Теория вероятностей и математическая статистика

Лекция 1
Пространство элементарных событий, классическая схема подсчета вероятностей Геометрические вероятности Аксиоматический подход к определению вероятности Условная вероятность Независимость событий Теоремы сложения и умножения Формула полной вероятности. Формула Байеса

- Цыганов Александр Алексеевич
- a2tsy-kaf22@yandex.ru
- https://vector.mephi.ru
- Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика
- Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистке
- Мишулина О.А. Основы теории вероятностей. М., НИЯУ МИФИ, 2011

Зачем?

Датацентр Гуггл. 1000000 процессоров. Выходят из строя. Сколько иметь в запасе?

Гипотеза произойдет ли событие? Критерий вероятность ошибки 1 и 2 рода.

Обработка данных Репрезентативность выборки. Обучение нейронной сети.

Предмет теории вероятностей

- Теория вероятностей применяется для явлений, которые носят **массовый** характер.
- Предметом теории вероятностей являются модели экспериментов со случайным исходом.
- Теория вероятностей - математическая наука, изучающая **закономерности** случайных явлений.

Испытание

- Комплекс условий G – совокупность условий проведения эксперимента
- Каждое осуществление G – **реализация**, при которой исследователя может быть интересно событие
  - Цвет светофора в 8-00 в понедельник – G
  - A_1 - зеленый
  - A_2 – красный
  - A_2 – желтый

Примеры испытаний

- Подбрасывание правильной монеты.
- Выбор карты из колоды в 36 листов.
- Подбрасывание двух игральных костей.
- Выбор двух полей на шахматной доске.
- Выстрел по мишени.
- Выбрано существительное из книги.
- Включение елочной гирлянды.
- Покупка лотерейного билета.
- Взятие изделия с конвейера.
- Зачатие ребенка.
- Фиксация курса евро на текущий день.

События

- Событие, которое обязательно произойдет в результате испытания, называется **достоверным**. Ω U
- Событие, которое не может произойти в результате испытания, называется **невозможным**. $\emptyset$ V
- **Случайное** событие, может произойти или не произойти в результате испытания.

Примеры событий

- Вынуть джокера.
- Сумма выпавших на двух костях очков равна 1.
- Сумма выпавших на двух костях очков меньше 13.
- Существительное начинается с «Ъ»
- Существительное содержит гласную букву.
- Вынута дама пик.
- Вынут дубль.
- Курс евро вырос.
- Гирлянда не светит.
- Попадание в восьмерку.
- Попадание в мишень.
- Существительное начинается с буквы «О».

Элементарное событие

- Реализация может приводить к элементарным событиям, которые неразложимы и не могут появляться одновременно

Примеры событий

- Извлечение карты из колоды в 36 листов
- Бросок шестигранной игральной кости
- Астрагалы, имели четыре грани, изготавливались из позвоночных костей некоторых животных и были не симметричны.
- У наудачу выбранного человека спрашивают, в високосном или невисокосном году он родился.

Свойства событий

- Равновозможные (понятие вероятность не определено!)
  - Реализации симметричны
- Совместные/несовместные
  - могут / не могут произойти одновременно
- Полная группа
  - хотя бы одно произойдет
- Противоположные
  - два события, образующие полную группу

Примеры событий

- Выбор черной карты, выбор красной карты.
- Выбор карты с картинкой, выбор карты с числом.
- Выбор черной карты, выбор карты с картинкой.
- На игральной кости выпало 1,2,3,4,5,6 очков.
- На игральной кости выпало простое число очков, выпало составное число очков.

Случаи и события

- Полная группа элементарных равновозможных событий – случаи
- Случай, Шанс
- Пространство случаев
  – в каждом испытании непременно реализуется один случай
  – и ни какой другой случай не реализуется
  – событие может рассматриваться, как подмножество пространства случаев

Примеры случаев

- На игральной кости выпало конкретное число очков.
- Выбор конкретной карты.
- Выпадение орла, выпадение решки.

Классическая схема расчета вероятности

- Пространство N случаев
- Событию A благоприятны M случаев
- Вероятность события A, P(A) равна

$$P(A) = \frac{M}{N}$$

Непосредственный подсчет вероятностей

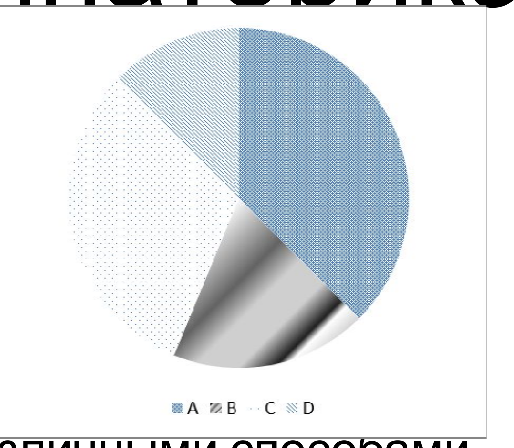
- На полке с случайном порядке расставлены 40 книг. Среди них трёхтомник А. С. Пушкина. Найти вероятность того, что эти тома стоят в порядке возрастания номеров.

$N=3!=1*2*3=6$

$M=1$

$P=1/6$

Комбинаторика



- Подсчет количества случаев
- Свойство сложения
  - Пусть некоторый объект A можно выбрать **n** различными способами, а другой объект B можно выбрать **m** способами. Тогда существует **n+m** способов выбрать либо объект A, либо объект B.

– Свойство умножения

  - Пусть объект A можно выбрать **n** способами и после каждого такого выбора объект B можно выбрать **m** способами. Тогда выбор пары (A,B) можно осуществить **n*m** способами.

Пример

- Брошены три игральные кости. Найти количество следующих событий: а) на каждой из выпавших граней появится пять очков; б) на всех выпавших гранях появится одинаковое число очков.
  - а) 1, один раз на первой, один раз на второй, один раз на третьей
    1*1*1=1
  - б) 6, один раз 1, один раз 2 и т.д., 1+1+1+1+1+1=6

Комбинаторная модель выбора

Из множества $E=\{e_1, e_2, \ldots e_n)$, содержащего n элементов, производится выбор k элементов.

	Порядок существенен	Порядок не существенен
Повторы есть	$\overline{A_n^k} = n^k$	$\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k$
Повторов нет	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	$C_n^k = \frac{n!}{k!\times(n-k)!}$

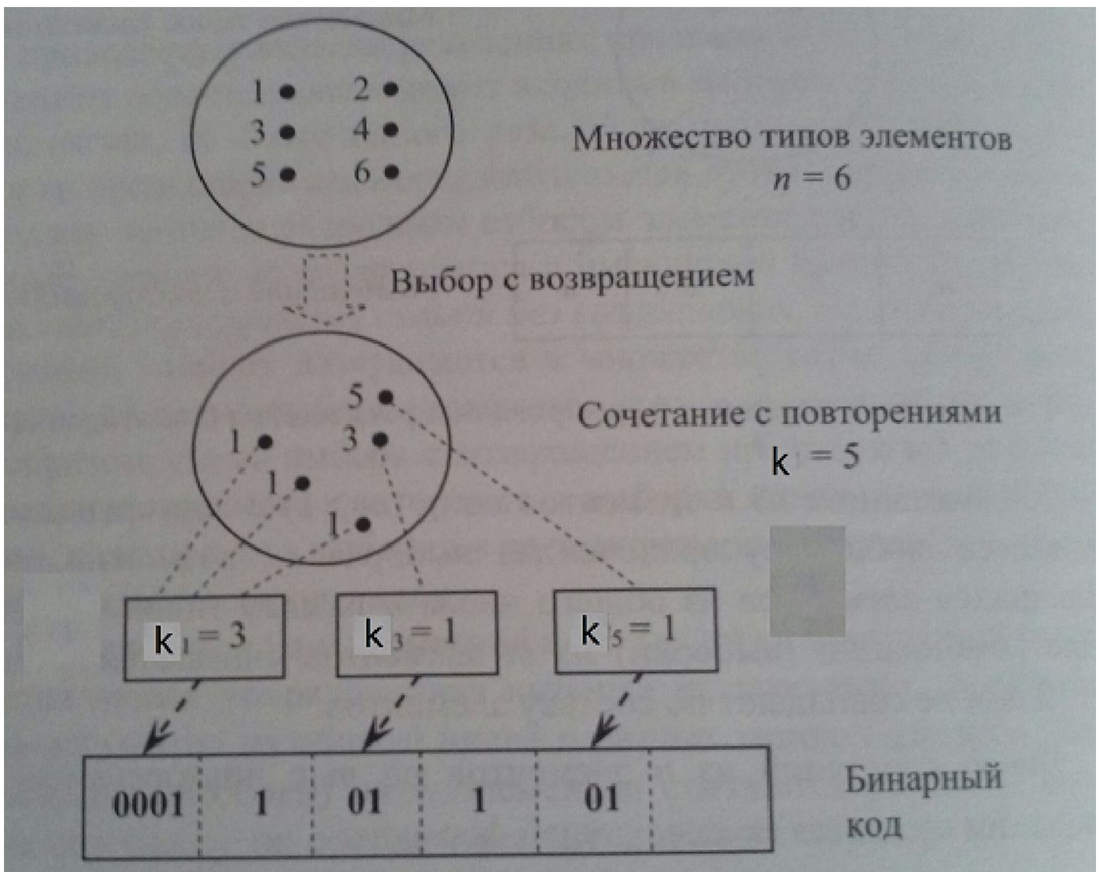
Сочетания с повторениями

Из множества $E=\{e_1, e_2, \ldots e_n)$, содержащего n элементов, производится выбор k элементов

Повторы есть

Порядок не существенен

k нулей, n-1 единица



$$\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k$$

Комбинаторная модель урн

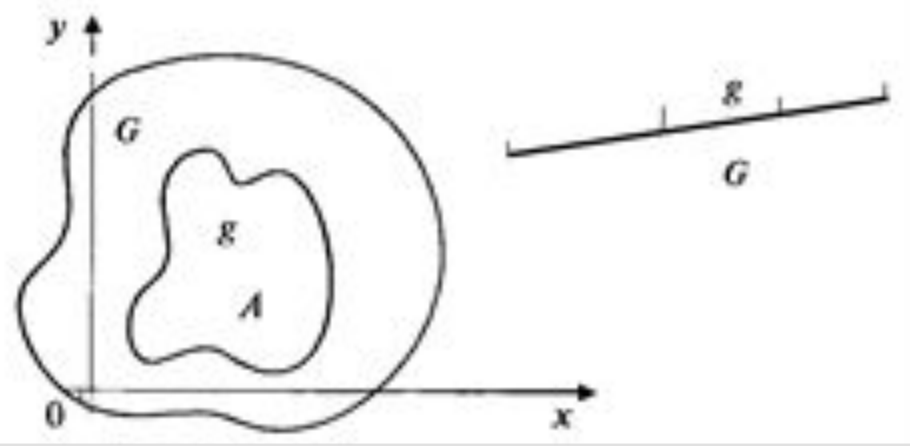
Раскладка шаров по урнам n – урн и k-шаров

	шары разные	шары одинаковые
Урны разные много шаров	$\overline{A_n^k} = n^k$	$\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k$
Урны разные один шар n>=k	$A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$	$C_n^k = \dfrac{n!}{k! \times (n-k)!}$

Геометрические вероятности

Определение. ***Геометрической вероятностью*** *события А называется отношение меры области, благоприятствующей появлению события А, к мере всей области*, т.е.

$$P(A) = \frac{\text{mes}\, g}{\text{mes}\, G}.$$



Пример

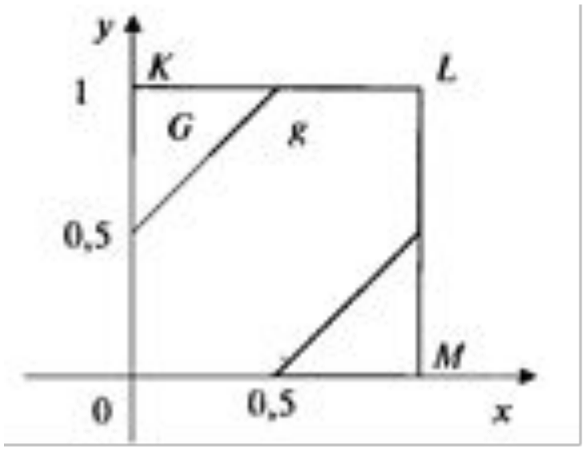
Два лица — A и B условились встретиться в определенном месте, договорившись только о том, что каждый является туда в любой момент времени между 11 и 12 ч и ждет в течение 30 мин. Если партнер к этому времени еще не пришел или уже успел покинуть установленное место, встреча не состоится. Найти вероятность того, что встреча состоится.

Решение. Обозначим моменты прихода в определенное место лиц A и B соответственно через x и y. В прямоугольной системе координат Oxy возьмем за начало отсчета 11 ч, а за единицу измерения — 1 ч. По условию $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$. Этим неравенствам удовлетворяют координаты любой точки, принадлежащей квадрату $OKLM$ со стороной, равной 1 (рис. 1.2). Событие C — встреча двух лиц— произойдет, если разность между x и y не превзойдет 0,5 ч (по абсолютной величине), т.е. $|y-x| \le 0{,}5$.

Решение последнего неравенства есть полоса $x-0{,}5 \le y \le x+0{,}5$, которая внутри квадрата на рис. представляет заштрихованную область g. По формуле

$$P(C)=\frac{S_g}{S_G}=\frac{1-2(0{,}5)\cdot 0{,}5^2}{1^2}=0{,}75,$$

так как площадь области g равна площади квадрата G без суммы площадей двух угловых треугольников.



Пространство элементарных событий

– в каждом испытании непременно реализуется одно элементарное событие
– и ни какое другое элементарное событие не реализуется
– событие может рассматриваться, как подмножество пространства элементарных событий

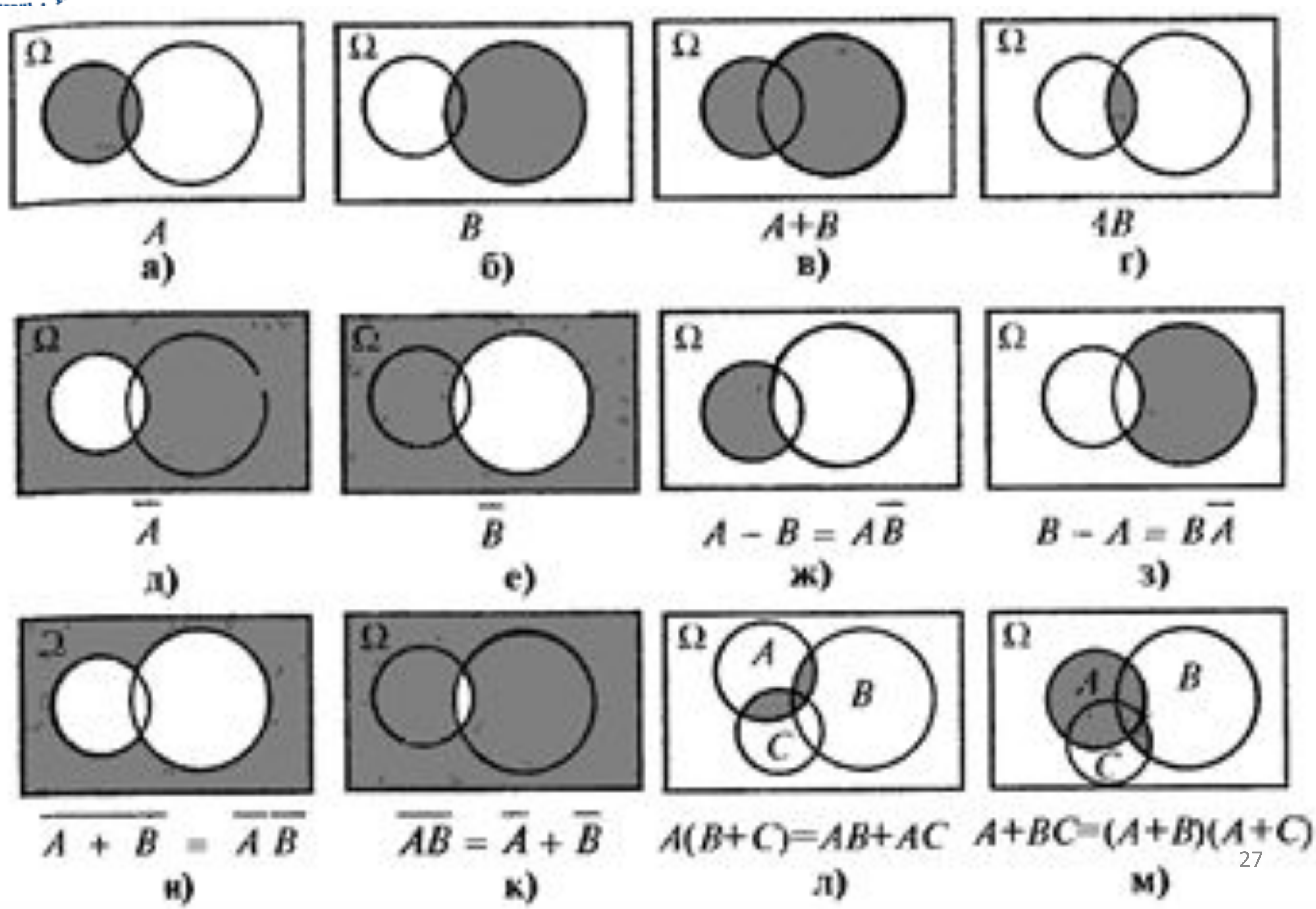
Алгебра событий(1)

- **Суммой** A+B, объединением A ∪ B, событий A и B называется событие, состоящее в том, что произошло либо A , либо B, либо оба события одновременно. A ∪ B есть множество, содержащее как элементарные исходы, входящие в A, так и элементарные исходы, входящие в B.
- **Произведением** A1*A2 , AB , пересечением A ∩ B, событий A и B называется событие, состоящее в том, что произошли оба события A и B одновременно. A ∩ B есть множество, содержащее элементарные исходы, входящие одновременно в A и в B.

Алгебра событий(2)

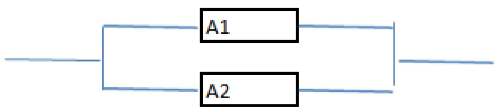
- **Противоположным** (или дополнительным) к событию А называется событие $\overline{A}$, состоящее в том, что событие А в результате эксперимента не произошло. Иначе говоря, есть множество, содержащее элементарные исходы, не входящие в А. А и $\overline{A}$ несовместны и составляют полную группу.
- **Разностью** А-В событий А и В называется событие, состоящее в том, что произошло событие А , но не произошло В. А-В есть множество, содержащее элементарные исходы, входящие в А, но не входящие в В.
- А-В= А*$\overline{B}$

Диаграммы Венна



Примеры операций

- A1 – 1-й проводит ток
- A2 – 2-й проводит ток
- A1+A2



- A1*A2

- B1 – выбрана карта с картинкой
- B2 – выбран туз.
- B1-B2

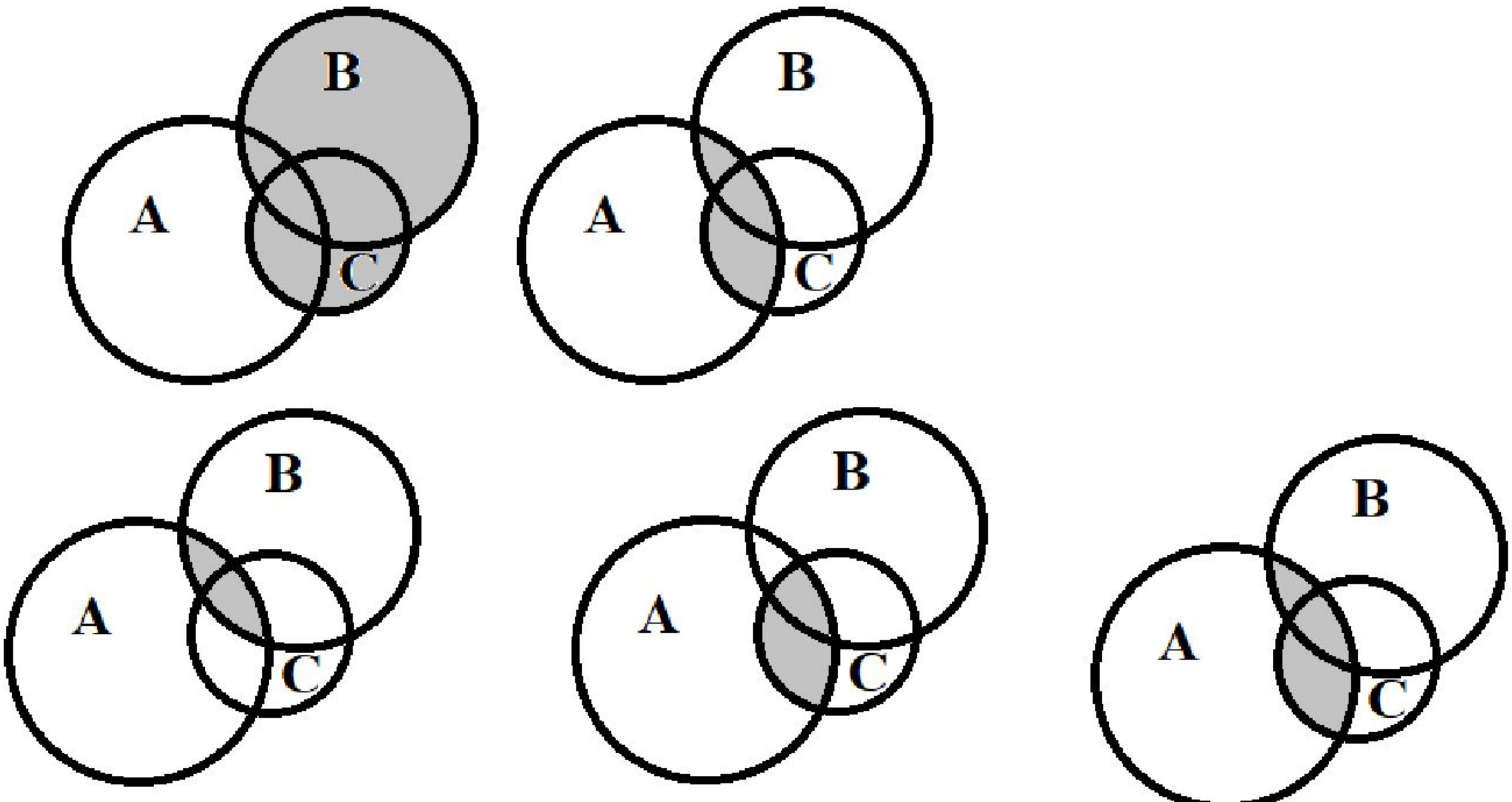
- C – черная карта.
- $\bar{C}$ - красная карта.

Законы

- Распределительный закон
  A*(B+C)=A*B+A*C
  A+B*C=(A+B)*(A+C)
- Перестановочный закон
  A+B=B+A   A*B=B*A
- Закон поглощения
  A*A=A A+A=A

- Законы де Моргана
  $\overline{A + B} = \overline{A} * \overline{B}$
  $\overline{A * B} = \overline{A} + \overline{B}$

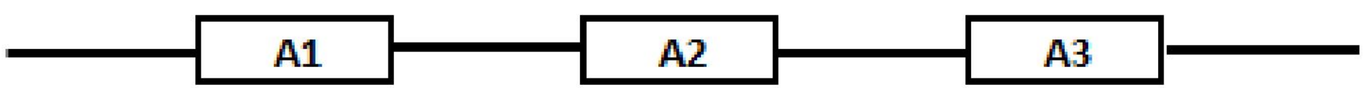
A*(B+C)=A*B+A*C вывод

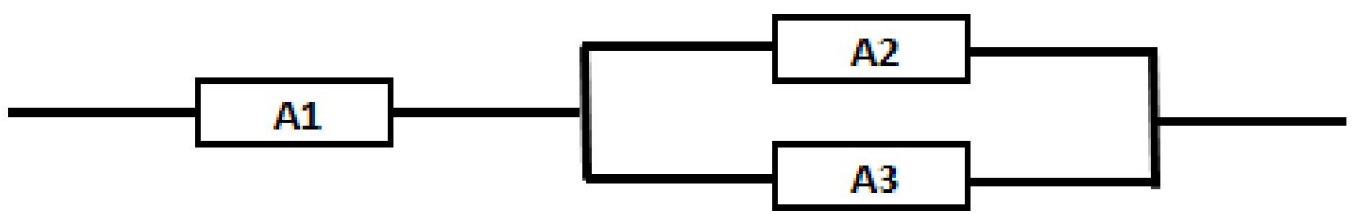


Пример

A1 – 1-й проводит ток A2 – 2-й проводит ток A3 – 3-й проводит ток

A – цепь проводит ток
$\overline{A}$ **- цепь не проводит ток**





Решение

1

A=A1*A2*A3

$$\overline{\mathrm{A}} = \overline{\mathrm{A}\mathbf{1} * \mathrm{A}\mathbf{2} * \mathrm{A}\mathbf{3}} = \overline{\mathrm{A}\mathbf{1}} + \overline{\mathrm{A}\mathbf{2}} + \overline{\mathrm{A}\mathbf{3}}$$

2

A=A1*(A2+A3)

$$\overline{\mathrm{A}} = \overline{\mathrm{A}\mathbf{1}} + \overline{\mathrm{A}2} * \overline{\mathrm{A}3}$$

Аксиоматический подход к определению вероятности

- Вероятность любого события неотрицательна:
  $P(A) \geq 0$
- Вероятность достоверного события равна 1
  $P(U)=1$
- Вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, т.е. если $A_i A_j = V$ $(i \neq j)$, то
  $P(A_1+A_2+\ldots+A_n) = P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$

Теоремы

- $P(\bar{A})=1-P(A)$ вероятность противоположного события
- $P(V)=0$ вероятность невозможного события
- $0 \leq P(A) \leq 1$ вероятность любого события
- $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

Доказательство

- P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)

  $A = A\bar{B} + AB \qquad B = AB + \bar{A}B$

  $A + B = \bar{A}B + A\bar{B} + AB$

  несовместны

  $P(A + B) = P(\bar{A}B) + P(A\bar{B}) + P(AB)$

  $P(A) = P(A\bar{B}) + P(AB)$

  $P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB)$

  $P(B) = P(AB) + P(\bar{A}B)$

  $P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB)$

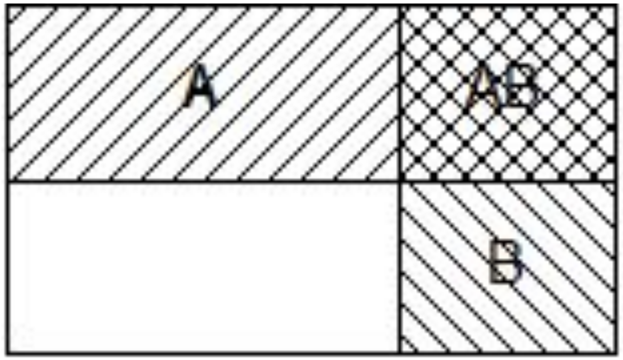
  $P(A + B) = P(B) - P(AB) + P(A) - P(AB) + P(AB)$

- P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)

Условная вероятность

- Условной вероятностью события *A*, при условии, что произошло событие *B*, называется число

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$



Пример

- В урне 3 белых 3 черных шара. Найти вероятность последовательного появления черного (А) и белого (В) шаров.
  а) P(B/A)=3/5
  б) P(B/A)=P(AB)/P(A)
  P(A)=3/6
  P(AB)=(3*3)/(6*5)=3/10
  P(B/A)=(3/10)/(3/6)=3/5

Независимость событий

- P(AB)=P(A)P(B/A) для произвольных событий
- P(AB)=P(A)P)B) для независимых событий

-

A1 – 1-й проводит ток A2 – 2-й проводит ток A3 – 3-й проводит ток

A – цепь проводит ток

P(A)>0 P(B)>0

$\bar{A}$ - цепь не проводит ток

Примеры

- P(A)=0,7; P(B)=0,2; P(AB)=0,14
  НЕЗАВИСИМЫ
- P(A)=0,7; P(B)=0,05; P(A+B)=0,75
  A и B зависимы?
  P(A)+P(B)=0,75
  ЗАВИСИМЫ

1•

$$A=A1*A2*A3$$

$$\overline{A} = \overline{A1 * A2 * A3} = \overline{A1} + \overline{A2} + \overline{A3}$$

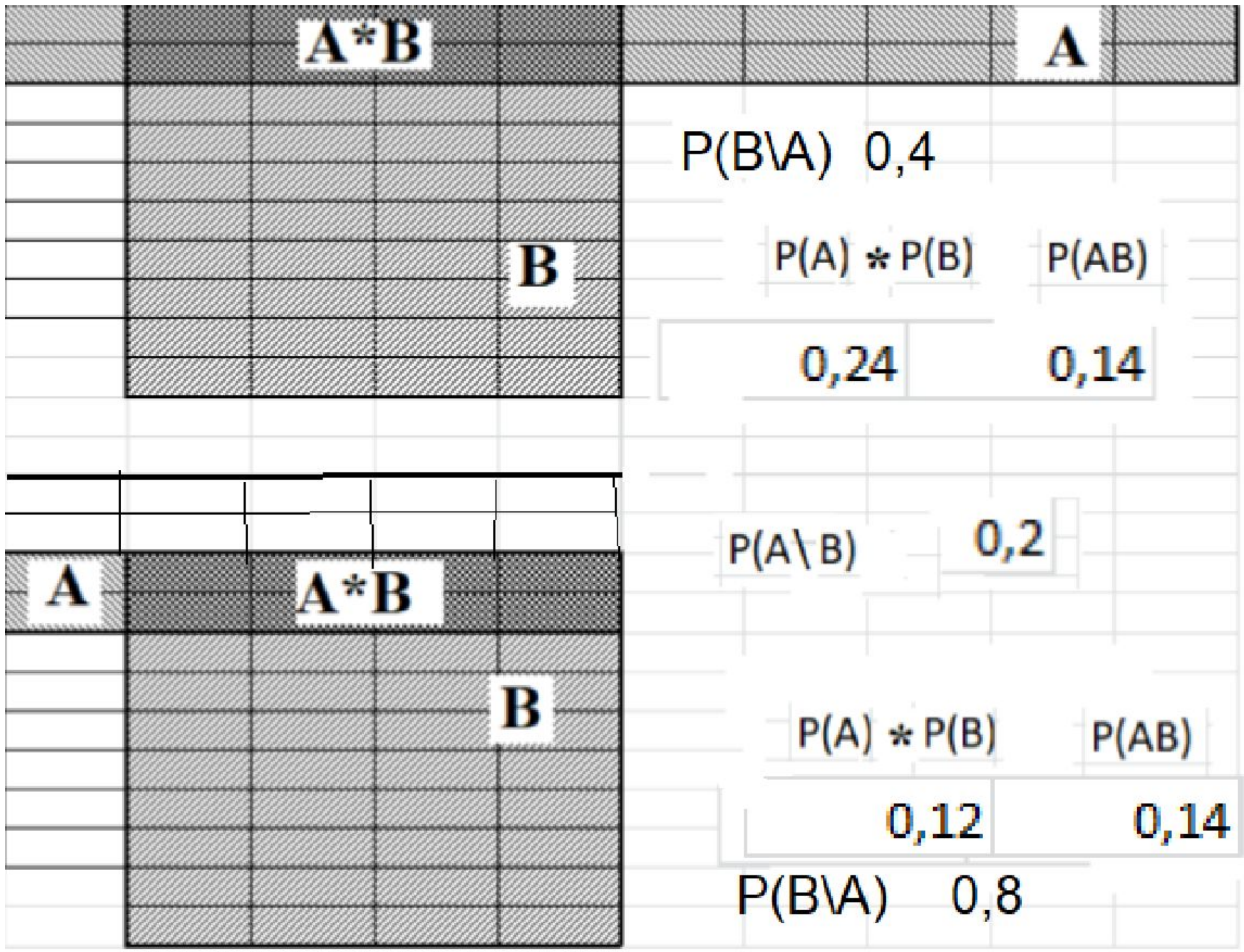
2

$$A=A1*(A2+A3)$$

$$\overline{A}=\overline{A1}+\overline{A2}*\overline{A3}$$

	зависимы	независимы
совместны		
несовместны		

Примеры

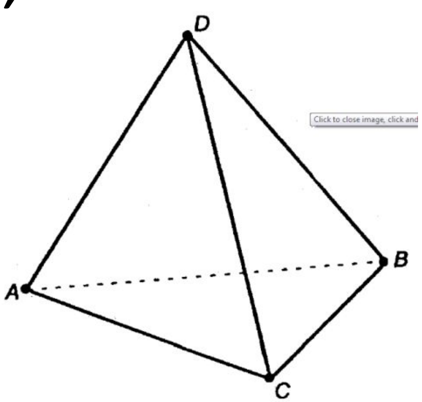


Попарная независимость и Независимость в совокупности

- $P(AiAj)=P(Ai)P(Aj)$, $1 \le i<j \le n$
  $P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n)$

Пример Бернштейна

- Тетраэдр.
  Грани: красная, зеленая, синяя и трехцветная
- А – выпадение грани, содержащей красный, В – зеленый, С – синий
  P(A)=P(B)=P(C)=0,5; P(A/B)=0,5; P (B/C)=0,5 …
  P(ABC)=0,25; P(A)P(B)P(C)=0,1
  попарная независимость есть,
  в совокупности зависимы



Теорема умножения вероятностей

- $P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)\ldots P(A_n/A_1A_2\ldots A_{n-1})$
- Доказательство (по индукции)
- 1) $P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2/A_1)$
- 2) Пусть $P(A_1A_2\ldots A_{n-1})=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)\ldots P(A_{n-1}/A_1A_2\ldots A_{n-2})$
  3) Пусть $B=A_1A_2\ldots A_{n-1}$, тогда $P(A_1A_2\ldots A_n)=$
  $P(BA_n)=P(B)P(A_n/B)=$
  $= P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)\ldots P(A_n/A_1A_2\ldots A_{n-1})$

Примеры

- Вероятности поражении цели первым стрелком равнаP(A)= 0,8, вторым P(B)=0,6. Найти вероятности следующих событий: а) C -цель поражена двумя попаданиями; б) D -цель не поражена.
- C=AB P(C) =P(A)P(B)=0,48 независимы
- D=$\overline{A+B} = \overline{A} * \overline{B} \quad P(\overline{A} * \overline{B}) =$ 0,08

- Студент знает 20 вопросов из 25-ти. Найти вероятность того, что студент знает предложенные ему экзаменатором три вопроса.
- P=(20/25)*(19/24)*(18/23) ≈0,496

Теорема сложения вероятностей

- $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ для совместных
- $P(A+B)=P(A)+P(B)$ для не совместных

- Для независимых, а следовательно совместных
  $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$

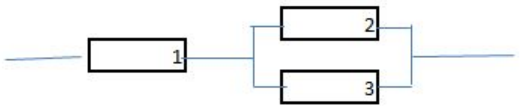
Теорема сложения вероятностей Доказательство

- P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)
  $A + B = \bar{A}B + A\bar{B} + AB$ несовместны
  $$P(A + B) = P(\bar{A}B) + P(A\bar{B}) + P(AB)$$
  $$A = A\bar{B} + AB \qquad P(A) = P(A\bar{B}) + P(AB)$$
  $$P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB)$$
  $$B = AB + \bar{A}B \qquad P(B) = P(AB) + P(\bar{A}B)$$
  $$P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB)$$
  $$P(A + B) = P(B) - P(AB) + P(A) - P(AB) + P(AB)$$
- P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)

Примеры

- Вероятности поражении цели первым стрелком равнаP(A)= 0,8, вторым P(B)=0,6. Найти вероятности следующего события: E -цель поражена одним попаданием.
- $E = A\bar{B}$+$\bar{A}$B несовместны P(E)= 0,8*0,4+0,2*0,6=0,44

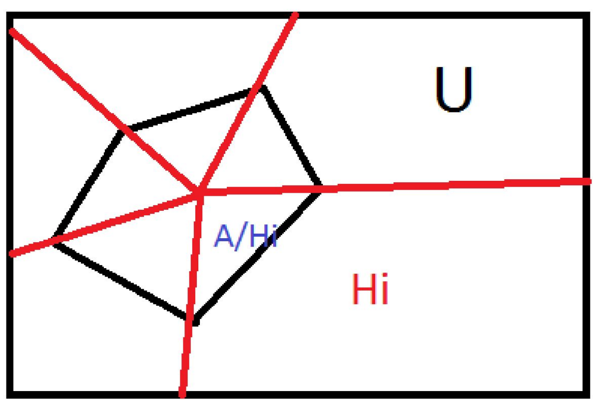
- Три лампочки соединены в цепь.



- Вероятность того, что одна (любая) лампочка перегорит, если напряжение в сети превысит номинальное, равна 0,6. Найти вероятность того, что при повышенном напряжении тока в цепи не будет.
P=1-(1-P①)(1-P②P③)=
1-(1-0,6)(1-0,6*0,6)=0,744

Формула полной вероятности

- Гипотезы H_i, $1 \le i \le n$, $H_i H_j = V$, $\sum H_i = U$
- $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\, P(A/H_i)$



Примеры

- Сообщение можно передать письмом, по телефону и по факсу с одинаковой вероятностью. Вероятность того, что сообщение дойдет до получателя в каждой из перечисленных возможностей соответственно равны 0.7, 0.6 и 0.9. Какова вероятность получения сообщения?

1/3	0,7	0,2333
1/3	0,6	0,2000
1/3	0,9	0,3000
		0,7333

Теорема Байеса

- Гипотезы H_i, $1 \le i \le n$, $H_i H_j = V$, $\sum H_i = U$
- $AH_i = AH_i$
- $P(AH_i) = P(AH_i)$
- $P(A)P(H_i/A) = P(H_i)P(A/H_i)$
- $P(H_i/A) = \dfrac{P(Hi)P(A/Hi)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)}$
- $P(H)$ до опыта
- $P(H_i/A)$ после опыта, событие А произошло

Примеры

- Сообщение можно передать письмом, по телефону и по факсу с одинаковой вероятностью. Вероятность того, что сообщение дойдет до получателя в каждой из перечисленных возможностей соответственно равны 0.7, 0.6 и 0.9. Сообщение адресатом получено, какова вероятность, что оно передано по факсу?

1/3	0,7	0,2333	
1/3	0,6	0,2000	
1/3	0,9	0,3000	0,409
		0,7333	

Вопросы к лекции

- Приведите примеры достоверного, невозможного и случайного событий
- Чему равна сумма событий U+V?
- Чему равно произведение событий UV? Что называется условной вероятностью?
- Напишите формулу умножения вероятностей
- Как на диаграмме Венна представляется сумма событий?
- U+V=?
- Являются ли гипотезы независимыми в теореме Байеса?