Теория вероятностей
Лекция 2: Формула полной вероятности, испытания Бернулли, Теорема Лапласа, случайные величины

- Условная вероятность, теорема умножения
- Формула полной вероятности
- Формула Байеса
- Испытания Бернулли
- Локальная предельная теорема. Интегральная теорема Лапласа.
- Дискретные и непрерывные случайные величины, их функции распределения

Условная вероятность

Вероятность наступления события A при условии, что событие B произошло, называется ***условной вероятностью*** и находится по формуле

$$\boxed{P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}}$$

ПРИМЕР 2. Бросаются две игральные кости. Найти вероятность того, что на обеих костях выпадет равное число очков при условии, что суммарное число очков меньше 5.

Решение. Пространство элементарных исходов состоит из 36 элементов: $\Omega=\{(1,1),(1,2),(1,3),\ldots,(6,6)\}$.

Рассмотрим события: A − на обеих костях выпало равное число очков, B – суммарное число очков меньше 5. Запишем элементарные исходы, благоприятствующие событиям A, B, AB, и найдем соответствующие вероятности:

$$A=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\},$$

$$B=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(1,3),(3,1)\},$$

$$AB=\{(1,1),(2,2)\},$$

$$P(AB)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18},\ P(B)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6},\ P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1}{3}.\blacksquare$$

Теорема умножения вероятностей

Из формулы для условной вероятности следует ***теорема умножения вероятностей***

$$\boxed{P(AB) = P(A)\cdot P(B/A) = P(B)\cdot P(A/B)}$$

Для n случайных событий $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$ имеем

$$P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot\ldots\cdot P(A_n/A_1\cdot\ldots\cdot A_{n-1}).$$

События A и B называются ***независимыми***, если появление одного из них не влияет на вероятность появления второго, то есть $P(A/B) = P(A)$, $P(B/A) = P(B)$

Таким образом, если события A и B независимы, то $P(AB) = P(A)\cdot P(B)$.

ПРИМЕР 1 9 карточек с буквами Р, Е, Г, Р, Е, С, С, И, Я перемешивают. Случайным образом извлекают 3 карточки (по одной) и выкладывают их в порядке появления. Найти вероятность того, что получится слово «РИС» (событие B).

<u>*Решение.*</u> Рассмотрим события: A_1 − первой оказалась карточка с буквой Р, A_2 − второй появилась буква И, A_3 − третьей появилась буква С. Тогда для события B имеем

$$B = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \quad \text{(события } A_1, A_2, A_3 \text{ − зависимы)},$$

$$P(B) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2) = \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{7} = \frac{1}{126}. \blacksquare$$

ПРИМЕР 2. Из колоды карт (36 штук) извлекают одну карту. Зависимы ли события A и B, где событие A − извлечен туз, событие B − извлечена карта красной масти?

Решение. Так как в колоде всего 4 туза и 18 карт красной масти, то

$$P(A)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9},\quad P(B)=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}.$$

Событию AB (извлечен туз красной масти) благоприятствуют 2 элементарных исхода, так как всего два туза красной масти, поэтому

$$P(AB)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}.$$

Так как $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$, то события A и B независимы.■

Вероятность наступления хотя бы одного события

Наступление хотя бы одного из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ означает, что должно произойти либо одно, либо два, либо три, либо все n событий. Для вычисления таких вероятностей пользуются следующим результатом.

Теорема 1. *Вероятность появления хотя бы одного из $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимых в совокупности событий равна:*

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \ldots P(\overline{A_n})$$

Доказательство. События $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ и $\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \ldots \overline{A_n}$ образуют полную группу событий, поэтому

$$A + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \ldots \overline{A_n} = \Omega \quad \text{и} \quad P(A + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \ldots \overline{A_n}) = 1$$

По правилу сложения независимых событий можно записать:

$$P(\Omega) = P(A + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \ldots \overline{A_n}) = P(A) + P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \ldots \overline{A_n})$$

или

$$P(A) = 1 - P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \ldots \overline{A_n})$$

По условию события независимы в совокупности, поэтому

$$P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \ldots \overline{A_n}) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \ldots P(\overline{A_n})$$

Подстановка этого соотношения в предыдущее равенство завершает доказательство.

Пример 2. Вероятности попадания в цель каждого из трех орудий соответственно равны: $p_1 = 0,8$, $p_2 = 0,7$, $p_3 = 0,9$. Какова вероятность попадания в цель хотя бы одного из орудий (событие A) при одном залпе?
Решение. Результат залпа, при котором произошло попадание хотя бы одного, орудия можно записать в виде:
111 110 101 011 100 010 001,
где 0 означает промах, а 1 - попадание соответствующего орудия.
Вероятности промаха каждого орудия имеют вид:
$1 - p_1, \;\; 1 - p_2, \;\; 1 - p_3$

Результат выстрела каждого орудия - независимое событие, поэтому вероятность попадания хотя бы одного орудия имеет вид:

$$P(A) = p_1p_2p_3 + (1-p_1)p_2p_3 + p_1(1-p_2)p_3 + p_1p_2(1-p_3)+$$
$$(1-p_1)(1-p_2)p_3 + (1-p_2)p_2(1-p_3) + p_1(1-p_2)(1-p_3)$$

Подставив значения, получим $P(A) = 0,994$
Более простой способ решения. Попадание каждого орудия является независимым событием, поэтому можно воспользоваться доказанной теоремой. Вероятность промаха всех орудий сразу равна:

$$P(A) = (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)$$

Тогда по теореме вероятность попадания хотя бы одного орудия равна:

$$P(A) = 1 - (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3) = 0,994$$

2. Формула полной вероятности

Пусть пространство элементарных событий Ω представлено в виде суммы n попарно не пересекающихся событий $H_1, H_2, \dots H_n$, $\qquad H_i \cap H_j = \varnothing$. Каждое событие H_i называется гипотезой и в совокупности они образуют полную группу событий. Пусть $A \subseteq \Omega$ - некоторое произвольное событие. Его можно представить в виде суммы независимых событий:

$$A = A\Omega = A(H_1 + H_2 + \dots + H_n) = AH_1 + AH_2 + \dots + AH_n$$

поэтому по формуле сложения вероятностей независимых событий вероятность события A равна:

$$P(A) = P(AH_1) + P(AH_2) + \dots + P(AH_n)$$

Для каждого слагаемого справа можно воспользоваться формулой умножения зависимых событий. В результате получится формула полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \dots + P(H_n)P(A|H_n) \qquad (2)$$

т.е. вероятность события A равна сумме вероятностей гипотез, умноженных на условную вероятность события A при справедливости данной гипотезы H_n.

Пример 3. В механическом цехе изготавливают 30% всех болтов на первом станке, 25% - на втором и 45% - на третьем. Первый станок допускает 2% бракованных изделий, второй - 1% и третий - 3%. Все болты помещают в ящик и привозят на контроль. Какова вероятность того, что извлеченный наугад болт окажется бракованным?
Решение. Обозначим A={ извлеченный болт дефектный}. Введем гипотезы: H_1 ={болт сделан на первом станке}, H_2 ={болт сделан на втором станке}, H_3 ={болт сделан на третьем станке}. По условию вероятности гипотез равны: $P(H_1) = 0,3$, $P(H_2) = 0,25$, $P(H_3) = 0,45$. Вероятность брака при условии, что болт сделан на первом станке: $P(A|H_1) = 0,02$. Аналогичные условные вероятности: $P(A|H_2) = 0,01$, $P(A|H_3) = 0,03$. Вероятность того, что извлеченный болт окажется дефектным вычислим по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3)$$

Или подставив значения, получим:

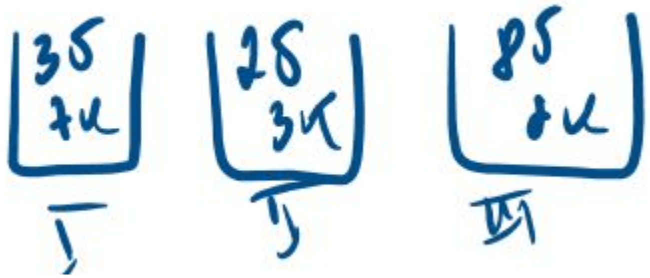
$$P(A) = 0,3 \cdot 0,02 + 0,25 \cdot 0,01 + 0,45 \cdot 0,03 = 0,022$$

4. Формула Байеса

Пусть $\Omega = H_1 + H_2 + \ldots + H_n$, $H_i \cap H_j = \varnothing$, т. е. H_i - гипотезы. Дополнительно будем считать, что $P(A) > 0$. Для любого события A по формуле умножения вероятностей (10) получим: $P(AH_i) = P(A)P(H_i|A) = P(H_i)P(A|H_i)$. Из второй части данного соотношения получим вероятность гипотезы H_i при условии, что событие A наступило: $P(H_i|A) = \dfrac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)}$. К знаменателю последнего соотношения применим формулу полной вероятности, в результате чего получим формулу Байеса:

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(H_k)P(A|H_k)} \tag{3}$$

В этой формуле вероятности $P(H_i)$ называются априорными (т.е. до опыта), а вероятности $P(H_i|A)$ называют апостериорными (т.е. после опыта). Формулы Байеса позволяют переоценить вероятности $P(H_i)$ гипотез на основе данных, полученных после проведения опыта, в результате которого появилось событие A.



Пример 4. В ящике находятся одинаковые изделия, изготовленные на разных автоматических станках, причем 40% изделий изготовлено на первом станке, а остальные – на втором. Брак в продукции первого станка составляет 3%, второго – 2%. Случайно выбранное изделие из ящика оказалось бракованным. Какова вероятность того, что оно изготовлено на первом станке?
Решение. Пусть $A = \{$извлеченное изделие бракованное$\}$. Рассмотрим две гипотезы: H_1=$\{$Изделие изготовлено первым станком$\}$, H_2=$\{$Изделие изготовлено вторым станком$\}$. Условные вероятности: $P(A|H_1) = 0,03$ - вероятность появление брака при условии, что изделие изготовлено на первом станке, $P(A|H_2) = 0,02$ - вероятность появление брака при условии, что изделие изготовлено на втором станке. Априорные вероятности гипотез $P(H_1) = 0,4$ и $P(H_2) = 1 - 0,4 = 0,6$. Извлеченное изделие оказалось бракованным, значит, опыт уже произведен, и событие A произошло. Поэтому можно воспользоваться формулой Байеса

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{\sum\limits_{k=1}^{2} P(H_k)P(A|H_k)} = \frac{0,4 \cdot 0,03}{0,4 \cdot 0,03 + 0,6 \cdot 0,02} = 0,5$$

5. Испытания Бернулли

Кроме рассмотренных вероятностных схем (классической, статистической и геометрической) практический интерес представляют последовательности нескольких испытаний – испытания Бернулли.

Определение 3. *Одно испытание Бернулли – это опыт с двумя исходами, например 0 (неудача) и 1 (успех), и имеющими вероятности* $P(1) = p$, $P(0) = 1 - p = q$, *причем* $p + q = 1$. *Исход каждого такого одиночного испытания не зависит от результатов предыдущих одиночных испытаний.*

Примером таких испытаний служит однократное подбрасывание монеты с вероятностями $p = q = \dfrac{1}{2}$ для правильной монеты.

Интерес представляет не одно, а n независимых испытаний.

Определение 4. *Испытания Бернулли - это независимые испытания с двумя исходами и с вероятностью успеха, не меняющейся от испытания к испытанию.*

Результат испытания Бернулли записывается в виде упорядоченного набора нулей и единиц длиной n. Поэтому пространство элементарных исходов n испытаний Бернулли имеет вид:

$$\Omega = \{\omega : \omega = (a_1, a_2, \ldots, a_n), a_i = 0, 1\}$$

Подсчитаем вероятность того, что в n испытаниях Бернулли число успехов (т. е. единиц) появится k раз неважно в какой последовательности.

Вероятность появления успеха в i-ом испытании равна p, а вероятность его не появления равна $q = 1 - p$. Все одиночные испытания независимы, поэтому вероятность появления успеха в k испытаниях и его не появление в $n - k$ испытаний по теореме умножения вероятностей независимых событий равна: $p^k q^{n-k}$.

Данная вероятность не зависит от порядка, в котором завершились испытания с успешным исходом. Т. е. найдена вероятность того, что успех появится в k испытаниях и не появится в $n-k$ испытаниях для конкретного набора успехов и неудач. По теореме сложения искомая вероятность равна сумме только что вычисленных вероятностей при различных наборах успехов и неудач в серии из n испытаний. Число таких наборов равно числу сочетаний C_n^k и все они имеют одинаковую вероятность, поэтому искомая вероятность равна:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

Выписав явно число сочетаний, получим формулу Бернулли:

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \tag{4}$$

ПРИМЕР 5 Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,7. Произведено 5 выстрелов. Найти вероятность двух попаданий; поражения мишени (то есть вероятность хотя бы одного попадания).

Решение. В нашем случае $n = 5,\ \ p = 0,7,\ \ q = 0,3$. Тогда

$$P_5(k = 2) = C_5^2 \cdot 0,7^2 \cdot 0,3^3 = \frac{5!}{2!\cdot 3!} \cdot 0,7^2 \cdot 0,3^3 = 0,1323,$$

$$P_5(k \ge 1) = 1 - P_5(k = 0) = 1 - 0,3^5 = 0,99757. \blacksquare$$

ПРИМЕР 6 Вероятность повреждения каждого изделия при транспортировке с завода равна 0,0005. Найти вероятность того, что при транспортировке 4000 изделий будет повреждено более двух изделий.

Если число испытаний n достаточно велико, а вероятность успеха p достаточно мала ($n \geq 50$, $p < 0{,}1$, $np < 10$), то вероятность $P_n(k)$ может быть приближенно найдена по ***формуле Пуассона***

$$P_n(k) \approx \frac{a^k e^{-a}}{k!}, \quad a = np$$

Решение. Транспортировку каждого изделия можно рассматривать как независимое испытание. Поскольку число испытаний велико ($n = 4000$), а вероятность успеха мала ($p = 0,0005$), то по формуле Пуассона ($a = np = 4000 \cdot 0,0005 = 2$)

$$P_{4000}(k > 2) = 1 - P_{4000}(k \le 2) = 1 - P_{4000}(0) - P_{4000}(1) - P_{4000}(2) \approx$$

$$\approx 1 - \frac{2^0 e^{-2}}{0!} - \frac{2^1 e^{-2}}{1!} - \frac{2^2 e^{-2}}{2!} \approx 0,32$$

Пример 7. На автоматическом станке изготавливаются детали, среди которых бракованные встречаются в $0,5\%$ случаев. Чему равна вероятность того, что среди 10000 наудачу взятых деталей бракованных окажется 40.
Решение. Выбор 10000 деталей из всех имеющихся является испытанием Бернулли с $n = 10000$, $k = 40$, $p = 0,005$, $q = 1 - p = 0,995$. По формуле (14) получим:
$P_{10000}(40) = \frac{10000!}{40!(10000-40)!} 0,005^{40} 0,995^{9960}$

6. Локальная предельная теорема

Предыдущий пример показывает, что при больших значениях n использование формулы Бернулли связано с техническими трудностями – появляются громоздкие вычисления. Для преодоления этих трудностей используются асимптотические формулы, т. е. справедливые при $n \to \infty$. Использование одной из таких формул обосновано следующей теоремой.

Теорема 2 (Локальная теорема). *Если вероятность наступления некоторого события A в n независимых испытаниях постоянна и равна p $(0 < p < 1)$, то вероятность $P_n(k)$ того, что в этих испытаниях событие A наступит ровно k раз удовлетворяет при $n \to \infty$ следующему соотношению:*

$$P_n(k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}} \tag{5}$$

В формулировке локальной предельной теоремы используется ф у н к ц и я Г а у с с а

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{6}$$

Поэтому формулу теоремы можно переписать в виде:

$$P_n(k) \sim \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x) \tag{7}$$

Функция $\varphi(x)$ обладает следующими свойствами

1. $\varphi(-x) = \varphi(x)$ чётность

2. при $x \geqslant 4$ можно считать $\varphi(x) = 0$

ПРИМЕР 8 Рассматривая предыдущую задачу, где требовалось вычислить $P_n(k)$ при $n = 10000$, $k = 40$, $p = 0,005$. По формуле (15) получаем: $P_n(k) \sim \frac{1}{7{,}05\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1{,}42^2}{2}}$. Для функции $\varphi(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ существует специальная таблица, в соответствии с которой $\varphi(1,42) = 0,1456$. Поэтому $P_n(k) \sim \frac{0{,}1456}{7{,}05} = 0,00206$.

Интегральная теорема Муавра-Лапласа

Вероятность того, что при n испытаниях Бернулли событие A наступит не менее k_1 раз и не более k_2 раз, может быть приближенно найдена с помощью ***интегральной теоремы Муавра-Лапласа***

$$\boxed{P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \quad x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}}$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ − функция Лапласа, для которой также составлены таблицы значений

ПРИМЕР 9. Фабрика выпускает 80% изделий первого сорта. Какова вероятность того, что из 100 изделий число изделий первого сорта не менее 70?

<u>*Решение.*</u> По условию $n=100$, $p=0{,}8$, $q=0{,}2$, $k_1=70$, $k_2=100$. По интегральной теореме Муавра−Лапласа:

$$P(70\le k\le 100)\approx\Phi\left(\frac{100-100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\right)-\Phi\left(\frac{70-100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\right)=$$

$$=\Phi(5)-\Phi(-2{,}5)=\Phi(5)+\Phi(2{,}5)\approx 0{,}5+0{,}4938=0{,}9938.\blacksquare$$

Замечание. Пусть $\dfrac{k}{n}$ – относительная частота появления события A в n испытаниях Бернулли, p – вероятность наступления события A в одном опыте. Тогда используя интегральную теорему Муавра–Лапласа, имеем

$$P\left\{\left|\frac{k}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=P\{np-n\varepsilon<k<np+n\varepsilon\}\approx$$

$$\approx\Phi\left(\frac{\varepsilon n}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{-\varepsilon n}{\sqrt{npq}}\right)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon n}{\sqrt{npq}}\right)=2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right),$$

то есть при достаточно больших n вероятность отклонения относительной частоты от вероятности p не более чем на $\varepsilon>0$ находится по формуле

$$\boxed{P\left\{\left|\frac{k}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}\approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)}$$

ПРИМЕР 10. Опыт состоит в бросании игральной кости 500 раз. Оценить вероятность того, что относительная частота выпадения шестерки отклонится от вероятности выпадения шестерки в одном бросании менее чем на 0,02?

<u>*Решение.*</u> Так как вероятность выпадения шестерки при одном бросании $p = \frac{1}{6}$, то $q = \frac{5}{6}$ и

$$P\left\{\left|\frac{k}{500} - \frac{1}{6}\right| < 0,02\right\} \approx 2\Phi\left(0,02\sqrt{\frac{500}{1/6 \cdot 5/6}}\right) = 2\Phi(1,2) \approx 0,7698 . \blacksquare$$

ПРИМЕР 11 Сколько раз нужно подбросить монету, чтобы с вероятностью 0,9 относительная частота появления герба отличалась от вероятности выпадения герба при одном бросании менее чем на 0,01?

Решение. Из условия задачи следует, что

$$P\left\{\left|\frac{k}{n}-\frac{1}{2}\right|<0,01\right\}\approx 2\Phi\left(0,01\sqrt{\frac{n}{0,5\cdot 0,5}}\right)=0,9,$$

откуда $\Phi(0,02\sqrt{n})=0,45 \quad\Rightarrow\quad 0,02\sqrt{n}\approx 1,65 \quad\Rightarrow\quad n>6806.$ ■

7. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Случайной величиной называется числовая функция, определенная на пространстве элементарных событий Ω:

$$\xi = \xi(\omega), \quad \omega \in \Omega.$$

Любое соотношение (таблица, функция, график), позволяющее установить связь между возможными значениями случайной величины и их вероятностями, называется ***законом распределения случайной величины***. Универсальным способом задания закона распределения случайной величины является функция распределения.

Функция распределения случайной величины

Функцией распределения случайной величины ξ называется функция $F(x)$, которая для каждого действительно значения x равна вероятности того, что случайная величина ξ примет значение меньше чем x, то есть

$$\boxed{F(x) = P\{\xi < x\}}$$

Свойства функции распределения:

1. $0 \le F(x) \le 1, \ -\infty < x < +\infty$.

2. $F(x_1) \le F(x_2)$ при $x_1 < x_2$ ($F(x)$ − неубывающая функция).

3. $F(-\infty) = P\{\xi < -\infty\} = 0, \ F(+\infty) = P\{\xi < +\infty\} = 1$.

4. $P\{a \le \xi < b\} = F(b) - F(a)$.

5. $F(x)$ непрерывна слева, то есть $F(x_0)=F(x_0-0)$ $\forall x_0 \in (-\infty;+\infty)$, где $F(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0-0} F(x)$.

Очевидно, что $P\{\xi=x_0\}=F(x_0+0)-F(x_0-0)$, причем, если x_0 – точка непрерывности функции $F(x)$, то $P\{\xi=x_0\}=0$, а если x_0 – точка разрыва функции $F(x)$, то вероятность $P\{\xi=x_0\}$ равна скачку функции $F(x)$ в этой точке.

Дискретные случайные величины

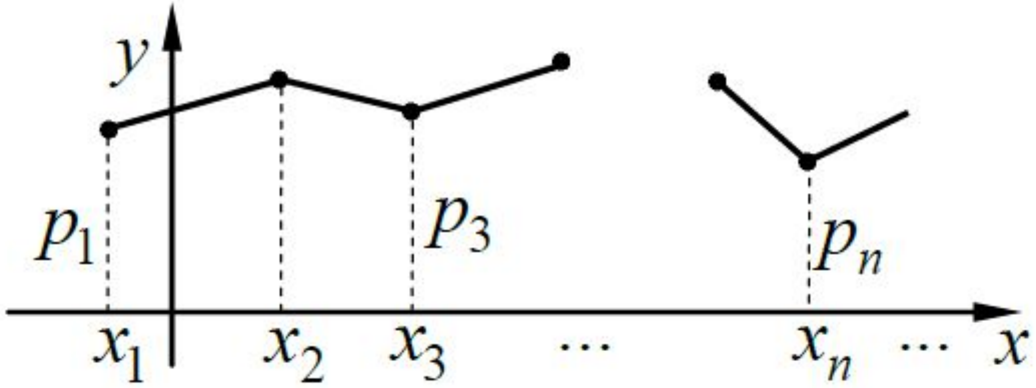
Случайная величина, принимающая конечное или счетное множество значений, называется ***дискретной.***

Закон распределения дискретной случайной величины можно задать таблицей, называемой ***рядом распределения***

ξ	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_k	$\ldots$
P	p_1	p_2	p_3	$\ldots$	p_k	$\ldots$

В первой строке указываются все значения случайной величины, а во второй – соответствующие им вероятности $\left(\sum_i p_i = 1\right)$.

Графически ряд распределения изображают в виде ***многоугольника распределения***. Для построения многоугольника распределения в прямоугольной декартовой системе координат отмечают точки (x_i, p_i) и последовательно соединяют их отрезками прямых.



Функция распределения дискретной случайной величины имеет вид:

$$\boxed{F(x) = \sum_{i:x_i < x} p_i}$$

где сумма берется по всем i, для которых $x_i < x$.

ПРИМЕР 1. В урне 3 черных и 2 белых шара. Из урны наугад извлекают 3 шара. Случайная величина ξ − число черных шаров в выборке. Составить ряд распределения случайной величины ξ, найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

Решение. Очевидно, случайная величина ξ принимает значения $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3$. Найдем p_i:

$$p_1 = P(\xi = 1) = \frac{C_3^1 \cdot C_2^2}{C_5^3} = 0,3;$$

$$p_2 = P(\xi = 2) = \frac{C_3^2 \cdot C_2^1}{C_5^3} = 0,6;$$

$$p_3 = P(\xi = 3) = \frac{C_3^3}{C_5^3} = 0,1.$$

Ряд распределения случайной величины ξ имеет вид

x_i	1	2	3
p_i	0,3	0,6	0,1

Найдем ее функцию распределения $F(x)$:

если $x \le 1$, то $F(x) = 0$;

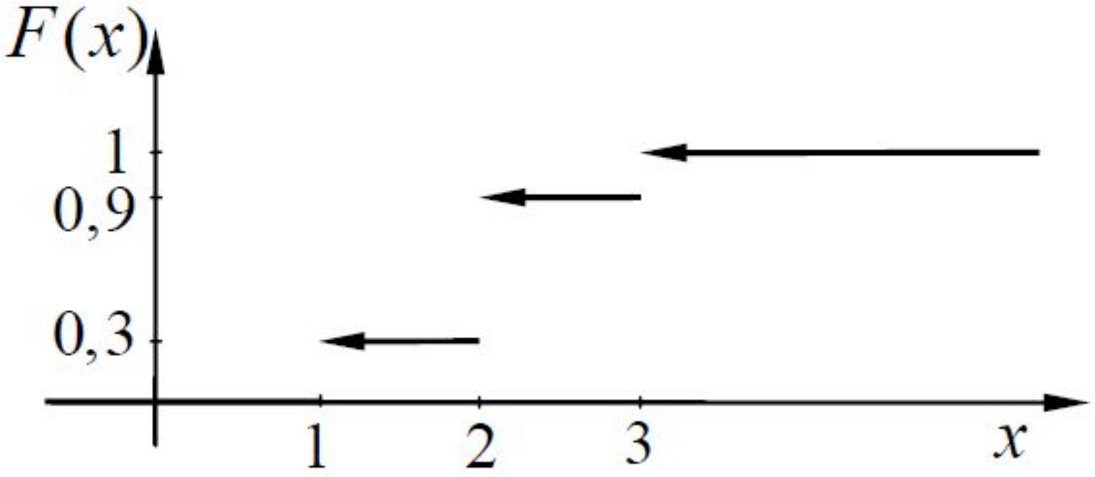
если $1 < x \le 2$, то $F(x) = p_1 = 0,3$;

если $2 < x \le 3$, то $F(x) = p_1 + p_2 = 0,3 + 0,6 = 0,9$;

если $x > 3$, то $F(x) = p_1 + p_2 + p_3 = 0,3 + 0,6 + 0,1 = 1$.

Следовательно,

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ 0,3, & 1<x\le 2;\\ 0,9, & 2<x\le 3;\\ 1, & x>3.\end{cases}$$



Легко заметить, что функция распределения дискретной случайной величины имеет ступенчатый вид со скачками, равными p_i, в точках x_i.■

Непрерывные случайные величины

Случайная величина ξ называется ***непрерывной***, если она принимает все значения из некоторого промежутка числовой оси, и если существует неотрицательная функция $f(x)$ такая, что $\forall x \in (-\infty; +\infty)$

$$\boxed{F(x) = P\{\xi < x\} = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt}$$

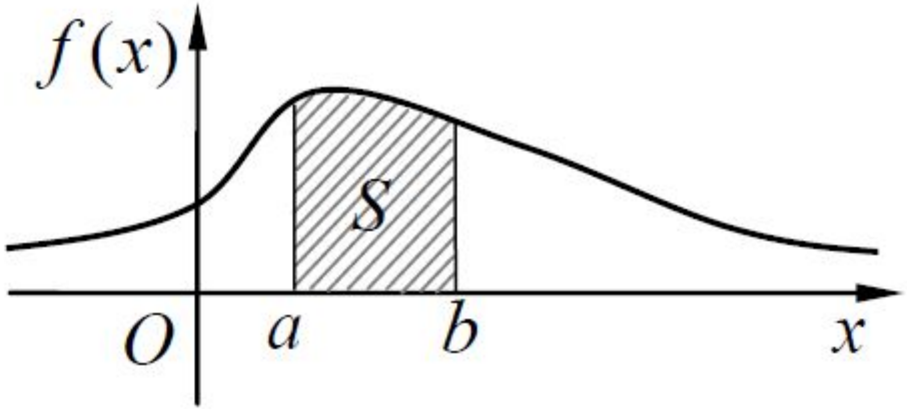
Функция $f(x)$ называется ***плотностью распределения вероятностей*** случайной величины ξ.

Свойства плотности распределения вероятностей:

1. $f(x) \geq 0 \ \ \forall x \in (-\infty; +\infty)$.

2. $f(x) = F'(x)$. Таким образом, функция распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины непрерывна $\forall x$.

3. $P\{a \leq \xi < b\} = \int\limits_a^b f(x)dx$.



Геометрически указанная вероятность равна площади S фигуры, ограниченной кривой распределения $y = f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox.

Отметим, что для непрерывной случайной величины ξ вероятность того, что она примет определенное значение a, равна нулю (парадокс нулевой вероятности), то есть

$$P(\xi = a) = 0.$$

Следовательно,

$$P\{a \le \xi < b\} = P\{a < \xi < b\} = P\{a < \xi \le b\} = P\{a \le \xi \le b\}.$$

4. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ (условие нормировки).

Геометрически условие нормировки означает, что площадь фигуры, заключенной между кривой $y = f(x)$ и осью Ox, равна единице.

ПРИМЕР 2. Дана функция распределения

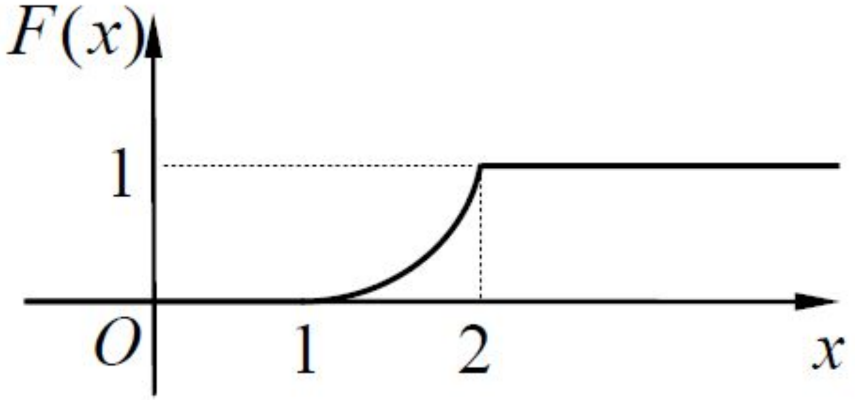
$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1; \\ c(x-1)^2, & 1<x\le 2; \\ 1, & x>2, \end{cases}$$

непрерывной случайной величины ξ. Найти c, $f(x)$, $P(0\le\xi\le 1{,}5)$. Построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

__*Решение.*__ Так как случайная величина непрерывна, то ее функция распределения $F(x)$ должна быть непрерывной. В точке $x=1$ непрерывность очевидна, а в точке $x=2$ функция $F(x)$ будет непрерывна, если $c(2-1)^2=1$, откуда $c=1$.

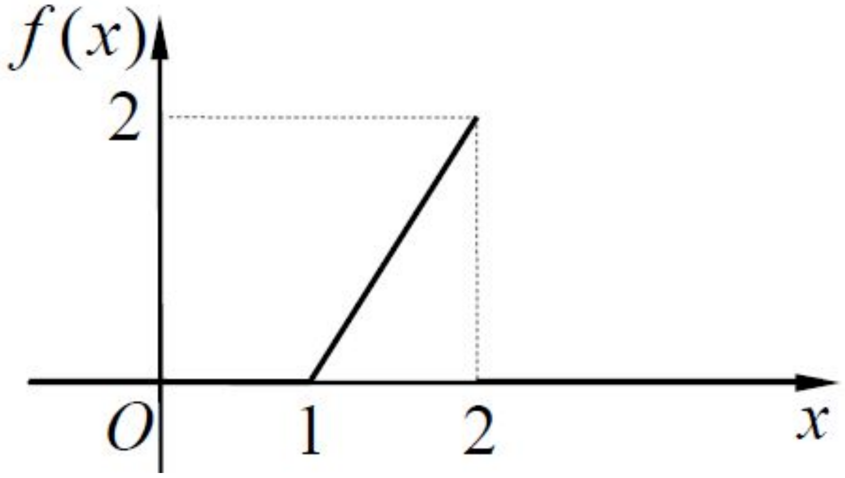
Таким образом, функция распределения имеет вид

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1; \\ (x-1)^2, & 1<x\le 2; \\ 1, & x>2. \end{cases}$$



Так как $f(x)=F'(x)$, то

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1; \\ 2(x-1), & 1<x\le 2; \\ 0, & x>2. \end{cases}$$



Найдем вероятность $P(0 \le \xi \le 1,5)$:

$$P(0 \le \xi \le 1,5) = \int_0^{1,5} f(x)dx = \int_1^{1,5} 2(x-1)dx = (x^2 - 2x)\Big|_1^{1,5} = 0,25.$$

Эту же вероятность можно найти, используя функцию $F(x)$,

$$P(0 \le \xi \le 1,5) = F(1,5) - F(0) = 0,25 - 0 = 0,25. \blacksquare$$

ПРИМЕР 3. Дана плотность распределения

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0,\ \ x>\pi/2; \\ c\sin 2x, & 0\le x\le \pi/2, \end{cases}$$

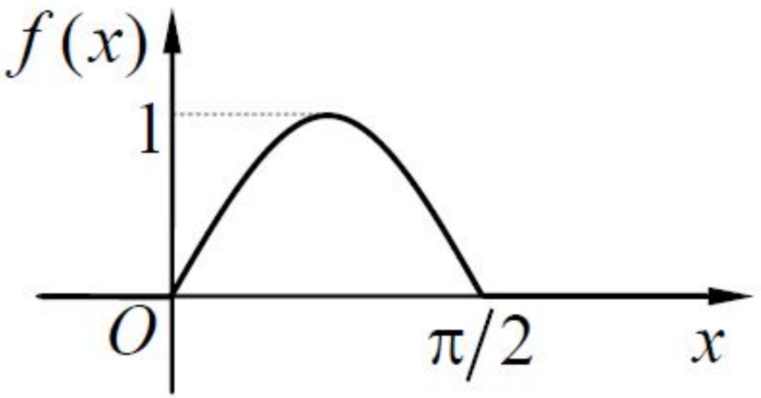
непрерывной случайной величины ξ. Найти c, $F(x)$. Построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

Решение. Для нахождения константы c воспользуемся условием нормировки:

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{0}^{\pi/2} c\sin 2x dx=-\frac{c}{2}\cos 2x\Big|_0^{\pi/2}=c \quad\Rightarrow\quad c=1.$$

Таким образом

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0,\ x>\pi/2; \\ \sin 2x, & 0\le x\le \pi/2. \end{cases}$$



Найдем $F(x)$:

$$x\in(-\infty;0) \ \Rightarrow\ F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{x} 0dt=0;$$

$$x \in [0;\pi/2] \;\Rightarrow\; F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} \sin 2t dt = \frac{1-\cos 2x}{2};$$

$$x \in (\pi/2;+\infty) \;\Rightarrow\; F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{\pi/2} \sin 2t dt + \int_{\pi/2}^{x} 0dt = 1.$$

Итак, для функции распределения имеем:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \dfrac{1-\cos 2x}{2}, & 0 \le x \le \pi/2; \\ 1, & x > \pi/2. \end{cases}$$