

Функциональные последовательности и ряды

$$(1) \quad \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (2)$$

Опр. X - мн-во сх-ст посл-ств (1) (ряда (2)),
если $\forall x_0 \in X \quad \forall n_0 \geq 1 \quad \exists f_{n_0}(x_0) \quad (\exists u_{n_0}(x_0))$ и
 $\{f_n(x_0)\}$ сх. $(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) \text{ сх.})$

Аналогично для (2) можно ввести понятие
мн-ва абс. сх-ст, мн-во усл. сх-ст.

X - мн-во сх-ст $\{f_n(x)\}$, т.е. $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \forall x \in X$
 $\Rightarrow f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, $f(x)$ - предельная функция

Аналогично $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - сумма ряда

Когда сохраняются функциональные св-ва (непр, дифф...)

Функциональные последовательности и ряды

$$(1) \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (2)$$

Опр. X -мн.-во сх.-сти посл.-ств (1) (ряда (2)),

если $\forall x_0 \in X \quad \forall n_0 \geq 1 \quad \exists f_{n_0}(x_0) \quad (\exists u_{n_0}(x_0))$ и $\{f_n(x_0)\}$ сх. $(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) \text{ сх.})$

Аналогично для (2) можно ввести понятие

мн.-ва абс. сх.-ств, мн.-ва усл. сх.-ств.

X -мн.-во сх.-ств $\{f_n(x)\}$, т.е. $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \forall x \in X$

$\Rightarrow f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, $f(x)$ - предельная функция

Аналогично $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - сумма ряда

Когда сохраняются функциональные св.-ва (непр, дифф...)

Примеры $X = [0, 1]$

$$1. f_n(x) = x^n$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

Функциональные последовательности и ряды

$$(1) \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (2)$$

Опр. X -мн.-во сх-сти посл-сти (1) (ряда (2)),

если $\forall x_0 \in X \quad \forall n_0 \geq 1 \quad \exists f_{n_0}(x_0) \quad (\exists u_{n_0}(x_0))$ и $\{f_n(x_0)\}$ сх. $(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) \text{ сх.})$

Аналогично для (2) можно ввести понятие мн.-ва абс. сх-сти, мн.-ва усл. сх-сти.

X -мн.-во сх-сти $\{f_n(x)\}$, т.е. $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \forall x \in X$

$\Rightarrow f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, $f(x)$ - предельная функция

Аналогично $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - сумма ряда

Когда сохраняются функциональные св-ва (непр, дифф...)

Примеры $X = [0, 1]$

$$1. f_n(x) = x^n \quad f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

$$2. f_n(x) = \frac{1}{1+n^x} \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

Функциональные последовательности и ряды

$$(1) \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (2)$$

Опр. X -мн.-во сх-сти посл-ств (1) (ряда (2)),

если $\forall x_0 \in X \quad \forall n_0 \geq 1 \quad \exists f_{n_0}(x_0) \quad (\exists u_{n_0}(x_0))$ и $\{f_n(x_0)\}$ сх. $(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) \text{ сх.})$

Аналогично для (2) можно ввести понятие мн.-ва абс. сх-сти, мн.-ва уст. сх-сти.

X -мн.-во сх-сти $\{f_n(x)\}$, т.е. $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \forall x \in X$

$\Rightarrow f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, $f(x)$ - предельная функция

Аналогично $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - сумма ряда

Когда сохраняются функциональные св-ва (непр, дифр...)

Примеры $X = [0, 1]$

$$1. f_n(x) = x^n \quad f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

$$2. f_n(x) = \frac{1}{1+n^2 x^2} \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$3. f_n(x) = \frac{x}{1+n^2 x^2} \quad f(x) \equiv 0$$

Функциональные последовательности и ряды

$$(1) \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (2)$$

Опр. X -мн.-во сх-сти посл-ств (1) (рядов (2))

если $\forall x_0 \in X \quad \forall n_0 \geq 1 \quad \exists f_{n_0}(x_0) \quad (\exists u_{n_0}(x_0))$ и $\{f_{n_0}(x_0)\}$ сх. $\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_{n_0}(x_0) \text{ сх.}\right)$

Аналогично для (2) можно ввести понятие

мн.-ва абс. сх-сти, мн.-ва усл. сх-сти.

X -мн.-во сх-сти $\{f_n(x)\}$, т.е. $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \forall x \in X$

$\Rightarrow f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, $f(x)$ - предельная функция

Аналогично $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - сумма ряда

Когда сохраняются функциональные св-ва (непр., дифр. ...)

Примеры $X = [0, 1]$

$$1. f_n(x) = x^n \quad f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

$$2. f_n(x) = \frac{1}{1+n^2 x} \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$3. f_n(x) = \frac{x}{1+n^2 x^2} \quad f(x) \equiv 0$$

$$4. f_n(x) = \frac{n x}{1+n^2 x^2} \quad f(x) \equiv 0$$

$$f_n(x) = \frac{x}{\frac{1}{n} + n x^2}$$

Функциональные последовательности и ряды

$$(1) \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (2)$$

Опр. X -мн.-во сх-сти посл-ств (1) (рядов (2)), если $\forall x_0 \in X \quad \forall n_0 \geq 1 \quad \exists f_n(x_0) \quad (\exists u_n(x_0))$ и $\{f_n(x_0)\}$ сх. $(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) \text{ сх.})$

Аналогично для (2) можно ввести понятие мн.-ва абс. сх-сти, мн.-ва уст. сх-сти.

X -мн.-во сх-сти $\{f_n(x)\}$, т.е. $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \forall x \in X$

$\Rightarrow f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, $f(x)$ - предельная функция

Аналогично $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - сумма ряда

Когда сохраняются функциональные св-ва (непр., диффр...)

Примеры $X = [0, 1]$

$$1. f_n(x) = x^n \quad f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

$$2. f_n(x) = \frac{1}{1+n^2 x} \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$3. f_n(x) = \frac{x}{1+n^2 x^2} \quad f(x) \equiv 0$$

$$4. f_n(x) = \frac{n x}{1+n^2 x^2} \quad f(x) \equiv 0$$

$$5. f_n(x) = n^2 x e^{-n^2 x^2} \quad f(x) \equiv 0$$

При $x=0$ $f_n(0) = 0$.

$$\text{При } x \in (0, 1] \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 x}{e^{n^2 x^2}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{n^2 x^2}{e^{n^2 x^2}} = \frac{1}{x} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 x^2}{e^{n^2 x^2}} = 0, \text{ т.к.}$$

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u}{e^u} = 0 \quad (\text{Лопиталь})$$

Функциональные последовательности и ряды

$$(1) \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (2)$$

Опр. X - мн-во сх-сти посл-ств (1) (ряда (2)), если $\forall x_0 \in X \quad \forall n_0 \geq 1 \quad \exists f_n(x_0) (\exists u_n(x_0))$ и $\{f_n(x_0)\}$ сх. ($\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ сх.)

Аналогично для (2) можно ввести понятие мн-ва абс. сх-ств, мн-ва усл. сх-ств.

X - мн-во сх-ств $\{f_n(x)\}$, т.е. $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \forall x \in X$
 $\Rightarrow f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, $f(x)$ - предельная функция

Аналогично $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - сумма ряда

Когда сохраняются функциональные св-ва (непр., дифр...)

Равномерная сходимость

$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in X$, т.е. $\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N$:

$$\forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (\text{поточечная сх-сть})$$

Опр. $\{f_n(x)\}$ равном. сх. на X к $f(x)$, если $\forall \varepsilon > 0$

$$\exists N: \forall n > N \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (f_n(x) \xrightarrow{X} f(x))$$

Отсюда: $f_n(x) \xrightarrow{X} f(x) \Rightarrow \forall x \in X \quad f_n(x) \rightarrow f(x)$

Отрицание. $f_n(x) \not\xrightarrow{X} f(x)$ на X , если $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \exists n > N$,
 $\exists x \in X: |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$

Ряд. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{X} S(x)$ значит, что $S_n(x) \xrightarrow{X} S(x)$

Примеры $X = [0, 1]$

$$1. f_n(x) = x^n \quad f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

$$2. f_n(x) = \frac{1}{1+n^2 x} \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$3. f_n(x) = \frac{x}{1+n^2 x^2} \quad f(x) \equiv 0$$

$$4. f_n(x) = \frac{n x}{1+n^2 x^2} \quad f(x) \equiv 0$$

$$5. f_n(x) = n^2 x e^{-n^2 x^2} \quad f(x) \equiv 0$$

Функциональные последовательности и ряды

$$(1) \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (2)$$

Опр. X - мн-во сх-сти посл-сти (1) (рядов (2)),
если $\forall x_0 \in X \quad \forall n_0 \geq 1 \quad \exists f_{n_0}(x_0) \quad (\exists u_{n_0}(x_0))$ и
 $\{f_n(x_0)\}$ сх. $(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) \text{ сх.})$

Аналогично для (2) можно ввести понятие
мн-ва абс. сх-сти, мн-ва усл. сх-сти.

X - мн-во сх-сти $\{f_n(x)\}$, т.е. $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \forall x \in X$
 $\Rightarrow f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, $f(x)$ - предельная функция

Аналогично $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - сумма ряда

Когда сохраняются функциональные св-ва (непр., дифф. ...)

Равномерная сходимость

$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in X$, т.е. $\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N$:

$$\forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (\text{поточечная сх-сть})$$

Опр. $\{f_n(x)\}$ равномер. сх. на X к $f(x)$, если $\forall \varepsilon > 0$

$$\exists N: \forall n > N \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (f_n(x) \xrightarrow{X} f(x))$$

Отсюда: $f_n(x) \xrightarrow{X} f(x) \Rightarrow \forall x \in X \quad f_n(x) \rightarrow f(x)$

Отрицание. $f_n(x) \not\xrightarrow{X} f(x)$ на X , если $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \quad \exists n > N$,

$$\exists x \in X: |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$$

Ряд. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{X} S(x)$ значит, что $S_n(x) \xrightarrow{X} S(x)$

Примеры $X = [0, 1]$

$$1. f_n(x) = x^n \quad f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases} \quad \neq$$

$$\exists \varepsilon = \frac{1}{2} > 0 \quad \forall N \quad \exists n = N+1 > N$$

$$\exists x = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \in (0, 1) \subset [0, 1], |f_n(x) - f(x)| = f_n(x) = x^n = \frac{1}{2} = \varepsilon$$

Функциональные последовательности и ряды

$$(1) \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (2)$$

Опр. X -мн.-во сх.-сти посл.-сти (1) (ряда (2)), если $\forall x_0 \in X \quad \forall n_0 \geq 1 \quad \exists f_n(x_0) \quad (\exists u_n(x_0))$ и $\{f_n(x_0)\}$ сх. $(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) \text{ сх.})$

Аналогично для (2) можно ввести понятие мн.-ва абс. сх.-сти, мн.-ва уст. сх.-сти.

X -мн.-во сх.-сти $\{f_n(x)\}$, т.е. $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \forall x \in X$
 $\Rightarrow f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, $f(x)$ - предельная функция

Аналогично $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - сумма ряда

Когда сохраняются функциональные св.-ва (непр., дифф. ...)

Равномерная сходимость

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in X, \text{ т.е. } \forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N:$$

$$\forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \quad (\text{поточечная сх.-сть})$$

Опр. $\{f_n(x)\}$ равном. сх. на X к $f(x)$, если $\forall \varepsilon > 0$

$$\exists N: \forall n > N \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (f_n(x) \xrightarrow{X} f(x))$$

$$\text{Отсюда: } f_n(x) \xrightarrow{X} f(x) \Rightarrow \forall x \in X \quad f_n(x) \rightarrow f(x)$$

Отрицание. $f_n(x) \not\xrightarrow{X} f(x)$ на X , если $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \quad \exists n > N,$

$$\exists x \in X: |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$$

$$\text{Ряд. } \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{X} S(x) \text{ значит, что } S_n(x) \xrightarrow{X} S(x)$$

Примеры $X = [0, 1]$

$$1. f_n(x) = x^n \quad f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases} \quad \nrightarrow$$

$$2. f_n(x) = \frac{1}{1+n^2 x} \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & 0 < x < 1 \end{cases} \quad \nrightarrow$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} > 0 \quad \forall N \quad \exists n = N+1 \quad \exists x = \frac{1}{n} \in (0, 1] \subset [0, 1]$$

$$|f_n(x) - f(x)| = f_n(x) = \frac{1}{1+n^2 x} = \frac{1}{2} = \varepsilon$$

Функциональные последовательности и ряды

$$(1) \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (2)$$

Опр. X - мн-во сх-стх посл-стх (1) (ряда (2)),

если $\forall x_0 \in X \quad \forall n_0 \geq 1 \quad \exists f_n(x_0) \quad (\exists u_n(x_0))$ и $\{f_n(x_0)\}$ сх. $(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) \text{ сх.})$

Аналогично для (2) можно ввести понятие мн-ва абс. сх-стх, мн-ва усл. сх-стх.

X - мн-во сх-стх $\{f_n(x)\}$, т.е. $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \forall x \in X$
 $\Rightarrow f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, $f(x)$ - предельная функция

Аналогично $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - сумма ряда

Когда сохраняются функциональные св-ва (непр, дифр...)

Равномерная сходимость

$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in X$, т.е. $\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N$:

$$\forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \quad (\text{поточечная сх-стх})$$

Опр. $\{f_n(x)\}$ равном. сх. на X к $f(x)$, если $\forall \varepsilon > 0$

$$\exists N: \forall n > N \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (f_n(x) \xrightarrow{X} f(x))$$

Отсюда: $f_n(x) \xrightarrow{X} f(x) \Rightarrow \forall x \in X \quad f_n(x) \rightarrow f(x)$

Отрицание. $f_n(x) \not\xrightarrow{X} f(x)$ на X , если $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \exists n > N$,

$$\exists x \in X: |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$$

Ряд. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{X} S(x)$ значит, что $S_n(x) \xrightarrow{X} S(x)$

Примеры $X = [0, 1]$

$$1. f_n(x) = x^n \quad f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases} \quad \nrightarrow$$

$$2. f_n(x) = \frac{1}{1+n^2 x^2} \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & 0 < x < 1 \end{cases} \quad \nrightarrow$$

$$3. f_n(x) = \frac{x}{1+n^2 x^2} \quad f(x) \equiv 0 \quad \Rightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = \left\lceil \frac{1}{2\varepsilon} \right\rceil > \frac{1}{2\varepsilon} - 1 \quad \forall n > N \quad n \geq N+1 > \frac{1}{2\varepsilon}$$

$$\forall x \in [0, 1] \quad |f_n(x) - f(x)| = f_n(x) = \frac{x}{1+n^2 x^2} = \\ = \frac{1}{n} \cdot \frac{nx}{1+n^2 x^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{nx + \frac{1}{nx}} \leq \frac{1}{2n} < \varepsilon \quad \left(\begin{array}{l} \text{верно и} \\ \text{при } x=0 \end{array} \right)$$

Функциональные последовательности и ряды

$$(1) \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (2)$$

Опр. X - мн-во сх-сти по сл-сти (1) (ряда (2)),

если $\forall x_0 \in X \quad \forall n_0 \geq 1 \quad \exists f_n(x_0) \quad (\exists u_n(x_0))$ и $\{f_n(x_0)\}$ сх. $(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) \text{ сх.})$

Аналогично для (2) можно ввести понятие

мн-ва абс. сх-сти, мн-ва усл. сх-сти.

X - мн-во сх-сти $\{f_n(x)\}$, т.е. $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \forall x \in X$

$\Rightarrow f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, $f(x)$ - предельная функция

Аналогично $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - сумма ряда

Когда сохраняются функциональные св-ва (непр, дифф...)

Равномерная сходимость

$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in X$, т.е. $\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N:$

$$\forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (\text{поточечная сх-сть})$$

Опр. $\{f_n(x)\}$ равном. сх. на X к $f(x)$, если $\forall \varepsilon > 0$

$$\exists N: \forall n > N \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (f_n(x) \xrightarrow{X} f(x))$$

Отсюда: $f_n(x) \xrightarrow{X} f(x) \Rightarrow \forall x \in X \quad f_n(x) \rightarrow f(x)$

Отрицание. $f_n(x) \not\xrightarrow{X} f(x)$ на X , если $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \quad \exists n > N,$

$$\exists x \in X: |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$$

Ряд. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{X} S(x)$ значит, что $S_n(x) \xrightarrow{X} S(x)$

Примеры $X = [0, 1]$

$$1. f_n(x) = x^n \quad f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases} \quad \not\xrightarrow{X}$$

$$2. f_n(x) = \frac{1}{1+n^2 x^2} \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & 0 < x < 1 \end{cases} \quad \not\xrightarrow{X}$$

$$3. f_n(x) = \frac{x}{1+n^2 x^2} \quad f(x) \equiv 0 \quad \Rightarrow$$

$$4. f_n(x) = \frac{n x}{1+n^2 x^2} \quad f(x) \equiv 0 \quad \not\xrightarrow{X}$$

$$\exists \varepsilon = \frac{1}{2} > 0 \quad \forall N \quad \exists n = N+1 \quad \exists x = \frac{1}{n} \in [0, 1]$$

$$|f_n(x) - f(x)| = f_n(x) = \frac{n x}{1+n^2 x^2} = \frac{1}{2} = \varepsilon$$

Функциональные последовательности и ряды

$$(1) \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (2)$$

Опр. X -мн.-во сх.-стн посл.-стн (1) (рядов (2)),

если $\forall x_0 \in X \quad \forall n_0 \geq 1 \quad \exists f_n(x_0) \quad (\exists u_n(x_0))$ и $\{f_n(x_0)\}$ сх. $(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) \text{ сх.})$

Аналогично для (2) можно ввести понятие

мн.-ва абс. сх.-стн, мн.-ва уел. сх.-стн.

X -мн.-во сх.-стн $\{f_n(x)\}$, т.е. $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \forall x \in X$

$\Rightarrow f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, $f(x)$ - предельная функция

Аналогично $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - сумма ряда

Когда сохраняются функциональные св-ва (непр, дифф...)

Равномерная сходимость

$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in X$, т.е. $\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N$:

$\forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. (поточечная сх.-стн)

Опр. $\{f_n(x)\}$ равномер. сх. на X к $f(x)$, если $\forall \varepsilon > 0$

$\exists N$: $\forall n > N \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ ($f_n(x) \xrightarrow{X} f(x)$)

Отсюда: $f_n(x) \xrightarrow{X} f(x) \Rightarrow \forall x \in X \quad f_n(x) \rightarrow f(x)$

Отрицание. $f_n(x) \not\xrightarrow{X} f(x)$ на X , если $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \quad \exists n > N$,

$\exists x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$

Ряд. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{X} S(x)$ значит, что $S_n(x) \xrightarrow{X} S(x)$

Примеры $X = [0, 1]$

$$1. f_n(x) = x^n \quad f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases} \quad \not\xrightarrow{X}$$

$$2. f_n(x) = \frac{1}{1+n^2 x} \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & 0 < x < 1 \end{cases} \quad \not\xrightarrow{X}$$

$$3. f_n(x) = \frac{x}{1+n^2 x^2} \quad f(x) \equiv 0 \quad \Rightarrow$$

$$4. f_n(x) = \frac{n x}{1+n^2 x^2} \quad f(x) \equiv 0 \quad \not\xrightarrow{X}$$

$$5. f_n(x) = n^2 x e^{-n^2 x^2} \quad f(x) \equiv 0 \quad \not\xrightarrow{X}$$

$$\exists \varepsilon = \frac{1}{e} > 0 \quad \forall N \quad \exists n = N+1 \quad \exists x = \frac{1}{n} \in [0, 1]$$

$$|f_n(x) - f(x)| = f_n(x) = n^2 x e^{-n^2 x^2} = \frac{n}{e} \geq \frac{1}{e} = \varepsilon$$

$$\text{T1. } f_n(x) \xrightarrow{X} f(x) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Функциональные последовательности и ряды

$$(1) \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (2)$$

Опр. X - мн-во сх-сти посл-сти (1) (ряда (2)),

если $\forall x_0 \in X \quad \forall n_0 \geq 1 \quad \exists f_{n_0}(x_0) \quad (\exists u_{n_0}(x_0))$ и $\{f_{n_0}(x_0)\}$ сх. $(\sum_{n=1}^{\infty} u_{n_0}(x_0) \text{ сх.})$

Аналогично для (2) можно ввести понятие мн-ва абс. сх-сти, мн-ва уст. сх-сти.

X - мн-во сх-сти $\{f_n(x)\}$, т.е. $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \forall x \in X$

$\Rightarrow f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, $f(x)$ - предельная функция

Аналогично $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - сумма ряда

Когда сохраняются функциональные св-ва (непр., дифф. ...)

Равномерная сходимость

$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in X$, т.е. $\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N:$

$\forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ (поточечная сх-сть)

Опр. $\{f_n(x)\}$ равномер. сх. на X к $f(x)$, если $\forall \varepsilon > 0$

$\exists N: \forall n > N \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (f_n(x) \xrightarrow{X} f(x))$

Отсюда: $f_n(x) \xrightarrow{X} f(x) \Rightarrow \forall x \in X \quad f_n(x) \rightarrow f(x)$

Отрицание. $f_n(x) \not\xrightarrow{X} f(x)$ на X , если $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \quad \exists n > N,$

$\exists x \in X: |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$

Ряд. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{X} S(x)$ значит, что $S_n(x) \xrightarrow{X} S(x)$

Функциональные последовательности и ряды

$$(1) \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (2)$$

Опр. X - мн-во сх-сти посп-сти (1) (рядов (2)),

если $\forall x_0 \in X \quad \forall n_0 \geq 1 \quad \exists f_{n_0}(x_0) \quad (\exists u_{n_0}(x_0))$ и $\{f_n(x_0)\}$ сх. $(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ сх.)

Аналогично для (2) можно ввести понятие

мн-ва абс. сх-сти, мн-ва уст. сх-сти.

X - мн-во сх-сти $\{f_n(x)\}$, т.е. $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \forall x \in X$

$\Rightarrow f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, $f(x)$ - предельная функция

Аналогично $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - сумма ряда

Когда сохраняются функциональные св-ва (непр, дифф...)

Равномерная сходимость

$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in X$, т.е. $\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N$:

$\forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ (поточечная сх-сть)

Опр. $\{f_n(x)\}$ равном. сх. на X к $f(x)$, если $\forall \varepsilon > 0$

$\exists N: \forall n > N \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (f_n(x) \xrightarrow{X} f(x))$

Отсюда: $f_n(x) \xrightarrow{X} f(x) \Rightarrow \forall x \in X \quad f_n(x) \rightarrow f(x)$

Отрицание. $f_n(x) \not\xrightarrow{X} f(x)$ на X , если $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \exists n > N$,

$\exists x \in X: |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$

Ряд. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{X} S(x)$ значит, что $S_n(x) \xrightarrow{X} S(x)$

$$T1. f_n(x) \xrightarrow{X} f(x) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

$$2-во. \alpha_n \equiv \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \geq 0.$$

$$\Rightarrow f_n(x) \xrightarrow{X} f(x), \text{ т.е. } \forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N \quad \forall x \in X$$

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow 0 \leq \alpha_n = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} <$$

$$< \varepsilon, \text{ т.е. } \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$$

Функциональные последовательности и ряды

$$(1) \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (2)$$

Опр. X -мн.-во сх.-сти посл.-ств (1) (ряда (2)),

если $\forall x_0 \in X \quad \forall n_0 \geq 1 \quad \exists f_n(x_0) \quad (\exists u_n(x_0))$ и

$\{f_n(x_0)\}$ сх. $(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) \text{ сх.})$

Аналогично для (2) можно ввести понятие мн.-ва абс. сх.-ств, мн.-ва усл. сх.-ств.

X -мн.-во сх.-ств $\{f_n(x)\}$, т.е. $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \forall x \in X$
 $\Rightarrow f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, $f(x)$ - предельная функция

Аналогично $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - сумма ряда

Когда сохраняются функциональные св-ва (непр., дифф. ...)

Равномерная сходимость

$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in X$, т.е. $\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N$:

$\forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ (поточечная сх.-сть)

Опр. $\{f_n(x)\}$ равномерно сх. на X к $f(x)$, если $\forall \varepsilon > 0$

$\exists N$: $\forall n > N \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ ($f_n(x) \xrightarrow{X} f(x)$)

Отсюда: $f_n(x) \xrightarrow{X} f(x) \Rightarrow \forall x \in X \quad f_n(x) \rightarrow f(x)$

Отрицание. $f_n(x) \not\xrightarrow{X} f(x)$ на X , если $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \quad \exists n > N$,

$\exists x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$

Ряд. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{X} S(x)$ значит, что $S_n(x) \xrightarrow{X} S(x)$

$$\text{T1. } f_n(x) \xrightarrow{X} f(x) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

$$\text{Д-во. } \alpha_n \equiv \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \geq 0.$$

$$\Rightarrow f_n(x) \xrightarrow{X} f(x), \text{ т.е. } \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n > N \quad \forall x \in X$$

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow 0 \leq \alpha_n = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} <$$

$$< \varepsilon, \text{ т.е. } \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$$

$$\Leftarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0, \text{ т.е. } \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n > N \quad 0 \leq \alpha_n < \varepsilon$$

$$\forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n < \varepsilon, \text{ т.е. } f_n(x) \xrightarrow{X} f(x)$$

Т. доказано.

Функциональные последовательности и ряды

$$(1) \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (2)$$

Опр. X - мн-во сх-сти посл-сти (1) (рядов),

если $\forall x_0 \in X \quad \forall n_0 \geq 1 \quad \exists f_n(x_0) \quad (\exists u_n(x_0))$ и $\{f_n(x_0)\}$ сх. $(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) \text{ сх.})$

Аналогично для (2) можно ввести понятие мн-ва абс. сх-сти, мн-ва усл. сх-сти.

X - мн-во сх-сти $\{f_n(x)\}$, т.е. $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \forall x \in X$

$\Rightarrow f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, $f(x)$ - предельная функция

Аналогично $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - сумма ряда

Когда сохраняются функциональные св-ва (непр, дифф...)

Равномерная сходимость

$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in X$, т.е. $\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N$:

$\forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. (поточечная сх-сть)

Опр. $\{f_n(x)\}$ равномерно сх. на X к $f(x)$, если $\forall \varepsilon > 0$

$\exists N: \forall n > N \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (f_n(x) \xrightarrow{X} f(x))$

Отсюда: $f_n(x) \xrightarrow{X} f(x) \Rightarrow \forall x \in X \quad f_n(x) \rightarrow f(x)$

Отрицание. $f_n(x) \not\xrightarrow{X} f(x)$ на X , если $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \quad \exists n > N$,

$\exists x \in X: |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$

Ряд. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{X} S(x)$ значит, что $S_n(x) \xrightarrow{X} S(x)$

$$\Gamma 1. f_n(x) \xrightarrow{X} f(x) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Примеры $X = [0, 1]$

$$1. f_n(x) = x^n \quad f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases} \quad \nrightarrow$$

$$\alpha_n \geq \lim_{x \rightarrow 1-0} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{x \rightarrow 1-0} x^n = 1 \quad (\neq 0)$$

Функциональные последовательности и ряды

$$(1) \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (2)$$

Опр. X - мн-во сх-сти посл-ств (1) (ряда (2)),

если $\forall x_0 \in X \quad \forall n_0 \geq 1 \quad \exists f_n(x_0) \quad (\exists u_n(x_0))$ и $\{f_n(x_0)\}$ сх. $(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) \text{ сх.})$

Аналогично для (2) можно ввести понятие

мн-ва абс. сх-ств, мн-ва уст. сх-ств.

X - мн-во сх-ств $\{f_n(x)\}$, т.е. $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \forall x \in X$

$\Rightarrow f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, $f(x)$ - предельная функция

Аналогично $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - сумма ряда

Когда сохраняются функциональные св-ва (непр, дифф...)

Равномерная сходимость

$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in X$, т.е. $\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N$:

$\forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. (потенциальная сх-сть)

Опр. $\{f_n(x)\}$ равномерно сх. на X к $f(x)$, если $\forall \varepsilon > 0$

$\exists N: \forall n > N \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (f_n(x) \xrightarrow{X} f(x))$

Отсюда: $f_n(x) \xrightarrow{X} f(x) \Rightarrow \forall x \in X \quad f_n(x) \rightarrow f(x)$

Отрицание. $f_n(x) \not\xrightarrow{X} f(x)$ на X , если $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \quad \exists n > N$,

$\exists x \in X: |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$

Ряд. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{X} S(x)$ значит, что $S_n(x) \xrightarrow{X} S(x)$

$$\text{Т1. } f_n(x) \xrightarrow{X} f(x) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Примеры $X = [0, 1]$

$$1. f_n(x) = x^n \quad f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases} \quad \nrightarrow$$

$$2. f_n(x) = \frac{1}{1+nx} \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & 0 < x < 1 \end{cases} \quad \nrightarrow$$

$$\alpha_n \geq \lim_{x \rightarrow 0+0} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1}{1+nx} = 1 \quad (\nrightarrow 0)$$

Функциональные последовательности и ряды

$$(1) \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (2)$$

Опр. X - мн-во сх-сти посл-ств (1) (ряда (2)),

если $\forall x_0 \in X \quad \forall n_0 \geq 1 \quad \exists f_{n_0}(x_0) \quad (\exists u_{n_0}(x_0))$ и

$\{f_n(x_0)\}$ сх. $(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) \text{ сх.})$

Аналогично для (2) можно ввести понятие

мн-ва абс. сх-сти, мн-ва уст. сх-сти.

X - мн-во сх-сти $\{f_n(x)\}$, т.е. $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \forall x \in X$

$\Rightarrow f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, $f(x)$ - предельная функция

Аналогично $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - сумма ряда

Когда сохраняются функциональные св-ва (непр, дифр...)

Равномерная сходимость

$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in X$, т.е. $\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N$:

$\forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. (поточечная сх-сть)

Опр. $\{f_n(x)\}$ равном. сх. на X к $f(x)$, если $\forall \varepsilon > 0$

$\exists N$: $\forall n > N \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ ($f_n(x) \xrightarrow{X} f(x)$)

Отсюда: $f_n(x) \xrightarrow{X} f(x) \Rightarrow \forall x \in X \quad f_n(x) \rightarrow f(x)$

Отрицание. $f_n(x) \not\xrightarrow{X} f(x)$ на X , если $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \quad \exists n > N$,

$\exists x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$

Ряд. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{X} S(x)$ значит, что $S_n(x) \xrightarrow{X} S(x)$

$$\text{Т1. } f_n(x) \xrightarrow{X} f(x) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Примеры $X = [0, 1]$

$$1. f_n(x) = x^n \quad f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases} \quad \nrightarrow$$

$$2. f_n(x) = \frac{1}{1+n^2 x^2} \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & 0 < x < 1 \end{cases} \quad \nrightarrow$$

$$3. f_n(x) = \frac{x}{1+n^2 x^2} \quad f(x) \equiv 0 \quad \Rightarrow$$

$$\varphi_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = f_n(x) = \frac{x}{1+n^2 x^2}, \quad \varphi'_n(x) = \frac{1+n^2 x^2 - 2n^2 x^2}{(1+n^2 x^2)^2} = \frac{1-n^2 x^2}{(1+n^2 x^2)^2} = 0 \quad \text{при } x = x_0 = \frac{1}{n} \in [0, 1]$$

$$\alpha_n = \sup_{x \in [0, 1]} \varphi_n(x) = \varphi_n(x_0) = \frac{1}{2n} \rightarrow 0$$

Функциональные последовательности и ряды

$$(1) \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (2)$$

Опр. X - мн-во сх-сти посл-сти (1) (ряда (2)),

если $\forall x_0 \in X \quad \forall n_0 \geq 1 \quad \exists f_n(x_0) \quad (\exists u_n(x_0))$ и $\{f_n(x_0)\}$ сх. $(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) \text{ сх.})$

Аналогично для (2) можно ввести понятие мн-ва абс. сх-сти, мн-ва усл. сх-сти.

X - мн-во сх-сти $\{f_n(x)\}$, т.е. $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \forall x \in X$
 $\Rightarrow f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, $f(x)$ - предельная функция

Аналогично $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - сумма ряда

Когда сохраняются функциональные св-ва (непр., дифр...)

Равномерная сходимость

$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in X$, т.е. $\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N$:

$$\forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (\text{поточечная сх-сть})$$

Опр. $\{f_n(x)\}$ равномерно сх. на X к $f(x)$, если $\forall \varepsilon > 0$

$$\exists N: \forall n > N \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (f_n(x) \xrightarrow{X} f(x))$$

Отсюда: $f_n(x) \xrightarrow{X} f(x) \Rightarrow \forall x \in X \quad f_n(x) \rightarrow f(x)$

Отрицание. $f_n(x) \not\xrightarrow{X} f(x)$ на X , если $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \quad \exists n > N$,

$$\exists x \in X: |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$$

Ряд. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{X} S(x)$ значит, что $S_n(x) \xrightarrow{X} S(x)$

$$\text{Т1. } f_n(x) \xrightarrow{X} f(x) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Примеры $X = [0, 1]$

$$1. f_n(x) = x^n \quad f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases} \quad \not\xrightarrow{X}$$

$$2. f_n(x) = \frac{1}{1+n^2 x^2} \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & 0 < x < 1 \end{cases} \quad \not\xrightarrow{X}$$

$$3. f_n(x) = \frac{x}{1+n^2 x^2} \quad f(x) \equiv 0 \quad \Rightarrow$$

$$4. f_n(x) = \frac{n x}{1+n^2 x^2} \quad f(x) \equiv 0 \quad \not\xrightarrow{X}$$

$$\varphi_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = f_n(x) = \frac{n x}{1+n^2 x^2}, \text{ т. макс. } x_0 -$$

$$\text{— та же } \Rightarrow \alpha_n = \varphi_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} (\not\rightarrow 0)$$

Функциональные последовательности и ряды

$$(1) \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (2)$$

Опр. X - мн-во сх-сти посл-ств (1) (ряда (2)),

если $\forall x_0 \in X \quad \forall n_0 \geq 1 \quad \exists f_n(x_0) \quad (\exists u_n(x_0))$ и $\{f_n(x_0)\}$ сх. $(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) \text{ сх.})$

Аналогично для (2) можно ввести понятие

мн-ва абс. сх-сти, мн-ва уст. сх-сти.

X - мн-во сх-сти $\{f_n(x)\}$, т.е. $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \forall x \in X$

$\Rightarrow f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, $f(x)$ - предельная функция

Аналогично $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - сумма ряда

Когда сохраняются функциональные св-ва (непр., дифф. ...)

Равномерная сходимость

$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in X$, т.е. $\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N$:

$\forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ (потенциал α -аб.)

Опр. $\{f_n(x)\}$ равном. сх. на X к $f(x)$, если $\forall \varepsilon > 0$

$\exists N$: $\forall n > N \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ ($f_n(x) \xrightarrow{X} f(x)$)

Отсюда: $f_n(x) \xrightarrow{X} f(x) \Rightarrow \forall x \in X \quad f_n(x) \rightarrow f(x)$

Отрицание. $f_n(x) \not\xrightarrow{X} f(x)$ на X , если $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \quad \exists n > N$,

$\exists x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$

Ряд. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{X} S(x)$ значит, что $S_n(x) \xrightarrow{X} S(x)$

$$\text{Т1. } f_n(x) \xrightarrow{X} f(x) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Примеры $X = [0, 1]$

$$1. f_n(x) = x^n \quad f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases} \quad \not\xrightarrow{X}$$

$$2. f_n(x) = \frac{1}{1+n^2 x} \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & 0 < x < 1 \end{cases} \quad \not\xrightarrow{X}$$

$$3. f_n(x) = \frac{x}{1+n^2 x^2} \quad f(x) \equiv 0 \quad \Rightarrow$$

$$4. f_n(x) = \frac{n x}{1+n^2 x^2} \quad f(x) \equiv 0 \quad \not\xrightarrow{X}$$

$$5. f_n(x) = n^2 x e^{-n^2 x^2} \quad f(x) \equiv 0 \quad \not\xrightarrow{X}$$

$$\varphi_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = f_n(x) = n^2 x e^{-n^2 x^2}, \quad \varphi'_n(x) = n^2(1 - 2n^2 x^2)e^{-n^2 x^2} = 0 \quad \text{при } x = x_0 = \frac{1}{n\sqrt{2}}$$

$$\alpha_n = \sup_{x \in [0, 1]} \varphi_n(x) = \frac{n}{\sqrt{2}e} \rightarrow +\infty (\neq 0)$$

Функциональные последовательности и ряды

$$(1) \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (2)$$

Опр. X -мн.-во сх-сти посл-сти (1) (ряда (2)),

если $\forall x_0 \in X \quad \forall n_0 \geq 1 \quad \exists f_n(x_0) (\exists u_n(x_0))$ и $\{f_n(x_0)\}$ сх., $(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0))$ сх.)

Аналогично для (2) можно ввести понятие

мн.-ва абс. сх-сти, мн.-ва усл. сх-сти.

X -мн.-во сх-сти $\{f_n(x)\}$, т.е. $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \forall x \in X$

$\Rightarrow f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, $f(x)$ - предельная функция

Аналогично $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - сумма ряда

Когда сохраняются функциональные св-ва (непр., дифр...)

Равномерная сходимость

$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in X$, т.е. $\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N$:

$\forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. (поточная сх-сть)

Опр. $\{f_n(x)\}$ равномер. сх. на X к $f(x)$, если $\forall \varepsilon > 0$

$\exists N: \forall n > N \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ ($f_n(x) \xrightarrow{X} f(x)$)

Отсюда: $f_n(x) \xrightarrow{X} f(x) \Rightarrow \forall x \in X \quad f_n(x) \rightarrow f(x)$

Отрицание. $f_n(x) \not\xrightarrow{X} f(x)$ на X , если $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \quad \exists n > N$,

$\exists x \in X: |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$

Ряд. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{X} S(x)$ значит, что $S_n(x) \xrightarrow{X} S(x)$

$$T1. f_n(x) \xrightarrow{X} f(x) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

T2. (Критерий Коши равномер. сх-сти функ. посл.)

$$f_n(x) \xrightarrow{X} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N: \forall n, m > N \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Функциональные последовательности и ряды

$$(1) \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (2)$$

Опр. X - мн.-во сх-сти посл-сти (1) (ряда (2)),

если $\forall x_0 \in X \quad \forall n_0 \geq 1 \quad \exists f_n(x_0) \quad (\exists u_n(x_0))$ и $\{f_n(x_0)\}$ сх. $(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ сх.)

Аналогично для (2) можно ввести понятие мн.-ва адс. сх-сти, мн.-ва усл. сх-сти.

X - мн.-во сх-сти $\{f_n(x)\}$, т.е. $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \forall x \in X$
 $\Rightarrow f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, $f(x)$ - предельная функция

Аналогично $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - сумма ряда

Когда сохраняются функциональные св-ва (непр, дифр...)

Равномерная сходимость

$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in X$, т.е. $\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N:$

$$\forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \quad (\text{поточечная сх-сть})$$

Опр. $\{f_n(x)\}$ равномер. сх. на X к $f(x)$, если $\forall \varepsilon > 0$

$$\exists N: \forall n > N \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (f_n(x) \xrightarrow{X} f(x))$$

Отсюда: $f_n(x) \xrightarrow{X} f(x) \Rightarrow \forall x \in X \quad f_n(x) \rightarrow f(x)$

Отрицание. $f_n(x) \not\xrightarrow{X} f(x)$ на X , если $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \exists n > N,$

$$\exists x \in X: |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$$

Ряд. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{X} S(x)$ значит, что $S_n(x) \xrightarrow{X} S(x)$

$$T1. f_n(x) \xrightarrow{X} f(x) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

T2. (Критерий Коши равном. сх-сти функ. посл.)

$$f_n(x) \xrightarrow{X} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N: \forall n, m > N \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Д-во. $\Rightarrow f_n(x) \xrightarrow{X} f(x)$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N: \forall n > N \quad \forall x \in X$
 $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \forall n, m > N \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - f_m(x)|$

$$\leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ т.е. верно}$$

Функциональные последовательности и ряды

$$(1) \left\{ f_n(x) \right\}_{n=1}^{\infty} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (2)$$

Опр. X - мн.-во сх-сти посл-ств (1) (ряда (2)),

если $\forall x_0 \in X \quad \forall n_0 \geq 1 \quad \exists f_{n_0}(x_0) \quad (\exists u_{n_0}(x_0))$ и

$\{f_n(x_0)\}$ сх. $\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) \text{ сх.}\right)$

Аналогично для (2) можно ввести понятие

мн.-ва абс. сх-сти, мн.-ва усл. сх-сти.

X - мн.-во сх-сти $\{f_n(x)\}$, т.е. $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \forall x \in X$

$\Rightarrow f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, $f(x)$ - предельная функция

Аналогично $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - сумма ряда

Когда сохраняются функциональные св-ва (непр., дифф...)

Равномерная сходимость

$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in X$, т.е. $\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N$:

$\forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ (потенциально)

Опр. $\{f_n(x)\}$ равномер. сх. на X к $f(x)$, если $\forall \varepsilon > 0$

$\exists N$: $\forall n > N \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ ($f_n(x) \xrightarrow{X} f(x)$)

Отсюда: $f_n(x) \xrightarrow{X} f(x) \Rightarrow \forall x \in X \quad f_n(x) \rightarrow f(x)$

Обратное. $f_n(x) \neq f(x)$ на X , если $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \quad \exists n > N$,

$\exists x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$

Ряд. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{X} S(x)$ значит, что $S_n(x) \xrightarrow{X} S(x)$

$$T1. f_n(x) \xrightarrow{X} f(x) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

T2. (Критерий Коши равномер. сх-сти функ. посл.)

$$f_n(x) \xrightarrow{X} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n, m > N \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

D-во. $\Rightarrow f_n(x) \xrightarrow{X} f(x)$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n > N \quad \forall x \in X$

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \forall n, m > N \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - f_m(x)|$$

$$\leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ т.е. верно}$$

$$\Leftarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n, m > N \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$\Rightarrow \forall x \in X$ (x -фикс.) $\{f_n(x)\}$ сх. по критерию Коши
для числ. посл-ств $\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x) \quad \forall x$

$\Rightarrow$ в нер-ве $m \rightarrow \infty \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n > N \quad \forall x \in X$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \text{ т.е. } f_n(x) \xrightarrow{X} f(x) \text{ Т. доказано.}$$

Функциональные последовательности и ряды

$$(1) \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (2)$$

Опр. X - мн-во сх-сти посл-сти (1) (ряда (2)),

если $\forall x_0 \in X \quad \forall n_0 \geq 1 \quad \exists f_n(x_0) \quad (\exists u_n(x_0))$ и

$\{f_n(x_0)\}$ сх. $(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) \text{ сх.})$

Аналогично для (2) можно ввести понятие

мн-ва абс. сх-сти, мн-ва уст. сх-сти.

X - мн-во сх-сти $\{f_n(x)\}$, т.е. $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \forall x \in X$

$\Rightarrow f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, $f(x)$ - предельная функция

Аналогично $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - сумма ряда

Когда сохраняются функциональные св-ва (непр, дифф...)

Равномерная сходимость

$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in X$, т.е. $\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N$:

$\forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ (поточечная сх-сть)

Опр. $\{f_n(x)\}$ равномер. сх. на X к $f(x)$, если $\forall \varepsilon > 0$

$\exists N$: $\forall n > N \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ ($f_n(x) \xrightarrow{X} f(x)$)

Отсюда: $f_n(x) \xrightarrow{X} f(x) \Leftrightarrow \forall x \in X \quad f_n(x) \rightarrow f(x)$

Отрицание. $f_n(x) \not\xrightarrow{X} f(x)$ на X , если $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \quad \exists n > N$,

$\exists x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$

Ряд. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{X} S(x)$ значит, что $S_n(x) \xrightarrow{X} S(x)$

$$\text{T1. } f_n(x) \xrightarrow{X} f(x) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

T2. (Критерий Коши равномер. сх-сти функ. посл.)

$$f_n(x) \xrightarrow{X} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n, m > N \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

T2' (Критерий Коши равномер. сх-сти функ. рядов)

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{X} S(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall m > n > N \quad \forall x \in X \quad \left| \sum_{k=n+1}^m u_k(x) \right| < \varepsilon$$

Специального д-ва не надо, это - формулировка для

$$\{S_n(x)\} \quad (S_n(x) = u_1(x) + \dots + u_n(x))$$

Функциональные последовательности и ряды

$$(1) \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (2)$$

Опр. X - мн-во сх-ст посл-ст (1) (ряда (2)),

если $\forall x_0 \in X \quad \forall n_0 \geq 1 \quad \exists f_n(x_0) \quad (\exists u_n(x_0))$ и $\{f_n(x_0)\}$ сх. $(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ сх.)

Аналогично для (2) можно ввести понятие мн-ва абс. сх-ст, мн-ва уст. сх-ст.

X - мн-во сх-ст $\{f_n(x)\}$, т.е. $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \forall x \in X$
 $\Rightarrow f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, $f(x)$ - предельная функция

Аналогично $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - сумма ряда

Когда сохраняются функциональные св-ва (непр, дифф...)

Равномерная сходимость

$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in X$, т.е. $\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N$:

$\forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ (поточечная сх-ст)

Опр. $\{f_n(x)\}$ равномер. сх. на X к $f(x)$, если $\forall \varepsilon > 0$

$\exists N$: $\forall n > N \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ ($f_n(x) \xrightarrow{X} f(x)$)

Отсюда: $f_n(x) \xrightarrow{X} f(x) \Rightarrow \forall x \in X \quad f_n(x) \rightarrow f(x)$

Отрицание. $f_n(x) \not\xrightarrow{X} f(x)$ на X , если $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \quad \exists n > N$,
 $\exists x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$

Ряд. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{X} S(x)$ значит, что $S_n(x) \xrightarrow{X} S(x)$

$$T1. f_n(x) \xrightarrow{X} f(x) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

T2. (Критерий Коши равномер. сх-ст функ. посл.)

$$f_n(x) \xrightarrow{X} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N: \forall n, m > N \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

T2' (Критерий Коши равномер. сх-ст функ. рядов)

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{X} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N: \forall m > n > N \quad \forall x \in X \quad \left| \sum_{k=n+1}^m u_k(x) \right| < \varepsilon$$

Специального д-ва не надо, это - формулировка для

$$\{S_n(x)\} \quad (S_n(x) = u_1(x) + \dots + u_n(x))$$

Сл. (Необх. признак равномер. сх-ст функ. рядов)

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{X} f(x) \Rightarrow u_n(x) \xrightarrow{X} 0, \text{ т.е. самос.}$$

Функциональные последовательности и ряды

$$(1) \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (2)$$

Опр. X - мн.-во сх-сти посл-сти (1) (рядов (2)), если $\forall x_0 \in X \quad \forall n_0 \geq 1 \quad \exists f_{n_0}(x_0) \quad (\exists u_{n_0}(x_0))$ и $\{f_n(x_0)\}$ сх. $(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) \text{ сх.})$

Аналогично для (2) можно ввести понятие мн.-ва адс. сх-сти, мн.-ва усл. сх-сти.

X - мн.-во сх-сти $\{f_n(x)\}$, т.е. $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \forall x \in X$
 $\Rightarrow f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, $f(x)$ - предельная функция

Аналогично $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - сумма ряда

Когда сохраняются функциональные св-ва (непр., дифф...)

Равномерная сходимость

$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in X$, т.е. $\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N$:

$$\forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (\text{поточечная сх-сть})$$

Опр. $\{f_n(x)\}$ равномерно сх. на X к $f(x)$, если $\forall \varepsilon > 0$

$$\exists N: \forall n > N \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (f_n(x) \xrightarrow{X} f(x))$$

Отсюда: $f_n(x) \xrightarrow{X} f(x) \Rightarrow \forall x \in X \quad f_n(x) \rightarrow f(x)$

Отрицание. $f_n(x) \not\xrightarrow{X} f(x)$ на X , если $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \exists n > N$,

$$\exists x \in X: |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$$

Ряд. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{X} S(x)$ значит, что $S_n(x) \xrightarrow{X} S(x)$

$$T1. f_n(x) \xrightarrow{X} f(x) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

T2. (Критерий Коши равномер. сх-сти функц. посл.)

$$f_n(x) \xrightarrow{X} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n, m > N \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

T2' (Критерий Коши равномер. сх-сти функц. рядов)

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{X} S(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall m > n > N \quad \forall x \in X \quad \left| \sum_{k=n+1}^m u_k(x) \right| < \varepsilon$$

Специального д-ва не надо, это - формулировка для

$$\{S_n(x)\} \quad (S_n(x) = u_1(x) + \dots + u_n(x))$$

C1. (Необх. признак равномер. сх-сти функц. рядов)

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{X} S(x) \Rightarrow u_n(x) \xrightarrow{X} 0, \text{ д-то самост.}$$

T3 (Вейерштрасс). $|u_n(x)| \leq c_n \quad \forall x \in X$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{ сх.} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{X} S(x)$$

$$\text{Д.во. } c_n \geq 0 \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{ сх.} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall m > n > N$$

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^m c_k < \varepsilon \Rightarrow \forall x \in X \quad \left| \sum_{k=n+1}^m u_k(x) \right| \leq$$

$$\sum_{k=n+1}^m |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^m c_k < \varepsilon \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{X} S(x)$$

Теор. д-зова