Теорія ймовірностей, ймовірнісні процеси і математична статистика

5,6 ПЗ. ДИСКРЕТНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ:

Тема 1. Числові характеристики.
Тема 2. Закони розподілу.

Определение дискретной случайной величины

Случайной называется величина, которая принимает в результате испытания то или иное (но при этом только одно) возможное значение, заранее неизвестное, меняющееся от испытания к испытанию и зависящее от случайных обстоятельств.

Дискретными называются случайные величины, которые принимают конечное или бесконечное счетное множество значений.

Определение закона распределения

Законом распределения (*рядом распределения*) *дискретной случайной величины* называется соответствие, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и их вероятностями:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_{n-1}	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_{n-1}	p_n

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Определение многоугольника распределения

Многоугольником или *полигоном распределения* дискретной случайной называется ломаная линия, соединяющая точки *Mi* (*xi*, *pi*).

Определение функции распределения

Функция распределения случайной величины *F*(x) определяет вероятность того, что случайная величина *X* примет значение, меньше фиксированного действительного числа x, т.е.

$$F(x) = P(X < x).$$

Функция *F*(x) также называется *интегральной функцией распределения* или *интегральным законом распределения*.

Построение функции распределения

На основе закона распределения можно построить ***функцию распределения*** дискретной случайной величины X.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le x_1, \\ p_1, & \text{если} \quad x_1 < x \le x_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \sum\limits_{i=1}^{n-1} p_i, & \text{если} \quad x_{n-1} < x \le x_n, \\ 1, & \text{если} \quad x > x_n. \end{cases}$$

Свойства функции распределения:

- $0 \le F(x) \le 1.$
- Функция распределения *F*(x) – неубывающая, непрерывная слева функция, определенная на всей числовой оси, при этом $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)=1.$
- Вероятность попадания случайной величины *X* в интервал равна:

$$P(x_1 \le X < x_2) = P(x_1 < X \le x_2) = P(x_1 \le X \le x_2) = P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

- Если случайная величина *X* принимает все значения на отрезке [x1,x2], то

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le x_1 \\ F(X), & \text{если } x_1 < x \le x_2 \\ 1, & \text{если } x > x_2 \end{cases}.$$

Тема 1. Числові характеристики дискретної випадкової величини

Числовые характеристики дискретной случайной величины:

- Математическое ожидание
- Дисперсия
- Среднеквадратическое отклонение
- Мода

Математическое ожидание

Математическое ожидание *дискретной случайной величины* равно сумме произведений значений случайной величины на их вероятности:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i ,$$

где *xi* – значение дискретной случайной величины, *pi* – вероятность того, что случайная величина примет значение *xi*, *n* – количество значений случайной величины.

Математическое ожидание характеризует **среднее значение** случайной величины.

Дисперсия

Дисперсией случайной величины *X* называется математическое ожидание квадрата ее отклонения от математического ожидания и равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины и квадратом ее математического ожидания:

$$D(X)=M(X^2)-(MX)^2.$$

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i-(MX)^2.$$

Дисперсия характеризует **степень рассеяния значений** случайной величины относительно ее математического ожидания.

Среднее квадратическое отклонение

Недостатком дисперсии является то, что ее размерность равна квадрату размерности случайной величины. Этого недостатка лишена характеристика рассеяния ***среднее квадратическое отклонение***, которое равно арифметическому квадратному корню из дисперсии

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Мода

Модой *(Мо)* называется среднее значение случайной величины, которое встречается **чаще** всего, то есть имеет максимальную вероятность.

Тема 2. Закони розподілу дискретної випадкової величини

Законы распределения дискретной случайной величины:

- Биномиальный
- Геометрический
- Гипергеометрический

Биномиальный закон распределения

Пусть случайная величина *X* есть число появлений события *A* в *n* независимых испытаниях. Вероятность появления события *A* в каждом испытании постоянна и равна *p*. Значениями случайной величины *X* являются целые числа 0, 1, 2,..., *n*. Это означает, что случайная величина *X* – *дискретная*.

Вероятность каждого значения случайной величины *X* вычисляется по формуле Бернулли:

$$P(X=k)=P_n(k)=C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k},$$

где $q = 1 - p$, $k = 0,1,2,\ldots, n$.

Биномиальный закон распределения

Закон распределения данной случайной величины *X* называется *биномиальным законом*, т.к. вероятности возможных ее значений равны элементам разложения бинома Ньютона $(q+p)^n$.

Биномиальный закон может быть задан в виде ряда распределения:

X	$X=0$	$X=1$	…	$X=k$	…	$X=n-1$	$X=n$
P	q^n	$n\,p^1q^{n-1}$		$C_n^k p^k q^{n-k}$		$n\,p^{n-1}q^1$	p^n

Числовые характеристики биномиальной случайной величины

- математическое ожидание $M(X) = np$,
- дисперсия $D(X) = npq$,
- среднее квадратическое отклонение $\sigma(X) = \sqrt{npq}$,
- модой является найвероятнейшая частота появления события А.

Геометрический закон распределения

Пусть производятся независимые испытания, в каждом из которых вероятность появления события *A* равна *p* ($0<p<1$), а вероятность его непоявления $q = 1 - p$.

Испытания заканчиваются, как только появится событие *A*.

Обозначим через *X* дискретную случайную величину – число испытаний, которые нужно провести до первого появления события *A*.

Таким образом, если событие *A* появилось в *k*-м испытании, то в предшествующих k-1 испытаниях оно не появилось.

Вероятность этого «сложного события», по теореме умножения вероятностей независимых событий, равна

$$P(X = k) = q^{k-1}p.$$

Геометрический закон распределения

Закон распределения данной случайной величины *X* называется *геометрическим законом*.

Геометрический закон может быть задан в виде ряда распределения:

X	$X=1$	$X=2$	$X=3$	…	$X=k$	…
P	p	qp	q^2p	…	$q^{k-1}p$	…

Вероятности ряда распределения геометрического закона образуют убывающую геометрическую прогрессию с первым членом p и знаменателем q $(0<q<1)$.

Действительно, полагая, что $k=1,2,\ldots$ получим $p, qp, q^2p, \ldots, q^{k-1}p, \ldots$

Числовые характеристики геометрической случайной величины

- математическое ожидание $M(X) = \dfrac{1}{p}$,
- дисперсия $D(X) = \dfrac{q}{p^2}$,
- среднее квадратическое отклонение $\sigma(X) = \sqrt{\dfrac{q}{p^2}}$,

где $q = 1 - p$.

Гипергеометрический закон распределения

Пусть в корзине из N шаров имеется M белых ($M<N$). Из корзины случайно отбирают n шаров (каждый шар может быть извлечен с одинаковой вероятностью), причем отобранный шар перед отбором следующего не возвращается в корзину (поэтому формула Бернулли здесь неприменима).

Обозначим через X случайную величину – число k белых шаров среди n отобранных. Очевидно, возможные значения X таковы: $0,1,2,\ldots,min(M,n)$.

Найдем вероятность того, что $X = m$, т.е. что среди n отобранных шаров ровно m белых. Используем для этого классическое определение вероятности.

Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь n шаров из N шаров, т.е. числу сочетаний C_N^n.

Гипергеометрический закон распределения

Найдем число исходов, благоприятствующих событию *X* = *m* (среди взятых *n* шаров ровно *m* белых):

m белых шаров можно извлечь из *M* белых шаров C_M^m способами;

при этом остальные *n* - *m* шаров должны быть другого цвета; выбрать же *n* - *m* шаров другого цвета из *N* - *M* шаров другого цвета можно C_{N-M}^{n-m} способами.

Следовательно, число благоприятствующих исходов равно по правилу умножения $C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}$

Гипергеометрический закон распределения

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию $X = m$, к числу всех элементарных исходов

$$P(X = m) = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}.$$

Данная формула определяет распределение вероятностей, которое называется *гипергеометрическим*.

Числовые характеристики гипергеометрической случайной величины

- математическое ожидание $M(X)=n\dfrac{M}{N},$
- дисперсия $D(X)=n\dfrac{M}{N-1}\left(1-\dfrac{M}{N}\right)\left(1-\dfrac{n}{N}\right),$
- среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$

Задание

Самостоятельное решение типовых задач вручную и средствами Excel / MathCad по вариантам из списка

4 типовые задачи

Решение индивидуальных задач вручную

10 инд. задач

Контрольная работа по задачам всех пройденных тем на следующем пз (3-4 задачи)