

Методы решения логарифмических уравнений

Основные сведения о логарифмах.

Логарифм

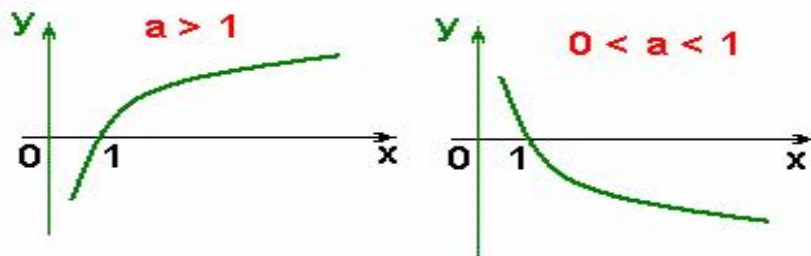
$$\log_a x = b, \text{ если } a^b = x$$

$$\log_a a^b = b$$

$$a^{\log_a x} = x$$

Логарифмическая функция

$$y = \log_a x \quad a > 0, a \neq 1$$



$$\lg x = \log_{10} x$$

$$\ln x = \log_e x$$

$$e = 2,71828\dots$$

$$e^{\ln x} = x$$

$$e^{x \ln a} = a^x$$

$$\ln e^x = x$$

Свойства

$$1) \log_a x y = \log_a x + \log_a y$$

$$2) \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$3) \log_a x^p = p \cdot \log_a x$$

$$4) \log_a 1 = 0$$

$$5) \log_a a = 1$$

$$6) \log_{a^n} x = \frac{1}{n} \log_a x$$

$$7) \log_{a^n} a^m = \frac{m}{n}$$

$$8) \log_{\left(\frac{1}{a}\right)^n} a^m = -\frac{m}{n}$$

$$9) \log_{a^n} \left(\frac{1}{a}\right)^m = -\frac{m}{n}$$

$$10) \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$



Методы решения логарифмических уравнений

- 1. Решение уравнений по свойствам логарифма.*
- 2. Решение уравнений по определению логарифма*
- 3. Решение уравнений заменой переменной.*

Решение логарифмического уравнения по определению логарифма

1. Решите уравнение: $2^{\log_2(x-17)} = 13$

Решение уравнения:	Пояснения и применяемые формулы:
$2^{\log_2(x-17)} = 13$	$a^{\log_a b} = b$
$x - 17 = 13$	Перенесём число 2 в правую часть
$x = 13 + 17 = 30$	Сделаем проверку
$2^{\log_2(30-17)} = 13$	Посчитаем в скобках
$2^{\log_2 13} = 13$	$a^{\log_a b} = b$
$13 = 13$	Верно

Ответ: $x = 30$

Решение логарифмического уравнения по определению логарифма

3. Решите уравнение: $\lg x = -3$

Решение уравнения:	Пояснения и применяемые формулы:
$\lg x = -3$	$\lg 10^b = b$
$\lg x = \lg 10^{-3}$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
$\lg x = \lg \frac{1}{10^3}$	Левая и правая часть уравнения приведена к логарифму по одному основанию
$x = \frac{1}{10^3}$	

Ответ: $x = 0,001$

Решение логарифмического уравнения по определению

логарифма

4. Решите уравнение: $\log_7(5 - x) = 3$

Решение уравнения:	Пояснения и применяемые формулы:
$\log_7(5 - x) = 3$	$\log_a a^b = b$
$\log_7(5 - x) = \log_7 7^3$	Возведём 7 в куб
$\log_7(5 - x) = \log_7 343$	Левая и правая часть уравнения приведена к логарифму по одному основанию
$5 - x = 343,$	Решим линейное уравнение
$-x = 343 - 5$	Неизвестные оставим в левой части, числа переносим вправо
$-x = 338$	Умножим все части на (-1)
$x = -338$	

Решение логарифмического уравнения по свойствам логарифма

5. Решите уравнение: $\log_3(x+1) + \log_3(x+3) = 1$

Решение уравнения:	Пояснения и применяемые формулы:
$\log_3(x+1) + \log_3(x+3) = 1$	$\log_a x + \log_a y = \log_a(x \cdot y)$
$\log_3(x+1)(x+3) = 1$	$\log_a a = 1$
$\log_3(x+1)(x+3) = \log_3 3$	Левая и правая часть уравнения приведена к логарифму по одному основанию
$(x+1)(x+3) = 3$	Раскроем скобки
$x^2 + 3x + x + 3 = 3$	Приведём подобные
$x^2 + 4x + 3 - 3 = 0$	Перенесём все слагаемые в лево
$x^2 + 4x = 0$	Решим неполное квадратное уравнение

Решение логарифмического уравнения по свойствам логарифма

Решение уравнения:	Пояснения и применяемые формулы:
$x^2 + 4x = 0$	Вынесем за скобки общий множитель
$x(x + 4) = 0$	Произведение равно нулю, когда хотя бы один из множителей равен нулю
$x = 0$ или	
$x + 4 = 0, x = -4$	
$x = 0$	Сделаем проверку
$\log_3(0 + 1) + \log_3(0 + 3) = 1$	
$\log_3 1 + \log_3 3 = 1$	$\log_a 1 = 0, \log_a a = 1$
$0 + 1 = 1, 1 = 1$	Верно
$x = -4$	Посторонний корень
$\log_3(-4 + 1) = \log(-3)$	Не существует логарифма от отрицательного числа.

Решение логарифмического уравнения по свойствам логарифма

6. Решите уравнение: $\lg(x^2 + 2x - 7) - \lg(x - 1) = 0$

Решение уравнения:	Пояснения и применяемые формулы:
$\lg(x^2 + 2x - 7) - \lg(x - 1) = 0$	$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$
$\lg \frac{x^2 + 2x - 7}{x - 1} = 0$	$\log_a 1 = 0$
$\lg \frac{x^2 + 2x - 7}{x - 1} = \lg 1$	Левая и правая часть уравнения приведена к логарифму по одному основанию
$\frac{x^2 + 2x - 7}{x - 1} = 1$	Применим свойство пропорции
$x^2 + 2x - 7 = x - 1$	Перенесём все слагаемые влево
$x^2 + 2x - 7 - x + 1 = 0$	Приведём подобные
$x^2 + x - 6 = 0$	Решим квадратное уравнение

Решение логарифмического уравнения по свойствам логарифма

Решение уравнения:	Пояснения и применяемые формулы:
$x^2 + x - 6 = 0$	$a = 1, b = 1, c = -6$
$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25$	$D = b^2 - 4ac$
$x_1 = \frac{-1 - 5}{2 \cdot 1} = \frac{-6}{2} = -3$	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
$x_2 = \frac{-1 + 5}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2$	
$x = 2$	Сделаем проверку
$\lg(2^2 + 2 \cdot 2 - 7) - \lg(2 - 1) = 0$	
$\lg 1 - \lg 1 = 0, 0 = 0$	Верно
$x = -3$	Посторонний корень
$\lg(-3 - 1) = \lg(-4)$	Не существует логарифма от отрицательного числа.

Ответ: $x = 2$

Решение логарифмического уравнения введением новой

переменной

7. Решите уравнение:

$$\log_3^2 x - \log_3 x - 2 = 0$$

Решение уравнения:	Пояснения и применяемые формулы:
$\log_3^2 x - \log_3 x - 2 = 0$	Обозначим: $\log_3 x = t$
$t^2 - t - 2 = 0$	Решим квадратное уравнение
$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$	$D = b^2 - 4ac$
$t_1 = \frac{1-3}{2 \cdot 1} = \frac{-2}{2} = -1$	$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
$t_2 = \frac{1+3}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2$	
$\log_3 x = -1$ $\log_3 x = 2$	$\log_a a^b = b$
$\log_3 x = \log_3 3^{-1}$ $\log_3 x = \log_3 3^2$	Левая и правая часть уравнения приведена к логарифму по одному основанию
$x = 3^{-1} = \frac{1}{3}$ $x = 3^2 = 9$	

Ответ: $x_1 = 1/3, x_2 = 9.$

Решите уравнения:

1. $4^{\log_4(x+7)} = 11$

2. $\log_3(5x-1) = 2$

3. $\log_5(x-1) + \log(x-2) = \log(x+2)$

4. $\log_2^2 x - 3 \log_2 x - 4 = 0$

5. $\log_2 x - \log_{\frac{1}{2}} x = 4$

1. $2^{\log_2(x-15)} = 4$

2. $\log_4(5+2x) = 3$

3. $\lg^2 x + \lg x + 6 = 0$

4. $\log_{23}(2x-1) - \log_{23} x = 0$

5. $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$

Гимнастика для глаз

- ❖ **Сильно зажмурьте глаза, откройте глаза и посмотрите на предмет перед Вами (повторите 5 раз).**
- ❖ **Закройте глаза, откройте глаза, посмотрите направо, посмотрите налево (повторите 5 раз).**
- ❖ **Сильно зажмурьте глаза, откройте глаза и посмотрите на предмет вдали от вас (повторите 5 раз).**



Логарифмическая спираль

Уравнение логарифмической спирали

$$\rho = a^\varphi, \text{ где } a > 0$$

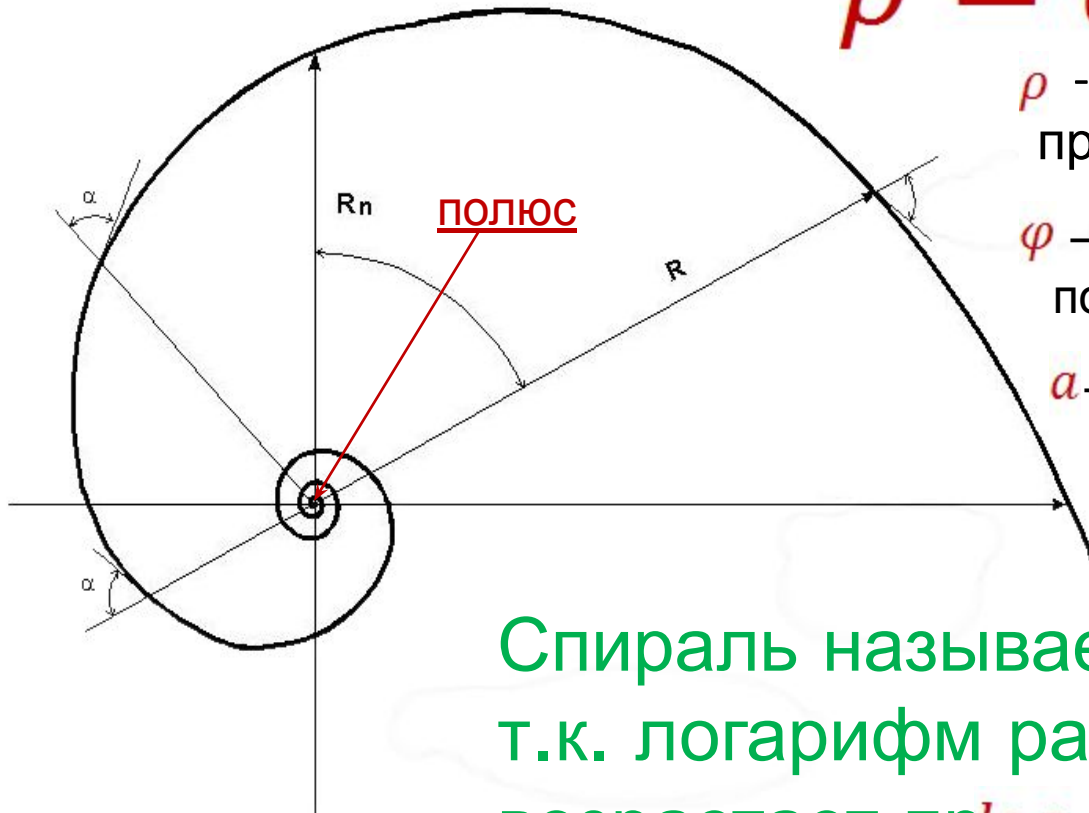
ρ - расстояние от полюса до произвольной точки на спирали

φ - угол поворота относительно полюса

a - постоянная

или

$$\varphi = \log_a \rho$$

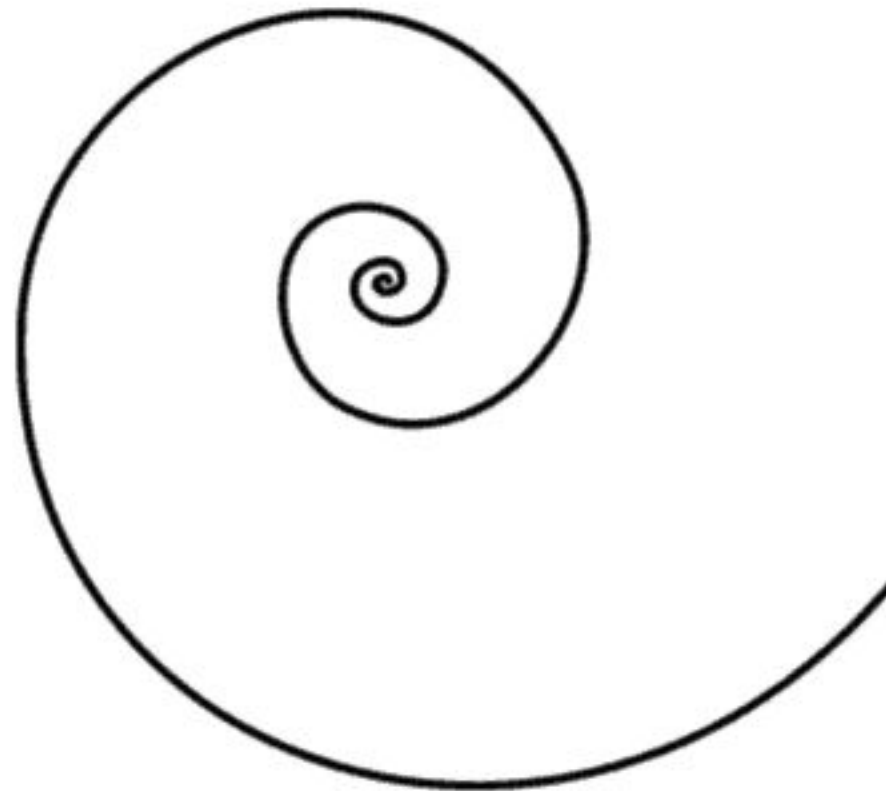


Спираль называется логарифмической, т.к. логарифм расстояния () возрастает пропорционально углу поворота

φ

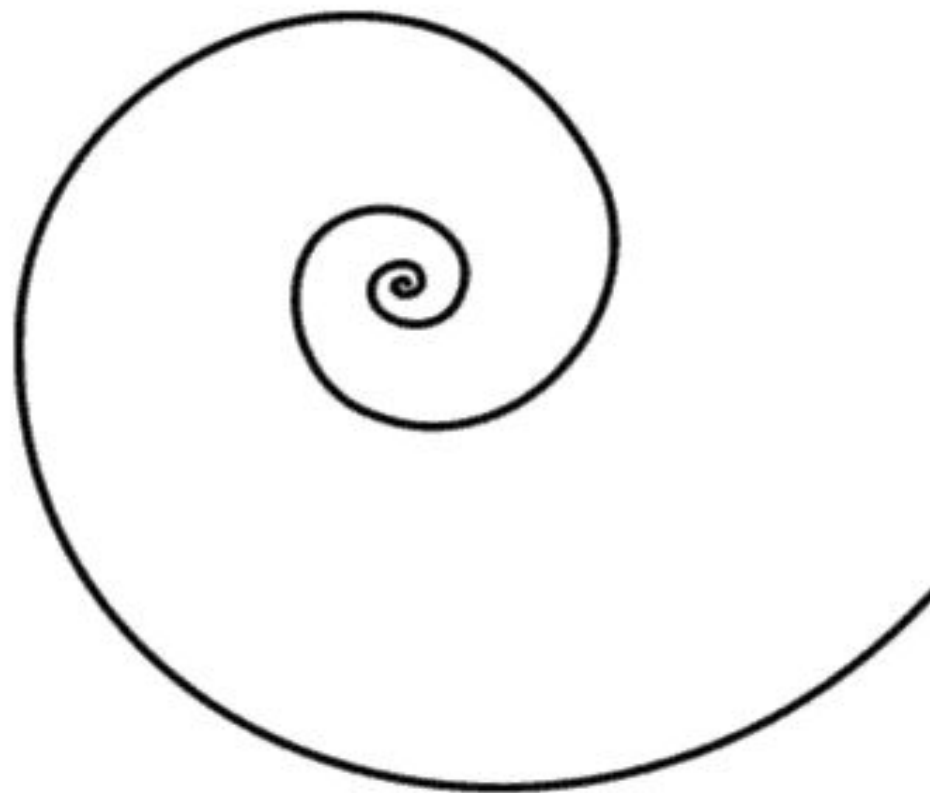
СВОЙСТВО:

Если вращать спираль вокруг полюса по часовой стрелке, то можно наблюдать кажущееся **растяжение** спирали.



СВОЙСТВО:

Если вращать спираль
вокруг полюса против
часовой стрелки, то
можно наблюдать
кажущееся *сжатие*
спирали.



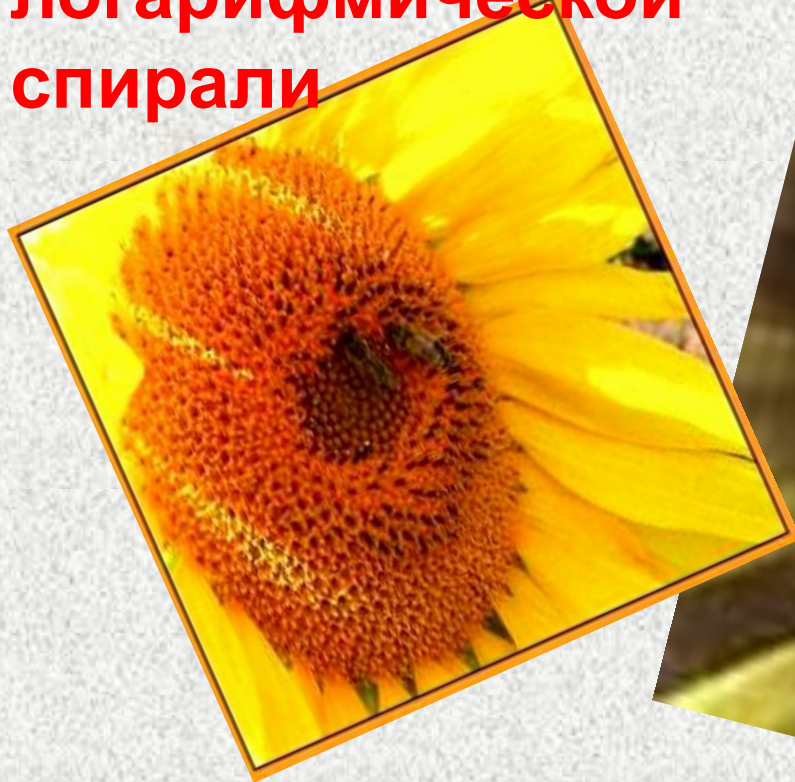


Логарифмы в природе

Спирали широко проявляют себя в живой природе. **Спирально** закручиваются усики растений, по **спирали** происходит рост тканей в стволах деревьев.



В подсолнухе
семечки
расположены по
дугам, близким к
логарифмической
спирали



Рога животных растут
лишь с одного конца.
Этот рост осуществляется
по **логарифмической
спирали**. Например, рога
баранов, коз, антилоп и
других рогатых
животных.



Раковины морских животных могут расти лишь в одном направлении. Чтобы не слишком вытягиваться в длину, им приходится скручиваться, причем каждый следующий виток подобен предыдущему. Поэтому раковины многих моллюсков, улиток, закручены **по логарифмической спирали**.





**По логарифмической спирали
формируется тело циклона**



***Всем спасибо
за работу на уроке!***

**Удачи
в освоении
математики**

