Лекция. Дифференциальные Уравнения

Лектор : Сандаков Евгений Борисович – доцент кафедры №30 Высшей математики «НИЯУ МИФИ»

ОДУ Лекция 25-ого ноября 2020 года

§ Уравнение n-ого порядка

Рассмотрим уравнение

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\dots,y^{(n-1)}) \qquad (1')$$

Опр. Решением уравнения (1') называется функция $\varphi(x)\in C^{(n)}\langle\alpha,\beta\rangle$, где $\langle\alpha,\beta\rangle=\text{пр}_x G$:

1) для $\forall x\in\langle\alpha,\beta\rangle$ точка $(x,\varphi,\varphi',\dots,\varphi^{(n-1)})\in G$, где G – область определения функции $f(x,p_0,p_1,\dots,p_{n-1})$, $G\subset R^{n+1}=R^1_x\oplus R^n_{\vec p}$

2) при подстановке $\varphi(x)$ в уравнение (1') получается тождество по $x\in\langle\alpha,\beta\rangle$

Опр. Задача Коши для уравнения (1') состоит в том, чтобы среди всех решений уравнения (1') найти те, которые удовлетворяют условиям:

$$\begin{cases} y(x_0)=y_{00} \\ y'(x_0)=y_{10} \\ \dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0)=y_{(n-1)0} \end{cases} \qquad (2')$$

Если ввести обозначения

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix}; \ \vec{f}(x,\vec{y}) = \begin{bmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ f(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{bmatrix}$$

то уравнение (1') примет вид

$$\begin{cases} \vec{y}\,' = \vec{f}(x, \vec{y}) & (1) \\ \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0 & (2) \end{cases}$$

<u>Вывод</u> Задача Коши (1') – (2') эквивалентна задаче Коши (1) – (2).

<u>Теорема (теорема существования и единственности решения задачи Коши (1') – (2') локальная)</u>

Пусть функция $f(x, p_0, p_1, \dots, p_{n-1})$ — правая часть уравнения (1') удовлетворяет условиям: 1) $f(x, p_0, p_1, \dots, p_{n-1}) \in C(G)$, где $G \subset R^{n+1} = R^1_x \oplus R^n_{\vec{p}}$ и $f(x, \vec{p})$ удовлетворяет условию Липшица по $\vec{p}$ с постоянной Липшица L (область G — выпукла по $\vec{p}$). Тогда для любой точки $(x_0, y_{00}, y_{10}, \dots, y_{(n-1)0}) \in G$ и любого прямоугольника $P \subset G$; где

$P=\{(x,y)\in G: |x-x_0|\le a, \|\vec{y}-\vec{y}_0\|\le b\}\subset G$

существует единственное решение $y(x)$ задачи Коши

$$\begin{cases} y^{(n)}=f(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}) & (1') \\ y(x_0)=y_0 & \\ y'(x_0)=y_{10} & (2') \\ \ldots & \\ y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1\,0} & \end{cases},$$

определённое на отрезке $[x_0-\delta, x_0+\delta]$, где $\delta>0$ и $\delta<\min\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\}$, $M=\max\limits_{(x,\vec{p})\in P}|f(x,\vec{p})|$, которое может быть найдено методом итераций.

Док-во Так как решение задачи Коши (1')–(2') эквивалентно решению задачи Коши (1)–(2) и в силу справедливости теоремы существования и единственности решения задачи Коши (1)–(2) следует, что теорема справедлива и для задачи Коши (1')–(2') #

Теорема (Теорема существования и единственности решения задачи Коши (1')–(2') глобальная)

Пусть в задаче Коши (1')–(2') правая часть $f(x, p_0, p_1, \dots, p_{n-1})$ удовлетворяет условиям: 1) $f(x, \vec{p}) \in C(G)$, где $G \subset R^{n+1} = R^1_x \oplus R^n_{\vec{p}}$, и $f(x, p)$ удовлетворяет условию Липшица по $\vec{p}$ с постоянной Липшица L. Тогда для любой точки $(x_0, y_{00}, y_{10}, \dots, y_{(n-1)0}) \in G$ существует единственное решение задачи Коши (1')–(2'), которое как угодно близко подходит к границе области G.

Док-во: Так как решение задачи Коши (1')–(2') эквивалентно решению задачи Коши (1)–(2), то справедливость теоремы существования и единственности решения задачи Коши (1')–(2') глобальной следует из теоремы существования и единственности решения задачи Коши (1)–(2), доказанной ранее. #

Замечание. В последних двух теоремах вместо условия Липшица можно было потребовать условие:

$$\exists \frac{\partial f}{\partial p_i} \in C(G) \text{ и } \exists M>0 : \left|\frac{\partial f}{\partial p_i}\right| \le M$$

§ Непрерывная зависимость решения задачи Коши от параметров.

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \vec{y}\,'(t,\vec{\mu}) = \vec{f}(t,\vec{y},\vec{\mu}) & (1) \\ \vec{y}(t_0,\vec{\mu}) = \vec{y}_0(\vec{\mu}) & (2), \end{cases}$$

где $\vec{f}(t,\vec{y},\vec{\mu})$ определена в области $\Omega \subset R^{n+m+1} = R^1_t \oplus R^n_{\vec{y}} \oplus R^m_{\vec{\mu}}$

<u>Теорема</u> Пусть $\vec{f}(t,\vec{y},\vec{\mu}) \in \vec{C}(\Omega)$ и $\vec{f}(t,\vec{y},\vec{\mu})$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной Липшица $\mathcal{L}$, не зависящей от $\vec{\mu}$ и $\vec{y}_0(\vec{\mu}) \in \vec{C}(\|\vec{\mu}-\vec{\mu}_0\| \le \alpha)$. Тогда для любой точки $(t_0, \vec{y}_0, \vec{\mu}_0) \in \Omega$ и любого прямоугольника P, где

$$P = \{|t-t_0| \le a, \|\vec{y}-\vec{y}_0\| \le b, \|\vec{\mu}-\vec{\mu}_0\| \le \alpha\} \subset \Omega$$

существует единственное решение задачи Коши (1)–(2), которое определено на множестве D, где

$$D = \{|t-t_0| \le \delta, \|\vec{\mu}-\vec{\mu}_0\| \le \alpha\}:$$

$$0 < \delta < \min\{a; \frac{b}{M}, \frac{1}{\mathcal{L}}\}, \ (M = \max_{\Omega} |f|)$$

и непрерывное на множестве D.

Док-во.

1-ый шаг Докажем, что решение задачи Коши ① - ② эквивалентно решению интегрального уравнения

$$\vec{y}(t,\vec{\mu})=\vec{y}_0(\mu)+\int_{t_0}^{t}\vec{f}(\tau,\vec{y}(\tau,\vec{\mu}),\vec{\mu})d\tau \quad ③$$

Докажем это утверждение

Пусть $\vec{y}(t,\vec{\mu})$ является решением задачи Коши ① - ②. Интегрируя уравнение ①, получим

$$\vec{y}(t,\vec{\mu})=\int_{t_0}^{t}\vec{f}(\tau,\vec{y}(\tau),\vec{\mu})d\tau+\vec{C}$$

Подставляя в это равенство $t=t_0$ получим, что $\vec{C}=\vec{y}_0(\vec{\mu})$. Подставляя это значение $\vec{C}$ в предыдущее равенство, получим, что $\vec{y}(t,\vec{\mu})$ является решением интегрального уравнения ③

Обратно, пусть $\vec{y}(t,\vec{\mu})$ является решением интегрального уравнения ③. Тогда так как $\vec{f}(t,\vec{y},\vec{\mu})$ непрерывна (по условию), то правая часть равенства ③ дифференцируема. Но тогда и левая часть этого равенства также дифференцируема, то есть $\vec{y}\,'(t,\vec{\mu})$ дифференцируема. Тогда, дифференцируя равенство ③, получим ①.

Подставляя в ③ $t=t_0$ получим ②

Следовательно, эквивалентность решения задачи Коши ①-② и интегрального уравнения ③ доказана.

2-ой шаг Докажем теорему существования и единственности решения интегрального уравнения ③.

Введём оператор A по формуле

$$A\vec{y}\,(t,\vec{\mu})=\vec{y}_0(\vec{\mu})+\int_{t_0}^{t}\vec{f}(\tau,\vec{y}(\tau),\vec{\mu})\,d\tau$$

Тогда равенство ③ примет вид

$$A\vec{y}\,(t,\vec{\mu})=\vec{y}\,(t,\vec{\mu}) \qquad ④$$

Оператор A будем рассматривать в пространстве $B_{b\delta\alpha}$, где

$$B_{b\delta\alpha}=\{\vec{y}\,(t,\vec{\mu})\in\vec{C}\,(|t-t_0|\le\delta,\|\vec{\mu}-\vec{\mu}_0\|\le\alpha):\|\vec{y}-\vec{y}_0\|\le b\}$$

Это полное метрическое пространство

Подберём $\delta>0$ так, чтобы оператор A, определённый в $B_{b\delta\alpha}$ удовлетворял усло

вием, чтобы 1) Оператор A действовал из $B_{\varepsilon\delta\alpha}$ в $B_{\varepsilon\delta\alpha}$ (то есть $A: B_{\varepsilon\delta\alpha} \to B_{\varepsilon\delta\alpha}$)
2) Оператор A был бы оператором сжатия в $B_{\varepsilon\delta\alpha}$, то есть чтобы существовало число $0<q<1$ такое что для любых $\vec{y}_1, \vec{y}_2$ из $B_{\varepsilon\delta\alpha}$ выполнялось неравенство $\|A\vec{y}_1 - A\vec{y}_2\| \le q\|\vec{y}_1 - \vec{y}_2\|$

1) Покажем, что оператор A действует из $B_{\varepsilon\delta\alpha}$ в $B_{\varepsilon\delta\alpha}$. Действительно, пусть $\vec{y}(t,\vec{\mu}) \in B_{\varepsilon\delta\alpha}$. Покажем, что существует $\delta>0$: $\|A\vec{y} - \vec{y}_0\| \le b$

Из ③ имеем

$$\|A\vec{y} - \vec{y}_0\| = \left\|\int_{t_0}^{t} \vec{f}(\tau, \vec{y}(\tau,\vec{\mu}), \vec{\mu})d\tau\right\| \le$$

$$\le \left|\int_{t_0}^{t} \|\vec{f}(\tau,\vec{y}(\tau,\vec{\mu}),\vec{\mu})\| d\tau\right| \le M|t-t_0| \le M\delta \le b$$

при $\delta \le \frac{b}{M}$, где $M = \max\limits_{P} |\vec{f}(\tau, \vec{y}, \vec{\mu})|$

Итак, мы получаем, что при $\delta \le \frac{b}{M}$ оператор A действует из $B_{\varepsilon\delta\alpha}$ в $B_{\varepsilon\delta\alpha}$

2) Покажем, что при $0<\delta<\frac{1}{q}$ оператор A является оператором сжатия в

пространстве $B_{\delta\delta\alpha}$. Действительно, для любых $\vec{y}_1(t,\vec{\mu})$ и $\vec{y}_2(t,\vec{\mu})$ имеем

$$\|A\vec{y}_1 - A\vec{y}_2\| = \left\|\int_{t_0}^{t}[\vec{f}(\tau,\vec{y}_1(\tau,\vec{\mu}),\vec{\mu}) - \vec{f}(\tau,\vec{y}_2(\tau,\vec{\mu}),\vec{\mu})]d\tau\right\| \leq$$

$$\leq \left|\int_{t_0}^{t}\|\vec{f}(\tau,\vec{y}_1(\tau,\vec{\mu}),\vec{\mu}) - \vec{f}(\tau,\vec{y}_2(\tau,\vec{\mu}),\vec{\mu})\|d\tau\right| \leq \left(\begin{matrix}\text{по}\\ \text{условию}\\ \text{Липшица}\end{matrix}\right)$$

$$\leq \mathcal{L}\|\vec{y}_1 - \vec{y}_2\|\cdot\left|\int_{t_0}^{t}1\,d\tau\right| \leq \mathcal{L}\cdot\delta\|\vec{y}_1 - \vec{y}_2\| = q\|\vec{y}_1 - \vec{y}_2\|,$$

где $q = \mathcal{L}\delta$

Следовательно, оператор A будет оператором сжатия в пространстве $B_{\delta\delta\alpha}$, если $0 < q < 1$, то есть $0 < \delta < \frac{1}{\mathcal{L}}$

Итак, при $0 < \delta < \min(\alpha, \frac{b}{M}, \frac{1}{\mathcal{L}})$ выполняются все условия теоремы о сжимающем операторе. Тогда согласно этой теореме у интегрального уравнения (3) существует единственное решение $\vec{y}(t,\vec{\mu}) \in C(D)$, где $D = \{|t - t_0| < \delta, \|\vec{\mu} - \vec{\mu}_0\| \leq \alpha\}$. Таким образом теорема доказана #

§ Непрерывная зависимость решения задачи Коши от начальных данных.

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \vec{y}\,'(t) = \vec{f}(t, \vec{y}) & (1) \\ \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0 & (2) \end{cases}$$

Очевидно, что решение задачи (1)–(2) зависит от начальных данных $\vec{y}_0$, это есть $\vec{y} = \vec{y}(t, t_0, \vec{y}_0)$.

Теорема Пусть $\vec{f}(t, \vec{y}) \in \vec{C}(\Omega)$, где $\Omega \subset R^{n+1} = R^1_t \oplus R^n_{\vec{y}}$ и $\vec{f}(t, \vec{y})$ удовлетворяет условию Липшица по $\vec{y}$ с постоянной Липшица L. Тогда решение задачи Коши (1)–(2) непрерывно зависит от начальных данных $(t_0, \vec{y}_0)$.

Док-во Сделаем замену

$$t = \tau + t_0, \quad \vec{y}(t) = \vec{x}(\tau) + \vec{y}_0 \qquad (*)$$

Тогда задача Коши (1)–(2) примет вид для функции $\vec{x}(\tau)$

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{x}(\tau)}{d\tau} = \vec{F}(\tau, \vec{x}(\tau), t_0, \vec{y}_0) & (3) \\ \vec{x}(0) = \vec{0} & (4) \end{cases}$$

где $\vec{F}(\tau, \vec{x}(\tau), t_0, \vec{y_0}) = \vec{f}(\tau + t_0, \vec{x}(\tau) + \vec{y_0})$
Таким образом $(t_0, \vec{y_0})$ становится параметром в задаче (3)–(4) и $\vec{f}(\tau + t_0, \vec{x}(\tau) + \vec{y_0})$ непрерывна по $t_0, \vec{y_0}$ так как она непрерывна по $(\tau + t_0, \vec{x}(\tau) + \vec{y_0})$. Тогда по теореме о непрерывной зависимости решения задачи Коши от параметров (доказанной ранее) следует что решение $\vec{x}(\tau, t_0, \vec{y_0})$ непрерывно зависит от $t_0, \vec{y_0}$. Откуда следует, что
$\vec{y} = \vec{x}(\tau, t_0, \vec{y_0}) + \vec{y_0}$ также непрерывно зависит от $t_0, \vec{y_0}$. Теорема доказана #

§ О корректности задачи Коши

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \mathcal{L}y = f & (1) \\ \text{начальные данные} & (2) \end{cases}$$

Опр. Задача Коши (1)–(2) называется корректной, если:

1) для любой правой части f и любых начальных данных из опреде-

лённого класса существует решение задачи Коши (1)–(2)

2) это решение единственно

3) это решение непрерывно зависит от правой части f и начальных данных.