Случайная величина

Нормальное распределение

Определение

Нормальное распределение

Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами a и σ, если её плотность распределения имеет вид:

$$\boxed{\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}}$$

Функция распределения

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}\,dt$$

Функция распределения, выраженная через функцию Лапласа

$$F(x)=0{,}5+\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$$

Математическое ожидание и дисперсия

Для случайной величины ξ, имеющей нормальное распределение, параметры a и σ имеют простой вероятностный смысл:

$$\boxed{M(\xi) = a} \qquad \boxed{D(\xi) = \sigma^2} \qquad \boxed{\sigma(\xi) = \sigma}$$

где $M(\xi)$ – математическое ожидание случайной величины ξ;

$D(\xi)$ – дисперсия случайной величины ξ;

$\sigma(\xi)$ – среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ.

Графики плотности и функции распределения

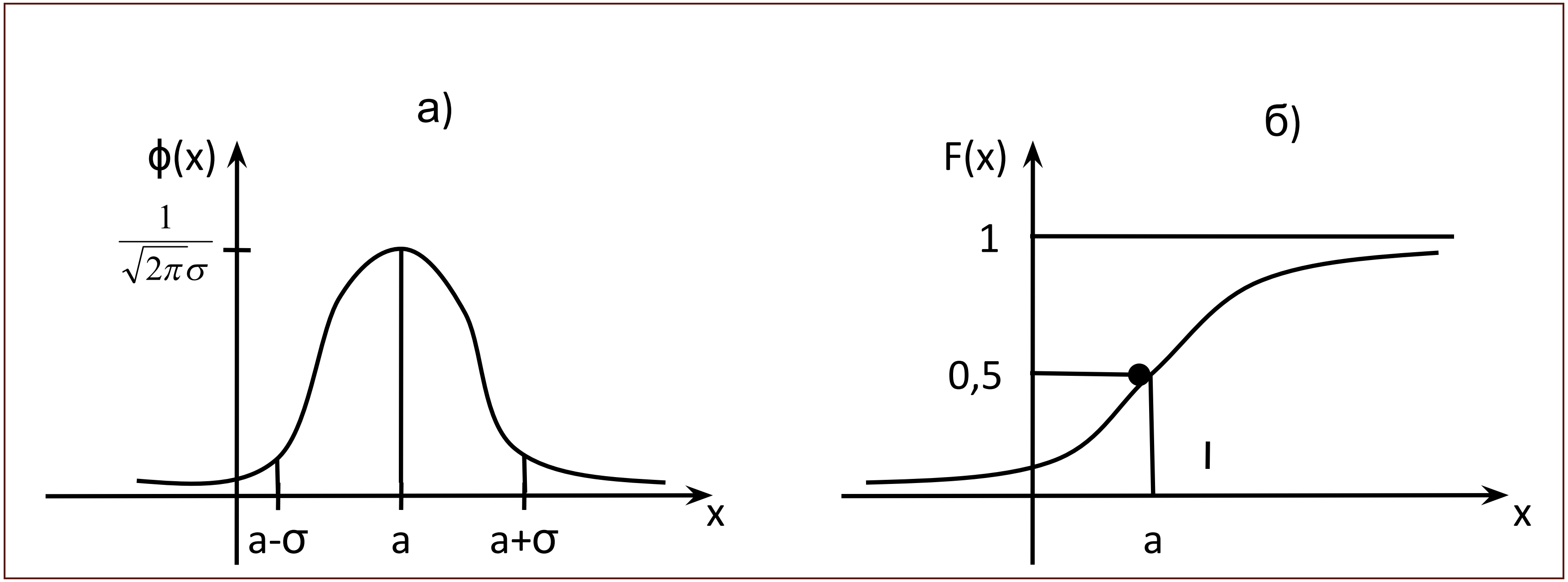

Рис. 1. Графики плотности (а) и функции (б) распределения нормального распределения

Вероятность попадания нормальной случайной величины в заданный интервал

Формула вероятности попадания нормальной случайной величины в заданный интервал:

$$P\{x_1 \le \xi < x_2\} = \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right)$$

где ξ - случайная величина;

x_1 и x_2 – границы интервала.

Если интервал полубесконечный, то на основе свойств функции Лапласа $\Phi(+\infty) = 0,5; \Phi(-\infty) = -0,5$:

$$P\{\xi < x_2\} = \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) + 0,5$$

$$P\{x \le \xi\} = 0,5 - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right)$$

Отклонение нормальной случайной величины

Вероятность заданного отклонения нормальной случайной величины от математического ожидания:

$$\boxed{P\{|\xi - a| < \varepsilon\} = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)}$$

«Правило трёх сигм»

Для нормально распределенной случайной величины практически невозможно её отклонение от математического ожидания по абсолютной величине более трех σ.

Определение

Стандартная нормальная случайная величина

Случайная величина, имеющая нормальное распределение с параметрами $a=0$ и $\sigma=1$, называется ***стандартной (нормированной) нормальной случайной величиной***, а её распределение - ***стандартным (нормированным) нормальным***.

Теорема 8.1

Если $\xi \sim N(a;\sigma)$, то $\zeta = k\xi + b \sim N(ka + b; |k|\sigma)$.

Теорема 8.2

Если $\zeta \sim N(a;\sigma)$, то $\xi_{ст} = \dfrac{\xi - a}{\sigma} \sim N(0;1)$.

Плотность и функция стандартного нормального распределения

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$F_{cm}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0{,}5 + \Phi(x)$$