cos \frac{5\pi}{3}$.

499 1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$; 2) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)$; 3) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$;

4) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$; 5) $\sin\alpha$; 6) $\cos\alpha$.

Вычислить, не используя калькулятор (**500—502**).

500 1) $2\sin 15° \cdot \cos 15°$; 2) $\cos^2 15° - \sin^2 15°$;

3) $\frac{2\operatorname{tg}15°}{1-\operatorname{tg}^2 15°}$; 4) $(\cos 75° - \sin 75°)^2$.

501 1) $2\sin\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{8}$; 2) $\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}$;

3) $\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(\cos\frac{\pi}{8}+\sin\frac{\pi}{8}\right)^2$.

502 1) $2\sin 75^\circ\cdot\cos 75^\circ$; 2) $\cos^2 75^\circ-\sin^2 75^\circ$;

3) $\dfrac{6\operatorname{tg}75^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 75^\circ}$; 4) $\dfrac{\operatorname{tg}^2 22^\circ30'-1}{\operatorname{tg}22^\circ30'}$.

503 Вычислить $\sin 2\alpha$, если:

1) $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$; 2) $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

504 Вычислить $\cos 2\alpha$, если:

1) $\cos\alpha=\frac{4}{5}$; 2) $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$.

505 Вычислить $\operatorname{tg}2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=0{,}5$.

505 Вычислить $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}5$.

Упростить выражение (506—507).

506 1) $2 \cos 40° \cdot \cos 50°$; 2) $2 \sin 25° \cdot \sin 65°$;

3) $\sin 2\alpha + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2$; 4) $\cos 4\alpha + \sin^2 2\alpha$.

507 1) $\dfrac{\sin 2\alpha}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}$; 2) $\dfrac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}$.

508 Доказать тождество:

1) $\sin 2\alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1$;

2) $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha$;

3) $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos 2\alpha$; 4) $2 \cos^2 \alpha - \cos 2\alpha = 1$.

509 Вычислить $\sin 2\alpha$, если:

1) $\sin \alpha + \cos \alpha = \dfrac{1}{2}$; 2) $\sin \alpha - \cos \alpha = -\dfrac{1}{3}$.

510 Доказать тождество:

1) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha-1$; 2) $\dfrac{\sin 2\alpha-2\cos\alpha}{\sin\alpha-\sin^2\alpha}=-2\operatorname{ctg}\alpha$;

3) $\operatorname{tg}\alpha\,(1+\cos 2\alpha)=\sin 2\alpha$; 4) $\dfrac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$;

5) $\dfrac{(1-2\cos^2\alpha)(2\sin^2\alpha-1)}{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=\operatorname{ctg}^2 2\alpha$;

6) $1-2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)=\sin\alpha$; 7) $\dfrac{\sin\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$.

511 Доказать тождество

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha\,(1+\operatorname{ctg}\alpha)}-\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha\,(1+\operatorname{tg}\alpha)}=\frac{2\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin 2\alpha}.$$

512 Решить уравнение:

1) $\sin 2x-2\cos x=0$; 2) $\cos 2x+\sin^2 x=1$;

3) $4\cos x=\sin 2x$; 4) $\sin^2 x=-\cos 2x$;

5) $\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}=0$; 6) $\cos^2\dfrac{x}{2}=\sin^2\dfrac{x}{2}$.