



22.5. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Введем понятие производной ФКП.

Пусть независимой переменной

$$z = x + i \cdot y$$

дано приращение

$$\Delta z = \Delta x + i \cdot \Delta y$$

Приращение функции $w=f(x)$:

$$\Delta \omega = f(z + \Delta z) - f(z)$$





Если существует предел отношения $\frac{\Delta \omega}{\Delta z}$ при $\Delta z \rightarrow 0$ по любому закону, то этот предел называется производной функции $f(z)$ в точке z :

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta z}$$

Обозначают: $f'(z)$, ω' , $\frac{d\omega}{dz}$, $\frac{df}{dz}$





Требование существования предела отношения

$$\frac{\Delta \omega}{\Delta z}$$

и его независимость от закона стремления к нулю приращения переменной, накладывает на функцию более сильные ограничения, чем в случае функции действительного переменного.

Для функции действительного аргумента предел существует при приближении точки $x + \Delta x$ к точке x по двум направлениям (слева и справа).

Для функции комплексного переменного точка $z + \Delta z$ должна приближаться к точке z по любому пути, и пределы по всем направлениям должны быть одинаковы.





Пусть

$$f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$$

$$\Delta z = \Delta x + i \cdot \Delta y$$

тогда

$$\begin{aligned} \Delta \omega &= f(z + \Delta z) - f(z) = u(x + \Delta x; y + \Delta y) - \\ &\quad - u(x, y) + i(v(x + \Delta x; y + \Delta y) - v(x, y)) = \\ &= \Delta u + i \cdot \Delta v \end{aligned}$$

где

$$\Delta u = u(x + \Delta x; y + \Delta y) - u(x, y)$$

$$\Delta v = v(x + \Delta x; y + \Delta y) - v(x, y)$$




Тогда

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta u + i \cdot \Delta v}{\Delta x + i \cdot \Delta y}$$

Если функция дифференцируема в точке z , то этот предел существует и не зависит от закона стремления $\Delta z \rightarrow 0$

Если $\Delta z = \Delta x$, то есть точка $z + \Delta z$ приближается к точке z по прямой, параллельной оси x , то

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i \cdot \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + i \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$





Если $\Delta z = i\Delta y$, то есть точка $z + \Delta z$ приближается к точке z по прямой, параллельной оси y , то

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i \cdot \Delta v}{i \cdot \Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta u}{i \cdot \Delta y} + \frac{\Delta v}{\Delta y} \right) = \frac{\partial v}{\partial y} - i \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$$

Так как

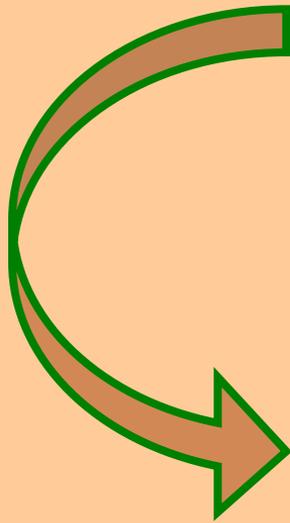
$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta z}$$

не должен зависеть от закона стремления $\Delta z \rightarrow 0$

то




$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$$



$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

условия Коши-Римана





Это необходимое условие дифференцируемости ФКП.
Оно должно выполняться в любой точке, в которой
функция $f(z)$ дифференцируема.

*Если функция комплексного аргумента
однозначна и дифференцируема не только
в данной точке, но и в некоторой
окрестности этой точки, то она
называется аналитической в данной точке.*





Функция, дифференцируемая во всех точках некоторой области, называется аналитической в данной области.

Точки плоскости z , в которых функция $f(z)$ аналитична, называются правильными точками этой функции.

Точки плоскости z , в которых функция $f(z)$ неаналитична, называются особыми точками.





ПРИМЕРЫ.

Выяснить, являются ли данные функции аналитическими:

1

$$\omega = z^2$$

2

$$\omega = e^z$$

3

$$\omega = \bar{z}$$




1

$$\omega = z^2$$


$$u + i \cdot v = (x + i \cdot y)^2 = x^2 - y^2 + 2i \cdot x \cdot y$$

$$u = x^2 - y^2$$

$$v = 2x \cdot y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Условия Коши-Римана выполняются во всех точках плоскости, следовательно функция является аналитичной на всей плоскости.





2

$$\omega = e^z$$


$$u + i \cdot v = e^{x+i \cdot y} = e^x \cdot (\cos y + i \cdot \sin y)$$

$$u = e^x \cdot \cos y$$

$$v = e^x \cdot \sin y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cdot \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \cdot \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Условия Коши-Римана выполняются во всех точках плоскости, следовательно функция является аналитичной на всей плоскости.





3

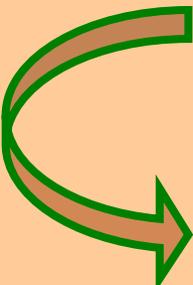
$$\omega = \bar{z}$$

$$u + i \cdot v = x - i \cdot y$$

$$u = x$$

$$v = -y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1$$



**Условия Коши-Римана не выполняются,
следовательно функция не является аналитичной
ни в одной точке плоскости.**

