Обратные тригонометрические функции
Решение тригонометрических уравнений

Доцент кафедры
«Математическое преобразование»
Монахова О.А.

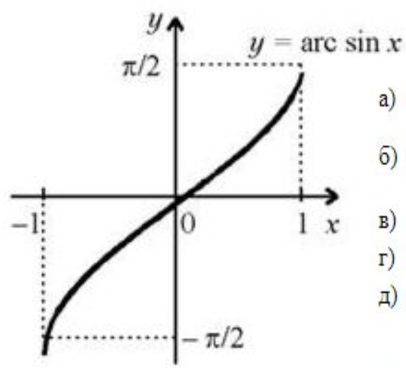
АРКСИНУС И ЕГО ГРАФИК

Арксинусом числа $y \in [-1, 1]$ называется такая дуга $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, синус которой равен y, т.е.

$$(\forall y \in [-1,1])\ \ (\arcsin y = x) \quad \Leftrightarrow \quad \left(x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) \text{ L } (\sin x = y).$$

Функция $x = \arcsin y$ является обратной к функции $y = \sin x$ на отрезке $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Для исходной и обратной функций привычнее аргументы и функцию обозначать одними и теми же буквами: $y = \sin x$, $y = \arcsin x$.

В таких обозначениях графики указанных функций симметричны относительно прямой $y = x$. Поэтому, нарисовав график функции $y = \sin x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и симметрично отобразив его относительно прямой $y = x$, получим график арксинуса.



а) *Область определения*: $D(\arcsin x) = [-1, 1]$.

б) *Множество значений*: $E(\arcsin x) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

в) *Четность, нечетность*: функция нечетная.

г) *Нули функции*: $\arcsin x = 0$ при $x = 0$.

д) *Промежутки знакопостоянства*:

$\arcsin x > 0$ при $x \in (0, 1]$, $\arcsin x < 0$ при $x \in [-1, 0)$.

е) *Промежутки монотонности*: функция возрастает на всей области определения.

ж) *Экстремумы*: нет.

з) Справедливы следующие тождества:

$\sin(\arcsin x) \equiv x \quad (\forall x \in [-1, 1])$; $\quad \arcsin(\sin y) \equiv y \quad \left(\forall y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$.

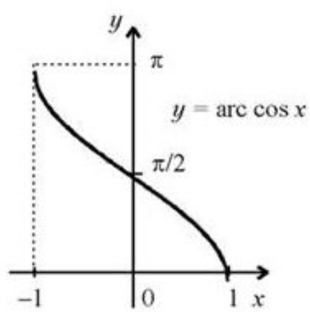
АРКОСИНУС И ЕГО ГРАФИК

Арккосинусом числа $y \in [-1,\ 1]$ называется такая дуга $x \in [\,0\,,\ \pi]$, косинус которой равен y, т.е.

$$(\forall\, y \in [-1,1])\ \ (\arccos y = x) \quad \Leftrightarrow \quad (x \in [0,\pi])\ \mathrm{L}\ (\cos x = y).$$

Функция $x = \arccos y$ является обратной к функции $y = \cos x$ на отрезке $x \in [\,0,\ \pi]$. Для исходной и обратной функций привычнее аргументы и функцию обозначать одними и теми же буквами: $y = \cos x$, $y = \arccos x$.

График функции $y = \arccos x$ приведен на рисунке.



а) *Область определения*: $D(\arccos x) = [-1,\ 1]$.

б) *Множество значений*: $E(\arccos x) = [0,\ \pi]$.

в) *Четность, нечетность*: функция не является ни четной, ни нечетной.

г) *Нули функции*: $\arccos x = 0$ при $x = 1$.

д) *Промежутки знакопостоянства*: $\arccos x > 0$ при $x \in [-1,\ 1)$.

е) *Промежутки монотонности*: функция убывает на всей области определения.

ж) *Экстремумы*: нет.

з) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x \qquad (\forall\ x \in [-1,\ 1])$.

и) Справедливы следующие тождества:

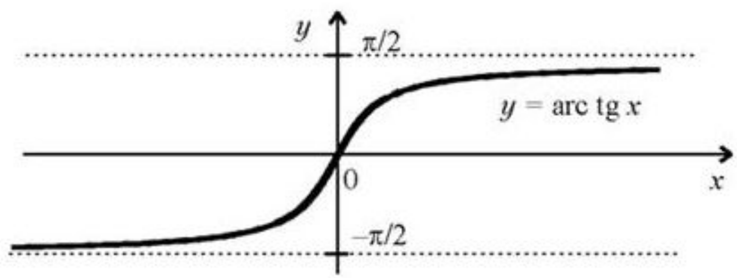
$$\cos(\arccos x) \equiv x \quad (\forall x \in [-1, 1]); \qquad \arccos(\cos y) \equiv y \quad (\forall y \in [0, \pi])$$

АРКТАНГЕНС И ЕГО ГРАФИК

Арктангенсом числа $y \in \mathbf{R}$ называется такая дуга $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которой равен y, т.е.

$$(\forall y \in \mathbf{R}) \quad (\operatorname{arctg} y = x) \quad \Leftrightarrow \quad \left(x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right) \ \mathrm{L} \ (\operatorname{tg} x = y).$$

Функция $x = \operatorname{arctg} y$ является обратной к функции, $y = \operatorname{tg} x$ на интервале $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Для исходной и обратной функций привычнее аргументы и функцию обозначать одними и теми же буквами: $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{arctg} x$. График функции $y = \operatorname{arctg} x$ приведен на рисунке.



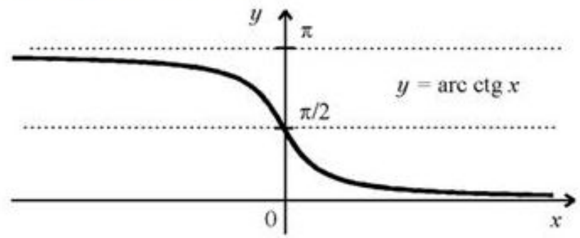
АРКОТАНГЕНС И ЕГО ГРАФИК

Арккотангенсом числа $y \in \mathbf{R}$ называется такая дуга $x \in [0, \pi]$, котангенс которой равен y, т.е.

$$(\forall y \in \mathbf{R}) \quad (\operatorname{arcctg} y = x) \quad \Leftrightarrow \quad (x \in (0, \pi)) \ \mathrm{L} \ (\operatorname{ctg} x = y).$$

Функция $x = \operatorname{arcctg} y$ является обратной функции $y = \operatorname{ctg} x$ на интервале $x \in (0, \pi)$. Для исходной и обратной функций привычнее аргументы и функцию обозначать одними и теми же буквами: $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

График функции $y = \operatorname{arcctg} x$ приведен на рисунке.



а) *Область определения*: $D(\operatorname{arcctg} x) = \mathbf{R}$.

б) *Множество значений*: $E(\operatorname{arcctg} x) = (0, \pi)$.

в) *Четность, нечетность*: функция не является ни четной, ни нечетной.

г) *Нули функции*: нет.

д) *Промежутки знакопостоянства*: $\operatorname{arcctg} x > 0$ при всех x.

е) *Промежутки монотонности*: функция убывает на всей области определения.

ж) *Экстремумы*: нет.

з) $\operatorname{arccctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x \quad (\forall x \in \mathbf{R})$.

и) Справедливы следующие тождества:

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) \equiv x \quad (\forall x \in \mathbf{R}); \qquad \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} y) \equiv y \quad (\forall y \in (0, \pi))$$

ЗНАЧЕНИЯ ОБРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ЧАСТО ВСТРЕЧАЮЩИХСЯ УГЛОВ

a	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\arcsin a$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$
$\arccos a$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

a	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} a$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{arcctg} a$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$

ПРОСТЕЙШИЕ ТРИГОНОМЕТНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И ФОРМУЛЫ ИХ РЕШЕНИЙ

К простейшим тригонометрическим уравнениям относятся следующие:

$$\sin x = a, \qquad \cos x = a, \qquad \operatorname{tg} x = a, \qquad \operatorname{ctg} x = a,$$

где x – неизвестная величина, a – постоянная (известное число).

Формулы решений простейших тригонометрических уравнений

а) $\sin x = a \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{ll} x = (-1)^n \arcsin a + \pi n \quad (n \in Z), & \text{если} \quad |a| \le 1, \\ \text{решений нет,} & \text{если} \quad |a| > 1; \end{array}\right.$

б) $\cos x = a \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{ll} x = \pm \arccos a + 2\pi n \quad (n \in Z), & \text{если} \quad |a| \le 1, \\ \text{решений нет,} & \text{если} \quad |a| > 1; \end{array}\right.$

в) $\operatorname{tg} x = a \quad \Leftrightarrow \quad x = \operatorname{arctg} a + \pi n \quad (n \in \mathbf{Z}), \quad \forall a \in \mathbf{R};$

г) $\operatorname{ctg} x = a \quad \Leftrightarrow \quad x = \operatorname{arcctg} a + \pi n \quad (n \in \mathbf{Z}), \quad \forall a \in \mathbf{R}.$

Обращаем внимание на то, что уравнения для $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ имеют решения при любом значении $a \in \mathbf{R}$, а уравнения для $\sin x$ и $\cos x$ – лишь при $a \in [-1, 1]$.

ТАБЛИЦА РЕШЕНИЙ ПРОСТЕЙШИХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ, РАВНЫМИ 0; 1 ИЛИ -1

Уравнение	**Множесво решений**
$\sin x = 0$	$x = \pi n \quad (n \in \mathbf{Z})$
$\sin x = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad (n \in \mathbf{Z})$
$\sin x = -1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad (n \in \mathbf{Z})$
$\cos x = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad (n \in \mathbf{Z})$
$\cos x = 1$	$x = 2\pi n \quad (n \in \mathbf{Z})$
$\cos x = -1$	$x = \pi + 2\pi n \quad (n \in \mathbf{Z})$
$\operatorname{tg} x = 0$	$x = \pi n \quad (n \in \mathbf{Z})$
$\operatorname{tg} x = 1$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi n \quad (n \in \mathbf{Z})$
$\operatorname{tg} x = -1$	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n \quad (n \in \mathbf{Z})$
$\operatorname{ctg} x = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad (n \in \mathbf{Z})$
$\operatorname{ctg} x = 1$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi n \quad (n \in \mathbf{Z})$
$\operatorname{ctg} x = -1$	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n \quad (n \in \mathbf{Z})$

Типы тригонометрических уравнений и методы их решений

- Тригонометрические уравнения, Рациональные относительно sin x и cos x. Универсальная подстановка.

Рассмотрим тригонометрические уравнения вида

$$R(\sin x, \cos x) = 0, \qquad (1)$$

где $R(u, v)$ – дробно-рациональная функция от переменных u, v.
Общий метод решения таких уравнений основан на замене переменной

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \qquad \text{(универсальная подстановка)} \qquad (2)$$

Используя выражения тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента, будем иметь

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

При этом уравнение (1) преобразуется к виду

$$R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) = 0, \qquad (3)$$

которое является дробно-рациональным уравнением относительно t. Оно сводится (после умножения на общий знаменатель) к многочленному уравнению. Найдя корни

$t = t_j \qquad (j = 1, \ldots, m)$

уравнения (3), получим простейшие уравнения

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t_j \qquad (j = 1, \ldots, m)$$

Решив эти уравнения, найдем корни исходного уравнения.

Типы тригонометрических уравнений и методы их решений

- Тригонометрические уравнения, Рациональные относительно sin x и cos x. Универсальная подстановка.

Задача. Решить уравнение $\sin x - 3\cos x = 3$.

Решение. Воспользуемся универсальной подстановкой $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$. Сначала необходимо проверить, будут ли значения

$$x = (2n+1)n \quad (n \in \mathbf{Z}) \qquad (1)$$

при которых функция $tg\frac{x}{2}$ не имеет смысла, корнями нашего уравнения:

$$\sin(2n+1)\pi - 3\cos(2n+1)\pi = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \sin\pi - 3\cos\pi = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 3 = 3.$$

Итак, значения (1) переменной x обращают данное уравнение в верное числовое равенство, а значит являются его корнями.

Считая, что

$x \neq (2n+1)n \quad (n \in \mathbf{Z}),$

применим универсальную подстановку $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$. Используя соотношения

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

приводим данное уравнение к виду

$$\frac{2t}{1+t^2} - 3\frac{1-t^2}{1+t^2} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2t - 3 + 3t^2 = 3 + 3t^2 \quad \Leftrightarrow \quad t = 3 \quad \Leftrightarrow$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} 3 + \pi k \quad \Leftrightarrow \quad x = 2\operatorname{arctg} 3 + 2\pi k \quad (k \in \mathbf{Z})$$

Ответ. $\{(2n+1)\pi; \quad 2\operatorname{arctg} 3 + 2\pi k \quad (n, k \in \mathbf{Z})\}$

Типы тригонометрических уравнений и методы их решений

- Тригонометрические уравнения, Рациональные относительно sin x и cos x. Подстановка t = sin x, t = cos x, t = tg x.

Задача. Решить уравнение $7\,\mathrm{tg}\,x + \mathrm{ctg}\,x = 5/\cos x$.

Решение. ОДЗ уравнения определяется условиями

$$\begin{cases}\sin x \neq 0,\\ \cos x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \quad \sin 2x \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x \neq \pi m \quad \Leftrightarrow \quad x \neq \frac{\pi m}{2} \quad (m \in \mathbf{Z})$$

В ОДЗ данное уравнение равносильно такому уравнению:

$$7\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{5}{\cos x} \quad \Leftrightarrow \quad 7\sin^2 x + \cos^2 x = 5\sin x.$$

Последнее уравнение не меняется при замене x на $\pi - x$, поэтому,
Воспользовавшись формулой
$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x,$
приходим к уравнению

$$7\sin^2 x + 1 - \sin^2 x = 5\sin x \quad \Leftrightarrow \quad 6\sin^2 x - 5\sin x + 1 = 0.$$

Получено квадратное уравнение относительно $\sin x = t$. Решая его, находим

$$\left[\begin{array}{l}\sin x = \frac{1}{2},\\ \sin x = \frac{1}{3}\end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{ll}x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n & (n \in \mathbf{Z}),\\ x = (-1)^k \arcsin\frac{1}{3} + \pi k & (k \in \mathbf{Z})\end{array}\right.$$

Ясно, что все найденные корни принадлежат ОДЗ уравнения.

Ответ. $\left\{(-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n;\quad (-1)^k \arcsin\frac{1}{3} + \pi k \quad (n, k \in \mathbf{Z})\right\}.$

Типы тригонометрических уравнений и методы их решений

- Уравнения, линейные относительно sin x и cos x.

Рассмотрим уравнение вида

$$a\sin x + b\cos x = c, \qquad (1)$$

где a, b и c– известные числа. Для его решения часто используют метод, называемый *методом введения вспомогательного аргумента*. Суть его заключается в следующем. Поскольку уравнение (1) имеет смысл рассматривать лишь при условии, что a и b не обращаются одновременно в нуль, то можно разделить обе его части на $\sqrt{a^2+b^2} \neq 0$. В результате получим равносильное уравнение

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Введем угол φ, для которого выполняются равенства

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}};. \qquad (2)$$

такой угол существует, так как справедливо равенство

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1.$$

Тогда последнее уравнение примет вид

$$\cos\varphi\sin x + \sin\varphi\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \Leftrightarrow \quad \sin(x+\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Если

$$\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| > 1,$$

то полученное уравнение (а значит и уравнение (1)) решений не имеет; если же

$$\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leq 1,$$

то полученное уравнение является простейшим тригонометрическим уравнением и имеет решения

$$x+\varphi = (-1)^n \arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + \pi n \quad \Leftrightarrow \quad x = (-1)^n \arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} - \varphi + \pi n \quad (n \in \mathbf{Z})$$

Подчеркнем еще раз, что здесь φ находится с помощью соотношений (2).

Типы тригонометрических уравнений и методы их решений

Уравнения, однородные относительно sin x и cos x

Так называют уравнение вида

$$a_n \sin^n x + a_{n-1} \sin^{n-1} x \cos x + \cdots + a_1 \sin x \cos^{n-1} x + a_0 \cos^n x = 0, \qquad (1)$$

левая часть которых является однородным многочленом степени n относительно $u = \sin x$, $v = \cos x$.

Метод решения таких уравнений заключается в следующем. Вначале проверяем, не являются ли корни уравнения

$$\cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad (k \in \mathbf{Z})$$

корнями данного уравнения (ясно, что это будет лишь при $a_n = 0$). Далее, разделив обе части уравнения (1) на $\cos^n x \neq 0$, получим уравнение

$$a_n \operatorname{tg}^n x + a_{n-1} \operatorname{tg}^{n-1} x + \cdots + a_1 \operatorname{tg} x + a_0 = 0,$$

которое заменой $t = \operatorname{tg} x$ сводится к многочленному уравнению

$$a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0 = 0.$$

Найдя корни

$t = t_j \qquad (j = 1, \ldots, m)$

этого уравнения, получим простейшие уравнения

$$\operatorname{tg} x = t_j \qquad (j = 1, \ldots, m)$$

Решив эти уравнения, найдем корни исходного уравнения.

Типы тригонометрических уравнений и методы их решений

Уравнения, однородные относительно sin x и cos x

Задача. Решить уравнение

$$\sin^2 x\cos^2 x - 4\sin x\cos^3 x + 3\cos^4 x = 0.$$

Решение. ОДЗ уравнения: $x \in \mathbf{R}$. Уравнение является однородным многочленом четвертой степени относительно $u = \sin x$, $v = \cos x$. Непосредственная проверка показывает, что корни уравнения

$$\cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad (k \in \mathbf{Z})$$

являются корнями данного уравнения. Далее, разделив обе части исходного уравнения на $\cos^4 x \neq 0$, получим уравнение

$$\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = 1, \\ \operatorname{tg} x = 3 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{ll} x = \dfrac{\pi}{4} + \pi m & (m \in \mathbf{Z}), \\ x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n & (n \in \mathbf{Z}) \end{array}\right.$$

Ответ. $\left\{\dfrac{\pi}{2} + \pi k;\ \ \dfrac{\pi}{4} + \pi m;\ \ \operatorname{arctg} 3 + \pi n \quad (k, m, n \in \mathbf{Z})\right\}.$

Типы тригонометрических уравнений и методы их решений

Уравнения, допускающие разложение на множители

Любое уравнение указанного вида равносильно совокупности уравнений, составленных по каждому множителю левой части. Основано это на следующем утверждении.

Теорема. Любое уравнение вида

$$f_1(x)f_2(x)\cdots f_k(x)=0$$

равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{ll} f_1(x)=0, & x\in D, \\ f_2(x)=0, & x\in D, \\ \vdots & \\ f_k(x)=0, & x\in D, \end{array}\right.$$

где D – ОДЗ исходного уравнения.

Типы тригонометрических уравнений и методы их решений

Уравнения, допускающие разложение на множители.

Задача. Решить уравнение

$$\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x+\cos^2 4x=2.$$

Решение. ОДЗ уравнения: $x\in\mathbf{R}$. Применяя формулу понижения степени тригонометрических функций, будем иметь

$$\frac{1+\cos 2x}{2}+\frac{1+\cos 4x}{2}+\frac{1+\cos 6x}{2}+\frac{1+\cos 8x}{2}=2 \quad\Leftrightarrow\quad \cos 2x+\cos 4x+\cos 6x+\cos 8x=0.$$

Далее, используя формулу преобразования суммы косинусов в произведение, получаем

$$2\cos 3x\cos x+2\cos 7x\cos x=0 \quad\Leftrightarrow\quad 2\cos x(\cos 3x+\cos 7x)=0 \quad\Leftrightarrow$$

$$4\cos x\cos 5x\cos 2x=0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ \cos 5x=0,\\ \cos 2x=0\end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\\ 5x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\\ 2x=\dfrac{\pi}{2}+\pi m\end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{ll}x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n & (n\in\mathbf{Z}),\\ x=\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{\pi k}{5} & (k\in\mathbf{Z}),\\ x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi m}{2} & (m\in\mathbf{Z})\end{array}\right.$$

Ответ. $\left\{\dfrac{\pi}{2}+\pi n;\quad \dfrac{\pi}{10}+\dfrac{\pi k}{5};\quad \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi m}{2}\quad (n,k,m\in\mathbf{Z})\right\}$

Типы тригонометрических уравнений и методы их решений

Метод сравнения аргументов

Метод сравнения аргументов применяется к уравнениям вида

$$\sin f(x) = \sin g(x), \quad \cos f(x) = \cos g(x), \quad \mathrm{tg}\, f(x) = \mathrm{tg}\, g(x), \quad \mathrm{ctg}\, f(x) = \mathrm{ctg}\, g(x)$$

и основан на следующем утверждении.

Теорема. *Справедливы следующие высказывания:*

а) $\sin\alpha = \sin\beta \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \alpha = \beta + 2\pi n \quad (n \in \mathbf{Z}), \\ \alpha = (\pi - \beta) + 2\pi k \quad (k \in \mathbf{Z}); \end{array}\right.$

б) $\cos\alpha = \cos\beta \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \alpha = \beta + 2\pi n \quad (n \in \mathbf{Z}), \\ \alpha = -\beta + 2\pi k \quad (k \in \mathbf{Z}); \end{array}\right.$

в) $\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{tg}\,\beta \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha = \beta + \pi n \quad (n \in \mathbf{Z}), \\ \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k \quad (k \in \mathbf{Z}), \\ \beta \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi m \quad (m \in \mathbf{Z}) \end{cases}$

г) $\mathrm{ctg}\,\alpha = c\,\mathrm{tg}\,\beta \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha = \beta + \pi n \quad (n \in \mathbf{Z}), \\ \alpha \neq \pi k \quad (k \in \mathbf{Z}), \\ \beta \neq \pi m \quad (m \in \mathbf{Z}) \end{cases}$