Физика. Лекция 9

Молекулярная физика. Распределение Максвелла.

В.И. Читайкин
кандидат физико-математических наук
доцент

План лекции

	Наименование раздела	Номер слайда
	Введение	3
1	Основы статистического анализа случайных величин	4
2	Распределение Максвелла	13
	Вопросы в экзаменационных билетах	17

Введение

Общие замечания

Эта лекция продолжает молекулярно-кинетическое исследование вещества, начатое в предыдущей лекции №8.

Лекция состоит из двух разделов.
Раздел 1 – основы статистического анализа случайных величин.
Раздел 2 – собственно распределение Максвелла.

Первый раздел, являющийся по преимуществу математическим, необходим для понимания и вывода основных формул второго раздела.

Раздел 1.
Основы статистического анализа случайных величин

1. Основы статистического анализа

1.1 Предпосылки для применения статистического анализа

Главное положение молекулярной теории вещества *(из прошлой лекции)*:

все процессы, протекающие в веществе, обусловлены совокупным действием ***огромного числа частиц*** этого вещества, поведение которых случайно, хаотично.

Свойства, параметры вещества (температура, давление и др.) определяются ***усреднёнными*** значениями характеристик частиц (скорость, энергия и т.д.), а не характеристиками отдельных молекул, атомов.

Статистический анализ позволяет рассчитывать ***средние*** значения необходимых характеристик.

1. Основы статистического анализа

1.2 Случайные величины

Случайные величины в нашем случае идеального газа – это:

- координата частиц x.
- значение скорости частиц v.

<u>*Замечание:*</u> *Рассматриваем одномерный случай, для простоты.*

В силу хаотического поведения частиц, величины x и v случайны, т.е. они могут принимать произвольные значения в интервале от минус до плюс бесконечности:

$$-\infty < x < +\infty, \qquad -\infty < v < +\infty.$$

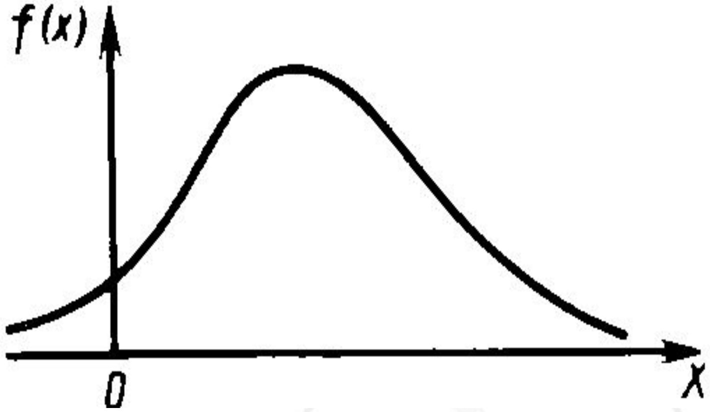
Величины x и v также будут случайными, если интервал их изменений будет ограничен сверху и/или снизу, например:

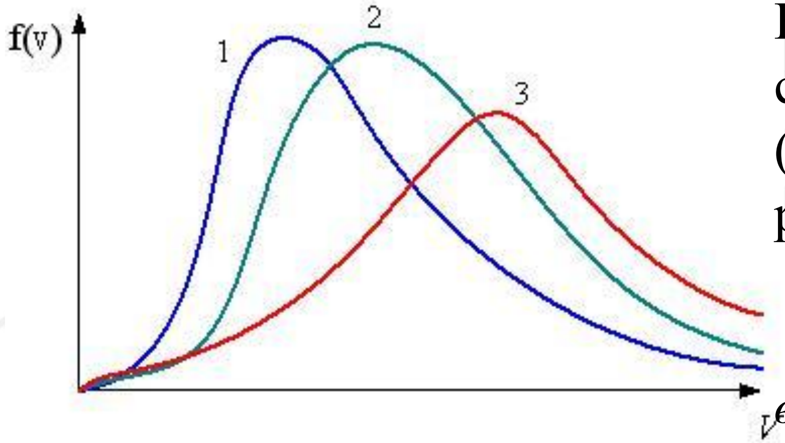
- из-за наличия «жёстких» стенок: $a \le x \le b$,
- если рассматривать модуль скорости: $0 \le |\mathbf{v}| < +\infty$.

1. Основы статистического анализа

1.2 Функция распределения случайной величины

Случайные величины *x* и *v* могут быть распределены неравномерно, в некоторых областях они могут «встречаться» чаще, в других – реже.





В зависимости от задачи распределения случайных величин могут не совпадать (например, кривые 1, 2, 3 на правом рисунке), но принципиально они похожи.

Здесь и далее будет рассматри - ваться модуль скорости частиц v.

Функции f(x) и f(v) называются функциями распределения по координатам частицы *x* и по модулю скорости частицы *v*, соответственно.

1. Основы статистического анализа

1.3 Функция распределения и вероятность

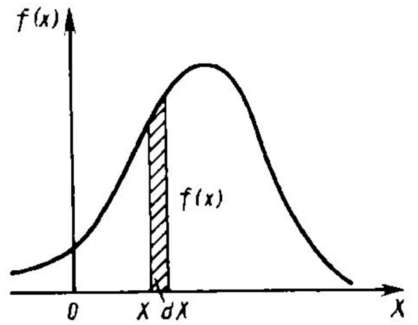
По физическому смыслу функция распределения и вероятность связаны друг с другом. Более строго:

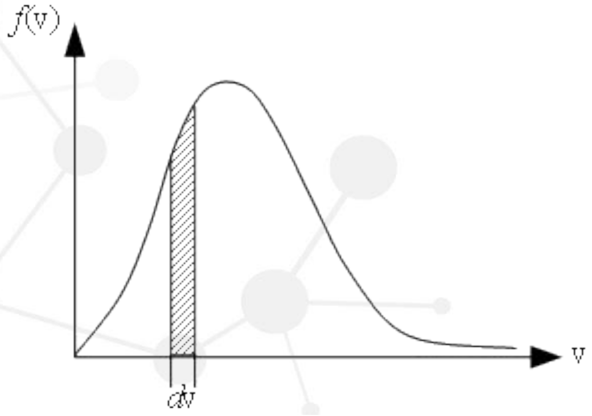
Вероятность нахождения частицы в окрестности точки *x* есть $dP(x) = f(x) \times dx$.

Вероятность того, что значение модуля скорости частицы лежит в окрестности значения *v*, есть $dP(v) = f(v) \times dv$.

Тогда функция распределения есть *плотность вероятности*:

$$f(x) = dP(x) / dx, \qquad f(v) = dP(v) / dv.$$



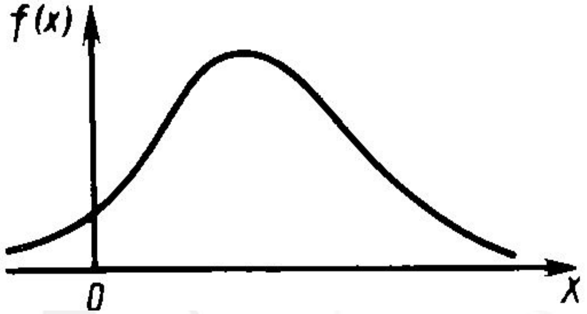


Заштрихованный «столбик» – это вероятность

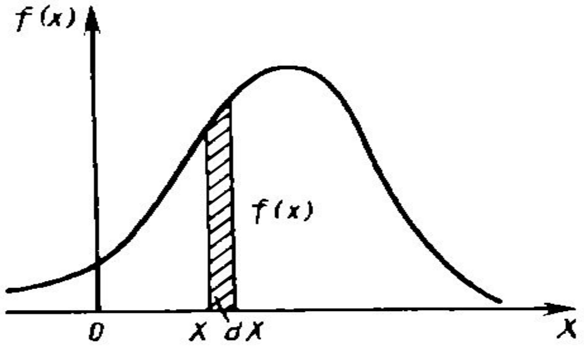
1. Основы статистического анализа

1.4 Нормировка функции распределения (на примере распределения по координатам)

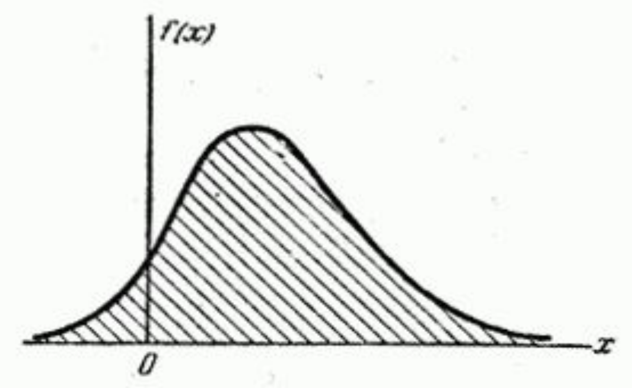
Вероятность того, что частица может быть обнаружена во всей области ($-\infty < x < +\infty$) равна 1.



Плотность вероятности
(она же: функция распределения)



Заштриховано: вероятность обнаружить частицу вблизи точки x: $dP(x) = f(x) \times dx$



Заштриховано: вероятность обнаружить частицу во всей области: $P = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Функция распределения f(x) называется нормированной, если выполняется условие нормировки: $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1}$

1. Основы статистического анализа

1.5 Среднее значение случайной величины

В математике среднее значение любой случайной величины, например, координаты x, называется математическим ожиданием.

1. ***Математическое ожидание*** непрерывной случайной величины определяется по формуле:

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx.$$

Допускаются различные обозначения:

$$M[X] = x = \langle x \rangle = x_{ср}$$

Обязательное условие:
Функции f(x), f(v) должны быть нормированы.

Среднее значение модуля случайной величины скорости частицы v рассчитывается аналогично:

$$\langle v \rangle = \int_{0}^{\infty} v \cdot f(v)\,dv.$$

1. Основы статистического анализа

1.6 Случайные процессы, расчёт среднего значения

Случайный процесс – это случайное, без видимых причин, *непрерывное* изменение ***во времени*** какой-либо величины x: координаты частицы x или модуля скорости v.

Случайное изменение во времени величины $x(t)$.

Также может выглядеть график $v(t)$.

Среднее по времени значение величины x рассчитывается так: $\bar{x} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt.$

Статистический ансамбль – это последовательность *дискретных* случайных значений $\{x_i\}$.

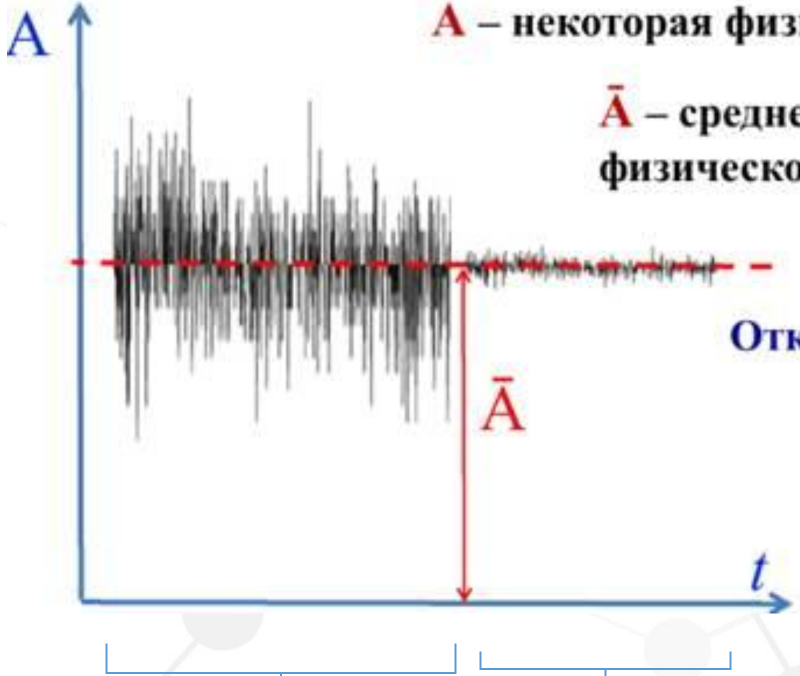
Среднее по «ансамблю» значение величины x рассчитывается так:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

1. Основы статистического анализа

1.7 Флуктуации

Флуктуации – это отклонения от среднего значения, вызванные случайными причинами.



A – некоторая физическая величина (координата x или модуль скорости v)

$\bar{A}$ – среднее значение этой физической величины

Отклонение от среднего

$$\Delta A = A - \bar{A}$$ Величина флуктуации

$$\overline{\Delta A} = 0$$

Важное свойство флуктуаций:
среднее их значение равно нулю

Большие флуктуации   Малые флуктуации

Характеристики флуктуаций

1. Дисперсия (среднеквадратичное отклонение от среднего):

$$\sigma = \overline{(A - \bar{A})^2} = \overline{(\Delta A)^2}$$

2. Флуктуация (стандартное отклонение):

$$\delta = \sqrt{\sigma} = \sqrt{\overline{(\Delta A)^2}}$$

Раздел 2.
Распределение Максвелла

2. Распределение Максвелла

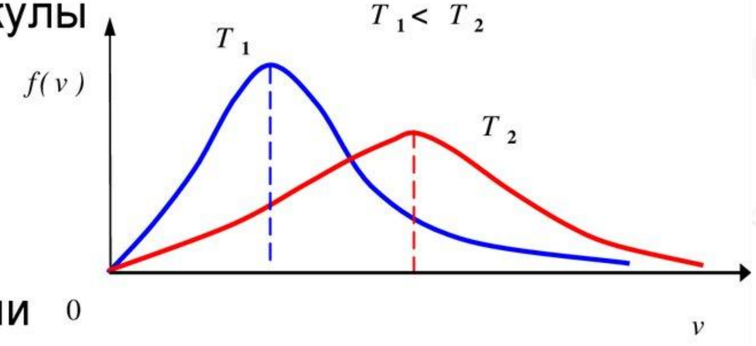
2.1 Формула распределения Максвелла

Распределение Максвелла – это функция распределения частиц идеального газа (атомов, молекул) по модулю скорости v.

$$f(v) = \frac{dn}{ndv} = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot v^2 \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}}.$$

m – масса молекулы

Распределение найдено с применением методов теории вероятности.



T – температура идеального газа

$dn(v)$ – число частиц, модуль скорости которых лежит в интервале $(v, v+dv)$

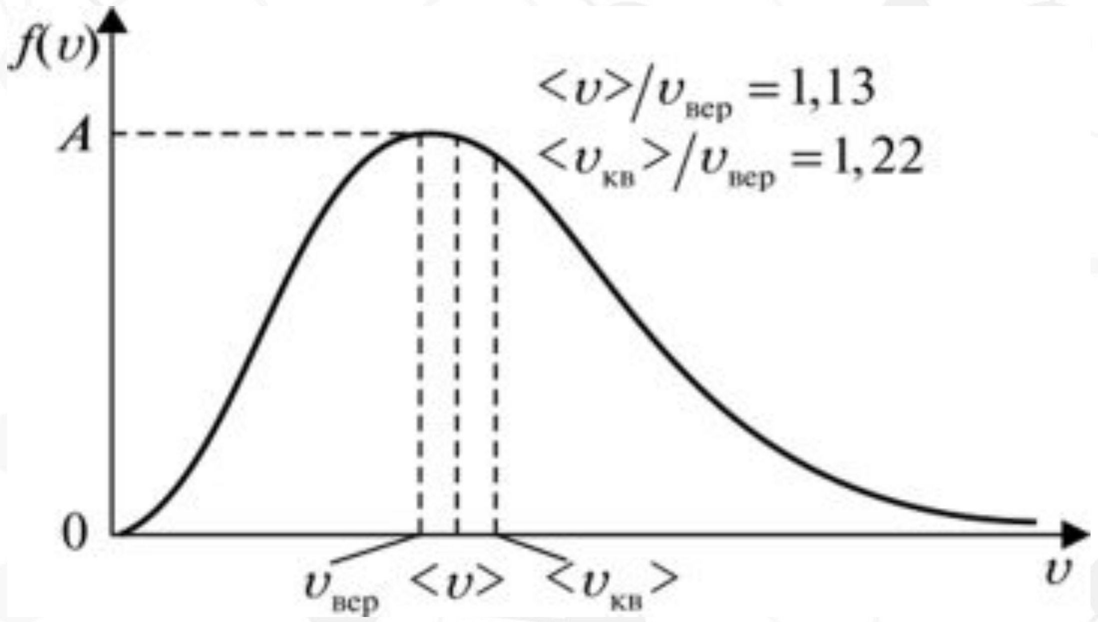
n – полное число частиц в рассматриваемой области

Распределение Максвелла – **нормированное:** $\int_0^\infty f(v)dv = 1$

Основная функциональная зависимость: $f(v) \sim v^2 \times exp(-mv^2/2kT)$

2. Распределение Максвелла

2.2 Характерные скорости частиц в распределении Максвелла



1) наиболее вероятная скорость

$$v_{вер} = \sqrt{\frac{2kT}{m_m}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}},$$

2) средняя скорость

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}},$$

3) среднеквадратичная скорость

$$\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}.$$

m_m – масса частицы (атома, молекулы)

μ – молярная масса

Максимум распределения Максвелла:

$$A = (4\pi/e) \times (m/2\pi kT)^{1/2}\ с/м$$

2. Распределение Максвелла

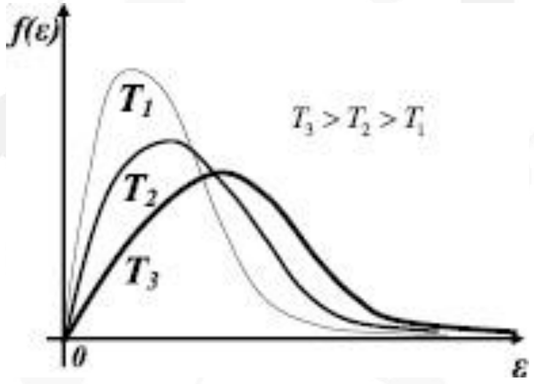
2.3 Распределение Максвелла по энергии частиц

Из уравнения для кинетической энергии: $E = mv^2/2$, получим:

$$v = (2E/m)^{1/2} \quad \text{и} \quad dv = (2mE)^{-1/2}dE \qquad (1)$$

Подставим (1) в распределение Максвелла по скоростям (слайд 14), получим распределение Максвелла по энергии частиц E (или ε):

$$f(E) = \frac{2\pi}{(\pi kT)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{E}\,e^{-\frac{E}{kT}}$$



Средняя кинетическая энергия молекул идеального газа: $\boxed{\overline{E} = \frac{3}{2}kT}$

Нетрудно получить самим, используя правило расчёта среднего значения (слайд 10): $M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx.$ *Вместо x надо подставить E, вместо f(x) – f(E).*

Вопросы в экзаменационных билетах

1. Основы статистического анализа. Функция распределения случайных величин.

2. Основы статистического анализа. Средние значения случайных величин.

3. Основы статистического анализа. Случайные процессы. Флуктуации.

4. Распределение Максвелла. Формула, характерные скорости частиц.

5. Распределение Максвелла по энергии частиц.

Важно:
Вопросы совпадают с названиями разделов и подразделов лекции

Спасибо за внимание