# Решение СЛАУ матричным методом

# Матричный метод решения СЛАУ

**Матричный метод** – это метод решения через **обратную матрицу** квадратных (с числом уравнений, равным числу неизвестных) систем линейных алгебраических уравнений с ненулевым определителем.

# Пусть дана система линейных уравнений с $n$ неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

**Запишем ее в матричной форме:**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

***A*** **— основная матрица системы, состоящая из коэффициентов при неизвестных.**
***B*** **— вектор - столбец свободных членов (слагаемых)**
***X*** **— вектор – столбец решений системы**

# Запишем СЛАУ в виде матричного уравнения и решим его

$$AX = B$$

**Умножим это матричное уравнение слева на $A^{-1}$ — матрицу, обратную матрице $A$:**

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$

**Так как** $A^{-1}A = E$ по определению обратной матрицы, получаем

$$EX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B \qquad \text{где} \quad A^{-1} = 1/\Delta\,(A^*)^T,$$

$$\Delta \neq 0$$

$(A^*)^T$ **- транспонированная матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы $A$.**

# Пример

## Решить СЛАУ матричным методом:

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 4; \\ 2x - y + 5z = 23; \\ x + 7y - z = 5; \end{cases}$$

**Сначала убедимся в том, что определитель матрицы из коэффициентов при неизвестных СЛАУ не равен нулю.**

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 3 - 14 + 10 - 1 - 105 + 4 = -103;$$

# Вычислим алгебраические дополнения для элементов основной матрицы

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -34;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 7;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 15;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = -19;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 9;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -17;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7;$$

## Найдём союзную матрицу, транспонируем её и подставим в формулу для нахождения обратной матрицы

$$C^* = \begin{pmatrix} -34 & 7 & 15 \\ -5 & -2 & -19 \\ 9 & -17 & -7 \end{pmatrix}; \qquad (C^*)^T = \begin{pmatrix} -34 & -5 & 9 \\ 7 & -2 & -17 \\ 15 & -19 & -7 \end{pmatrix};$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (C^*)^T$$

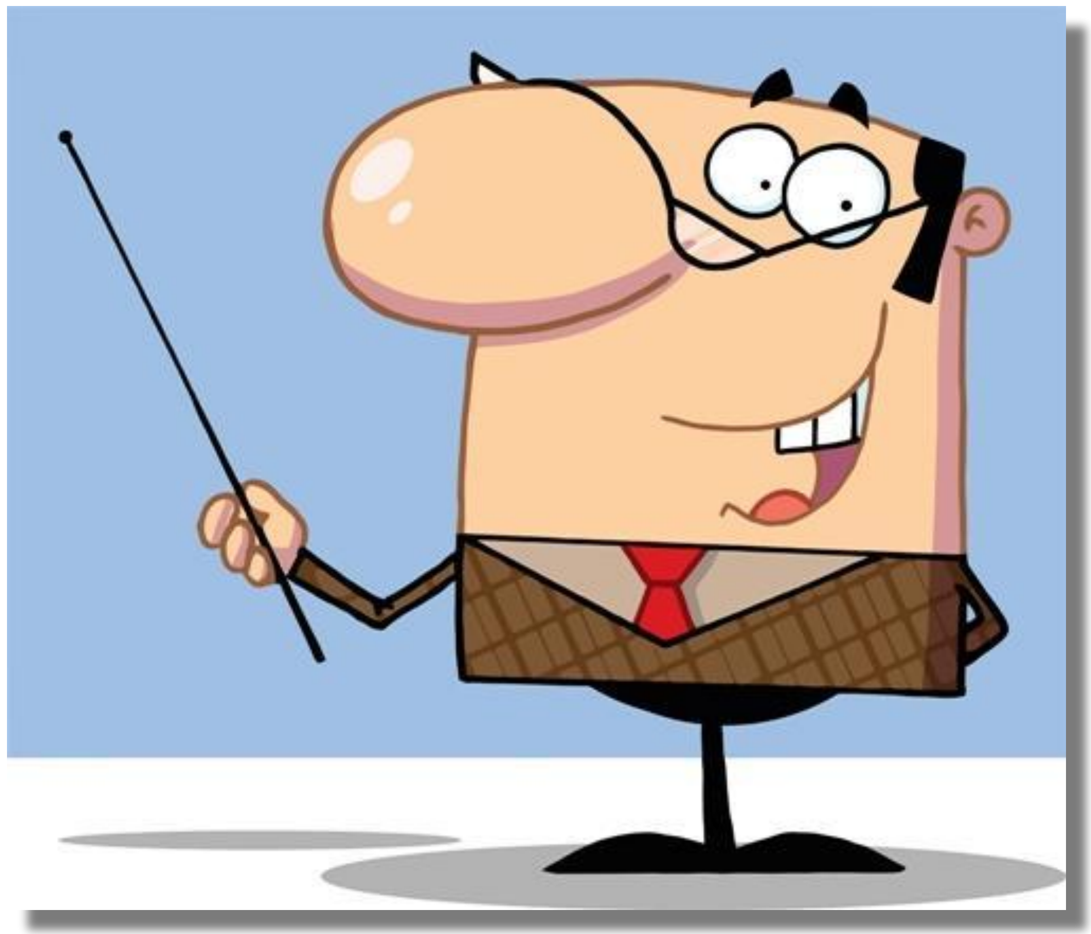
$$A^{-1} = \frac{1}{-103} \cdot \begin{pmatrix} -34 & -5 & 9 \\ 7 & -2 & -17 \\ 15 & -19 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{34}{103} & \frac{5}{103} & -\frac{9}{103} \\ -\frac{7}{103} & \frac{2}{103} & \frac{17}{103} \\ -\frac{15}{103} & \frac{19}{103} & \frac{7}{103} \end{pmatrix};$$

# Найдем неизвестные, перемножив обратную матрицу и столбец свободных членов

$$X = A^{-1} \cdot B;$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{34}{103} & \frac{5}{103} & -\frac{9}{103} \\ -\frac{7}{103} & \frac{2}{103} & \frac{17}{103} \\ -\frac{15}{103} & \frac{19}{103} & \frac{7}{103} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 23 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ответ: x=2; y=1; z=4.



# Самостоятельная работа

**1 вариант**

**Решить СЛАУ:**

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases}$$

**2 вариант**

**Решить СЛАУ:**

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_3 = -8 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

# Домашнее задание

**Решить СЛАУ:**

$$\begin{cases} 3x - 2y + 3z = 5, \\ x - 5y + 2z = 3, \\ 2x + 3y + z = 0. \end{cases}$$