Исследование функций на монотонность.

1. Определения возрастающей и убывающей функций.

Функцию $y = f(x)$ называют возрастающей на множестве $X \subset D(f)$, если для любых двух точек x_1 и x_2 множества X, таких, что $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Функцию $y = f(x)$ называют убывающей на множестве $X \subset D(f)$, если для любых двух точек x_1 и x_2 множества X, таких, что $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

Термины «возрастающая функция» и «убывающая функция» объединяют общим названием монотонная функция.

3. Алгоритм исследования функции на монотонность.

1. Найти область определения функции $y = f(x)$: множество $X \subset D(f)$.
2. Выбрать произвольные значения аргумента x_1 и x_2 множества X такие, что $x_1 < x_2$.
3. Найти значения функции $f(x_1)$ и $f(x_2)$.
4. Если из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) < f(x_2)$, то заданная функция возрастает на $D(f)$; если из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) > f(x_2)$, то заданная функция убывает на $D(f)$.

4. Примеры исследования функций на монотонность.

- ***Исследовать на монотонность функцию:***

- 1. $y = 2 - 5x$;
- 2. $y = x^3 + 4$;
- 3. $y = x^3 + 2x^2$;
- 4. $y = -3x^3 - x$;
- 5. $y = x^{0,5} + x^5$;
- 6. $y = -x^3 - x^{0,5}$.

1. $y = 2 – 5x$.

Решение.

1. ***Область определения функции $y = 2 – 5x$: $D(y)= (- \infty ; + \infty)$.***
2. **Выберем произвольные значения аргумента x_1 и x_2 из $D(y)$ такие, что $x_1 < x_2$.**
3. **Найдем значения функции $f(x_1)= 2 – 5x_1$ и $f(x_2)= 2 – 5x_2$.**
4. ***По свойствам числовых неравенств имеем: $– x_1 > – x_2$; $2 – 5x_1 > 2 – 5x_2{}^3$.***
5. ***Итак, из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) > f(x_2)$, то заданная функция убывает на $D(y)$.***

2. $y = x^3 + 4.$

Решение.

1. ***Область определения функции $y = x^3 + 4$: $D(y) = (-\infty ; +\infty)$.***
2. ***Выберем произвольные значения аргумента x_1 и x_2 из $D(y)$ такие, что $x_1 < x_2$.***
3. ***Найдем значения функции $f(x_1) = x_1^3 + 4$ и $f(x_2) = x_2^3 + 4$.***
4. ***По свойствам числовых неравенств имеем: $x_1^3 < x_2^3$; $x_1^3 + 4 < x_2^3 + 4$.***
5. ***Итак, из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) < f(x_2)$, то заданная функция возрастает на $D(y)$.***

3. $y = x^3 + 2x^2$.

Решение.

- ***Область определения функции*** $y = x^3 + 2x^2$: $D(y) = (-\infty; +\infty)$.
- **Выберем произвольные значения *аргумента*** x_1 и x_2 **из** $D(y)$ ***такие, что*** $x_1 < x_2$.
- **Найдем значения функции** $f(x_1) = x_1^3 + 2x_1^2$ *и* $f(x_2) = x_2^3 + 2x_2^2$.
- ***По свойствам числовых неравенств имеем:*** $x_1^3 < x_2^3$; $x_1^3 + 2x_1^2 < x_2^3 + 2$.
- ***Итак, из*** $x_1 < x_2$ ***следует*** $f(x_1) < f(x_2)$, ***то*** **заданная функция *возрастает* на** $D(y)$.

4. $y = -3x^3 - x$.

Решение.

1. **Область определения функции $y = -3x^3 - x$: $D(y) = (-\infty\ ;\ +\infty)$.**
2. **Выберем произвольные значения аргумента x_1 и x_2 из $D(y)$ такие, что $x_1 < x_2$.**
3. **Вычислим значения функции $f(x_1) = -3x_1^{\,3} - x_1$ и $f(x_2) = -3x_2^{\,3} - x_2$.**
4. **По свойствам числовых неравенств имеем:**
   $-x_1^{\,3} > -x_2^{\,3}$;
   $-x_1(3x_1^{\,2} + 1) > -x_2(3x_2^{\,2} + 1)$;
   $-3x_1^{\,3} - x_1 > -3x_2^{\,3} - x_2$.
5. **Итак, из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) > f(x_2)$, то заданная функция убывает на $D(y)$.**

5. $y = x^{0,5} + x^5$.

Решение.

1. ***Область определения функции $y = x^{0,5} + x^5$: $D(y) = [\,0\ ;\ +\infty)$.***
2. **Выберем произвольные значения *аргумента* x_1 и x_2 *из* $D(y)$ *такие, что* $x_1 < x_2$ *.***
3. **Найдем значения функции** ***$f(x_1) = x_1^{0,5} + x_1^5$ и $f(x_2) = x_2^{0,5} + x_2^5$***
4. ***По свойствам числовых неравенств имеем:*** $x_1^{0,5} < x_2^{0,5}$; $x_1^5 < x_2^5$; $x_1^{0,5} + x_1^5 < x_2^{0,5} + x_2^5$.
5. ***Итак, из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) < f(x_2)$, то заданная функция возрастает на $D(y)$.***

6. $y = - x^3 - x^{0,5}$.

Решение.

1. **Область определения функции $y = – x^3 – x^{0,5}$: $D(y) = [\,0; +\infty\,)$.**
2. **Выберем произвольные значения аргумента x_1 и x_2 из $D(y)$ такие, что $x_1 < x_2$.**
3. **Вычислим значения функции $f(x_1) = – x_1^{\,3} – x_1^{0,5}$ и $f(x_2) = – x_2^{\,3} – x_2^{\,0,5}$.**
4. **По свойствам числовых неравенств имеем:**
   $– x_1^{\,3} > – x_2^{\,3}$; $– x_1^{0,5} > – x_2^{\,0,5}$;
   $–x_1^{0,5}(x_1^{\,2,5} + 1) > – x_2(x_2^{\,2,5} + 1)$;
   $– x_1^{\,3} – x_1^{0,5} > – x_2^{\,3} – x_2^{\,0,5}$.
5. **Итак, из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) > f(x_2)$, то заданная функция убывает на $D(y)$.**

Выводы.

Если вы хотите научиться плавать, то смело входите в воду, а если хотите научиться решать задачи, то решайте их.

Д.Пойа