РЕШЕНИЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ И ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ ВЫСОКОГО УРОВНЯ СЛОЖНОСТИ

Утверждение 1 . Знак выражения $\log_{a(x)} f(x)$ совпадает со знаком произведения $(a(x)-1)(f(x)-1)$ в ОДЗ.

Утверждение 2 . Знак разности $\log_{a(x)} f(x) - \log_{a(x)} g(x)$ совпадает со знаком произведения $(a(x)-1)(f(x)-g(x))$ в ОДЗ.

Утверждение 3 . Знак разности $a(x)^{f(x)} - a(x)^{g(x)}$ совпадает со знаком $(a(x)-1)(f(x)-g(x))$ в ОДЗ.

Утверждение 4 . Если $g(x) \geq 0,$ то знак разности $|f(x)| - g(x)$ совпадает со знаком $(|f(x)| - g(x))(|f(x)| + g(x))$

*Пример*1 . Решите неравенство:

$$\frac{\log_{9^{x-6}}(x+2)}{\log_{9^{x-6}} x^2} < 1.$$

Решение. Перепишем неравенство в равносильном виде:

$$\frac{\log_{9^{x-6}}(x+2) - \log_{9^{x-6}} x^2}{\log_{9^{x-6}} x^2} < 0.$$

Воспользуемся утверждениями 1 и 2:

$$\begin{cases} \dfrac{(9^{x-6}-1)(x+2-x^2)}{(9^{x-6}-1)(x^2-1)} < 0, \\ x+2>0, \\ 9^{x-6} \neq 1, \\ x^2 \neq 1, \\ x \neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{(x-1)(x+1)} > 0, \\ x > -2, \\ x \neq 6, \\ x \neq \pm 1, \\ x \neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-2}{x-1} > 0, \\ x > -2, \\ x \neq 6, \\ x \neq \pm 1, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Решая первое неравенство последней системы методом интервалов, и учитывая последующие неравенства, получим

Ответ. $x \in (-2;-1) \cup (-1;0) \cup (0;1) \cup (2;6) \cup (6;+\infty).$

Пример2   *Решите неравенство:* $\log_{|x+2|}(4+7x-2x^2) \le 2.$

Решение.   Данное неравенство равносильно неравенству:

$$\log_{|x+2|}(4+7x-2x^2) - \log_{|x+2|}(x+2)^2 \le 0.$$

Воспользуемся утверждением 2:

$$\begin{cases} (|x+2|-1)(4+7x-2x^2-x^2-4x-4) \le 0, \\ |x+2| > 0, \\ |x+2| \ne 1, \\ 4+7x-2x^2 > 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

[по утверждению 4.]

$$\begin{cases} (x^2+4x+3)(-3x^2+3x) \le 0, \\ |x+2| > 0, \\ x^2+4x+3 \ne 0, \\ 2x^2-7x-4 < 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x+3)x(x-1) \ge 0, \\ |x+2| > 0, \\ x^2+4x+3 \ne 0, \\ (x-4)(x+0,5) < 0. \end{cases}$$

Применяя метод интервалов, получим

Ответ. $x \in (-0,5; 0] \cup [1; 4).$

Пример 3 . Решите неравенство:

$$\frac{\log_{0,2}\frac{1}{2x-1}+\log_5(2-x)}{\log_5(2x-1)+\log_{0,2}\frac{1}{3-2x}} \geq 0.$$

Решение. Данное неравенство равносильно неравенству:

$$\frac{\log_5(2-x)-\log_5\frac{1}{2x-1}}{\log_5(2x-1)-\log_5\frac{1}{3-2x}} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \text{В силу утвер} - \\ \text{ждения 2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2-x>0, \\ 2x-1>0, \\ 3-2x>0, \\ \dfrac{2-x-\frac{1}{2x-1}}{2x-1-\frac{1}{3-2x}} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x<2, \\ x>0{,}5 \\ x<1{,}5, \\ \dfrac{-2x^2+5x-3}{-4(x-1)^2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}5<x<1{,}5, \\ (x-1)(x-1{,}5) \geq 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Снова применяя метод интервалов, получим

Ответ. $x \in (0{,}5; 1).$

Пример 4 . Решите неравенство: $\log_{2x+3} x^2 < 1.$

Решение. Данное неравенство равносильно следующему:

$$\log_{2x+3} x^2 - \log_{2x+3}(2x+3) < 0 \quad \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \text{В силу утвер}- \\ \text{ждения 2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} (2x+3-1)(x^2-2x-3) < 0, \\ 2x+3 > 0, \\ x \neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2(x-3) < 0, \\ x > -1{,}5, \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 < 0, \\ x \neq -1 \\ x > -1{,}5, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Ответ. $x \in (-1{,}5;-1) \cup (-1;0) \cup (0;3).$

Пример 5. Решите неравенство: $$\frac{4^{x^2+3x-2}-(0,5)^{2x^2+2x-1}}{5^x-1}\le 0.$$

Решение. Преобразуем данное неравенство к равносильному виду:

$$\frac{2^{2x^2+6x-4}-2^{-2x^2-2x+1}}{5^x-5^0}\le 0.$$

В силу *утверждения* 3 данное неравенство равносильно следующему:

$$\frac{2x^2+6x-4+2x^2+2x-1}{x}\le 0 \quad \Leftrightarrow \frac{(x-0,5)(x+2,5)}{x}\le 0.$$

Снова применяя метод интервалов, получим

Ответ. $x\in(-\infty;-2,5]\cup(0;0,5].$

Пример 6 . Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{\log_x 2x}(5x-2) \ge 0, \\ 15^x - 9\cdot 5^x - 3^x + 9 \le 0. \end{cases}$$

Решение. *Решим второе неравенство системы:* $15^x - 9\cdot 5^x - 3^x + 9 \le 0$

$\Leftrightarrow 5^x(3^x-9)-(3^x-9) \le 0 \Leftrightarrow$ $(3^x-9)(5^x-1) \le 0$ $\Leftrightarrow$

[по утверждению 3.] $(x-2)(x-0) \le 0$ $\boldsymbol{0 \le x \le 2}$ (1)

Решим первое неравенство системы: $\log_{\log_x 2x}(5x-2) \ge 0 \Leftrightarrow$

[в силу утверждений 1. и 2.]

$$\begin{cases} (\log_x 2x - 1)(5x-2-1) \ge 0, \\ \log_x 2x > 0, \\ \log_x 2x \ne 1, \\ 5x-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\log_x 2x - \log_x x)(5x-3) \ge 0, \\ (x-1)(2x-1) > 0, \\ 2x \ne x, \\ x>0, \\ x \ne 1, \\ 5x-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(2x-x)(5x-3) \ge 0, \\ (x-1)(2x-1) > 0, \\ 5x-2>0. \end{cases}$$

Решением последней системы являются $x \in (0{,}4; 0{,}5) \cup (1; +\infty)$.

С учетом (1), получим *Ответ.* $x \in (0{,}4; 0{,}5) \cup (1; 2]$.

Пример 7 Решите неравенство:

$$\frac{9}{\left(\log_{2,1}(x-10)^2\right)\log_{1,9}x} \geq \frac{(x-1)^{\log_3(x-1)}}{9\left(\log_{2,1}(x-10)^2\right)\log_{1,9}x}.$$

Решение. Пусть $\log_3(x-1) = z$ Тогда $x-1=3^z$

$$(x-1)^{\log_3(x-1)} = 3^{z^2}$$

и неравенство примет вид:

$$\frac{3^{\log_3^2(x-1)}-3^4}{\left(\log_{2,1}(x-10)^2\right)\log_{1,9}x} \leq 0 \qquad \Leftrightarrow \frac{\log_3^2(x-1)-4}{\left(\log_{2,1}(x-10)^2\right)\log_{1,9}x} \leq 0$$

При равносильном переходе мы воспользовались утверждением 3. Найдем ОДЗ:

$$\begin{cases} x > 1, \\ x \neq 10, \\ x \neq 11, \\ x \neq 9. \end{cases}$$

Пользуясь утверждениями 1.2., получим, что в ОДЗ последнее неравенство равносильно неравенству:

$$\frac{(x-1-9)(x-1-\frac{1}{9})}{[(x-1)^2-1](x-1)} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \frac{(x-10)(x-\frac{10}{9})}{(x-11)(x-9)(x-1)} \leq 0.$$

Отсюда, с учетом ОДЗ, получим

Ответ. $x \in \left[\frac{10}{9}; 9\right) \cup (10; 11).$

Пример 8 . Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 4\cdot 4^x - 33\cdot 2^x + 8 \le 0, \\ \log_{x^2}(x-1)^2 \le 1. \end{cases}$$

Решение. Решим первое неравенство системы. Обозначим $2^x = y.$

Неравенство примет вид: $4y^2 - 33y + 8 \le 0 \Leftrightarrow (y-8)(y-\frac{1}{4}) \le 0 \Leftrightarrow$

$\frac{1}{4} \le y \le 8 \Leftrightarrow 2^{-2} \le 2^x \le 2^3 \Leftrightarrow \boldsymbol{-2 \le x \le 3}$ (2).

Решим второе неравенство системы, применяя утверждение 2:

$\log_{x^2}(x-1)^2 \le 1 \Leftrightarrow \log_{x^2}(x-1)^2 - \log_{x^2} x^2 \le 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2-1)((x-1)^2 - x^2) \le 0, \\ x \ne 0, \\ x \ne \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+1)(2x-1) \ge 0, \\ x \ne 0, \\ x \ne \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in (-1;0) \cup \left(0;\frac{1}{2}\right] \cup (\mathbf{1};+\infty)$$

(3).

Пересечение (2) и (3) дает *Ответ.* $(-1;0) \cup \left(0;\frac{1}{2}\right] \cup (1;3]$