Показательные неравенства

Показательными неравенствами называют неравенства вида

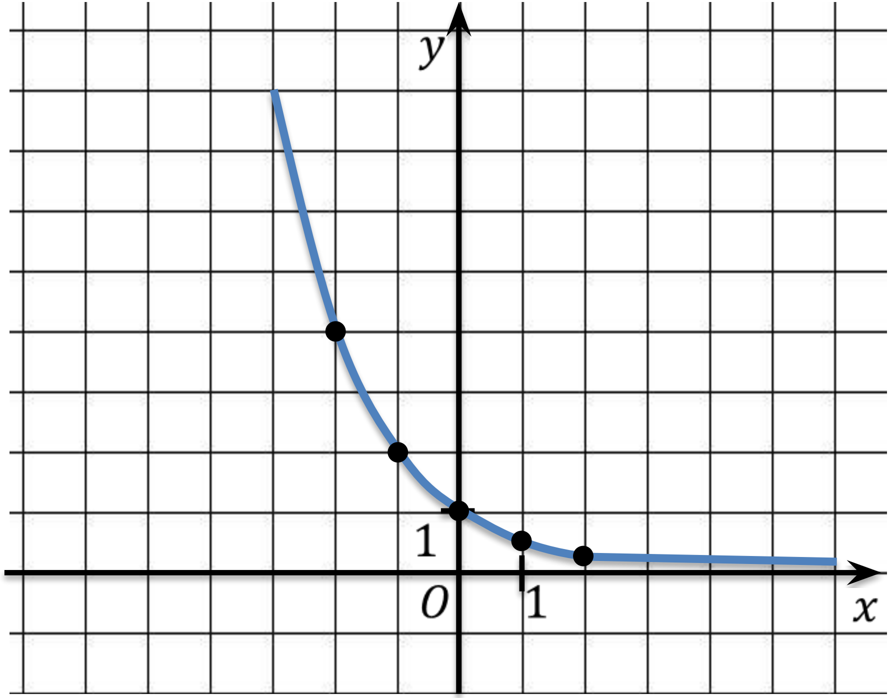
$$a^{f(x)} > a^{g(x)}, a > 0, a \neq 1,$$

и неравенства, сводящиеся к этому виду.

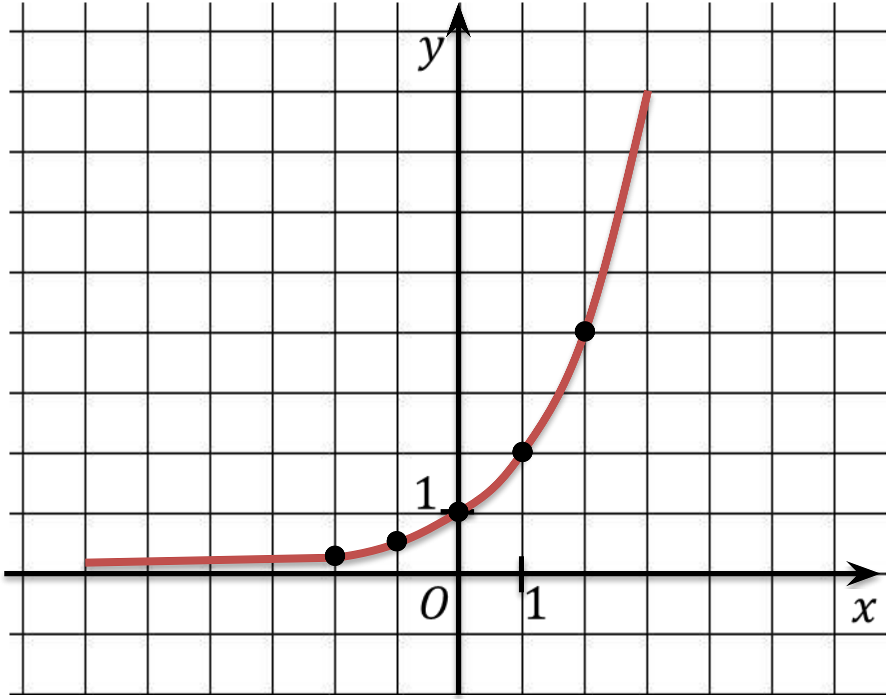
Функцию вида $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$, называют **показательной функцией**.

Возрастает	Убывает
Непрерывна	Непрерывна

$y = a^x, 0 < a < 1$



$y = a^x, a > 1$



Экспонент
а

•

Возрастает Убывает

Непрерывна Непрерывна

Теорема 2. Если $a > 1$, то показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству того же смысла: $f(x) > g(x)$.

Если $0 < a < 1$, то показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству противоположного смысла: $f(x) < g(x)$.

Пример:

Решить неравенство $3^{2x-4} \leq 27$.

Решение:

$27 = 3^3$

$3 > 1$

$3^{2x-4} \leq 3^3 \Leftrightarrow 2x - 4 \leq 3$

$2x \leq 7$

$x \leq 3{,}5$

Ответ: $x \leq 3{,}5$.

Пример:

Решить неравенство $0{,}9^{x^2-4x} < \left(\frac{10}{9}\right)^3$.

Решение:

$$\left(\frac{10}{9}\right)^3 = \left(\left(\frac{9}{10}\right)^{-1}\right)^3 = 0{,}9^{-3}$$

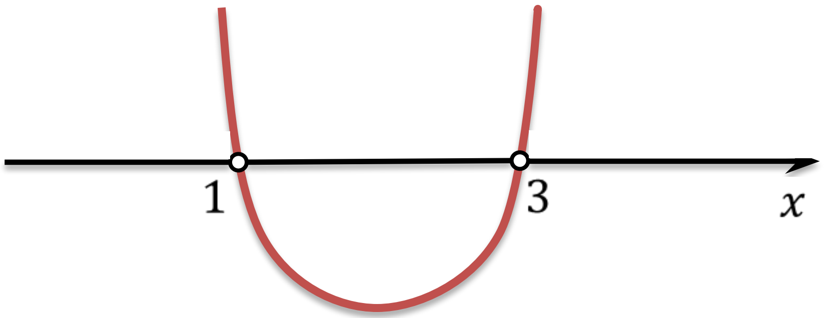
$$0{,}9 < 1$$

$$0{,}9^{x^2-4x} < 0{,}9^{-3} \Leftrightarrow x^2 - 4x > -3$$

$$x^2 - 4x + 3 > 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1;\ x_2 = 3$$

$$x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$$



Ответ: $x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$.

Пример:

Решить неравенство $19^{\frac{2x-3}{x+2}} \geq 1$.

Решение:

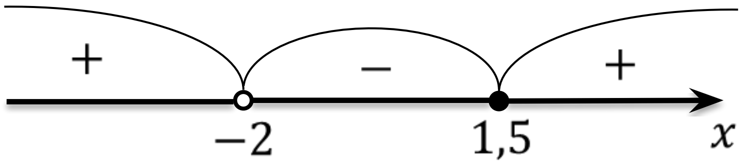
$1 = 19^0$

$19 > 1$

$$19^{\frac{2x-3}{x+2}} \geq 19^0 \Leftrightarrow \frac{2x-3}{x+2} \geq 0$$

$$\frac{2x-3}{x+2} = 0 \Leftrightarrow x \neq -2, x = 1{,}5$$

$x \in (-\infty; -2) \cup [1{,}5; +\infty)$



Ответ: $x \in (-\infty; -2) \cup [1{,}5; +\infty)$.

Пример:

Решить неравенство $7^x \geq 2^x$.

Решение:

$$7^x \geq 2^x \Leftrightarrow \frac{7^x}{2^x} \geq 1 \Leftrightarrow \left(\frac{7}{2}\right)^x \geq 1$$

$$1 = \left(\frac{7}{2}\right)^0$$

$$\frac{7}{2} > 1$$

$$\left(\frac{7}{2}\right)^x \geq \left(\frac{7}{2}\right)^0 \Leftrightarrow x \geq 0$$

Ответ: $x \geq 0$.

Пример:

Решить неравенство $3^{2x-1} - 3^{2x-3} < \frac{8}{3}$.

Решение:

$$3^{2x-1} = \frac{3^{2x}}{3}; \;\; 3^{2x-3} = \frac{3^{2x}}{3^3} = \frac{3^{2x}}{27}$$

$$3^{2x-1} - 3^{2x-3} < \frac{8}{3} \Leftrightarrow \frac{3^{2x}}{3} - \frac{3^{2x}}{27} < \frac{8}{3} \Leftrightarrow 9 \cdot 3^{2x} - 3^{2x} < 9 \cdot 8$$

$$8 \cdot 3^{2x} < 9 \cdot 8 \Leftrightarrow 3^{2x} < 3^2$$

$$3 > 1$$

$$3^{2x} < 3^2 \Leftrightarrow 2x < 2 \Leftrightarrow x < 1$$

Ответ: $x < 1$.

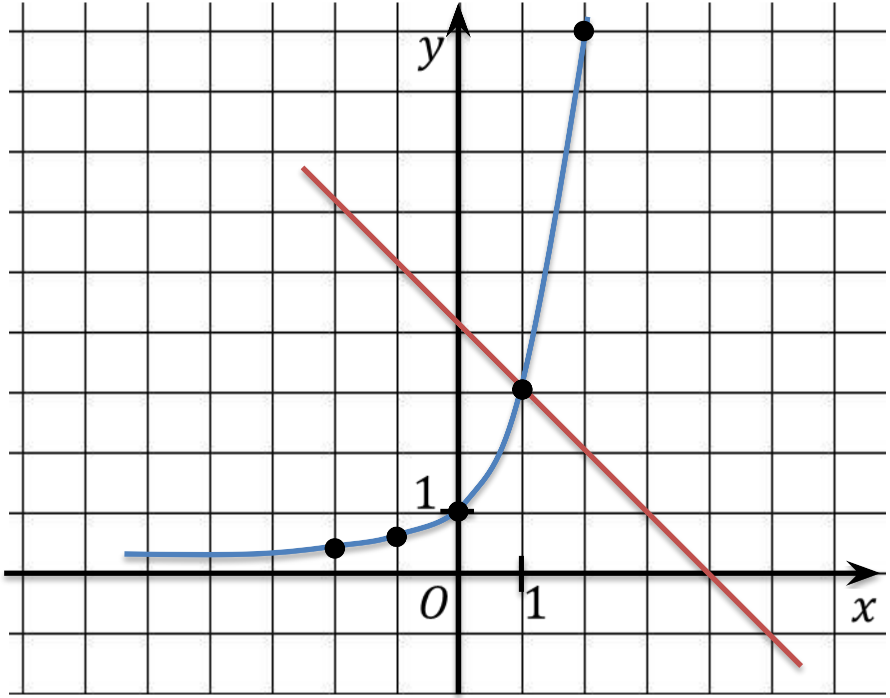
Пример:

Решить неравенство $3^x \geq -x + 4$.

Решение:

$y = 3^x$

$y = -x + 4$



Ответ: $x \geq 1$.