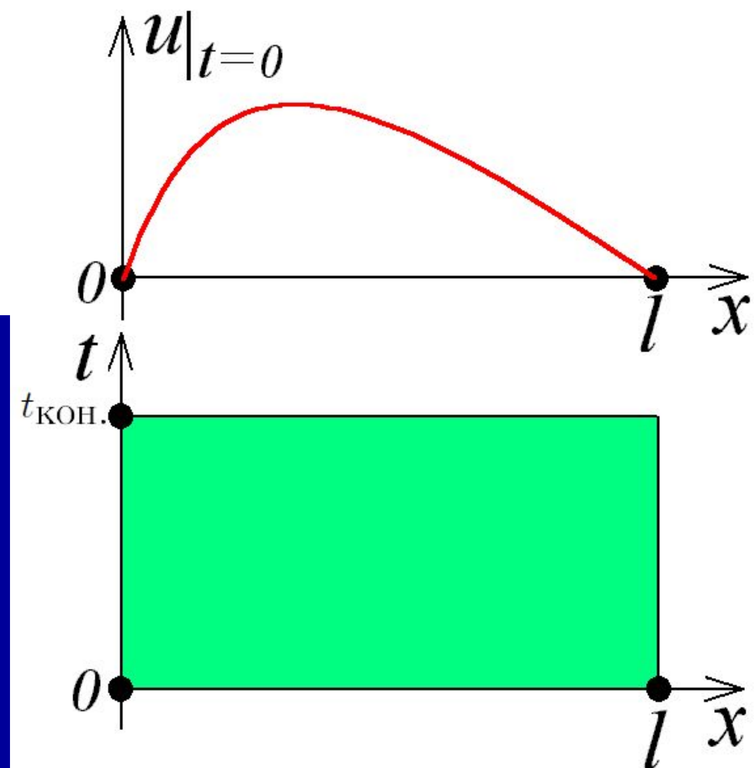
На следующем практическом занятии 14.04.22. состоится проверочная работа № 3, вопросы 9-12.

Разностный метод решения начально-краевой задачи для волнового уравнения

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}; \\ u(t,x)|_{t=0} = \varphi_0(x); \\ u_t(t,x)|_{t=0} = \varphi_1(x); \\ u(t,x)|_{x=0} = \psi_0(t); \\ u(t,x)|_{x=\ell} = \psi_1(t) \end{cases}$$

$$u = u(t,x);\ 0 \le t \le t_{\text{кон.}};0 \le x \le \ell$$

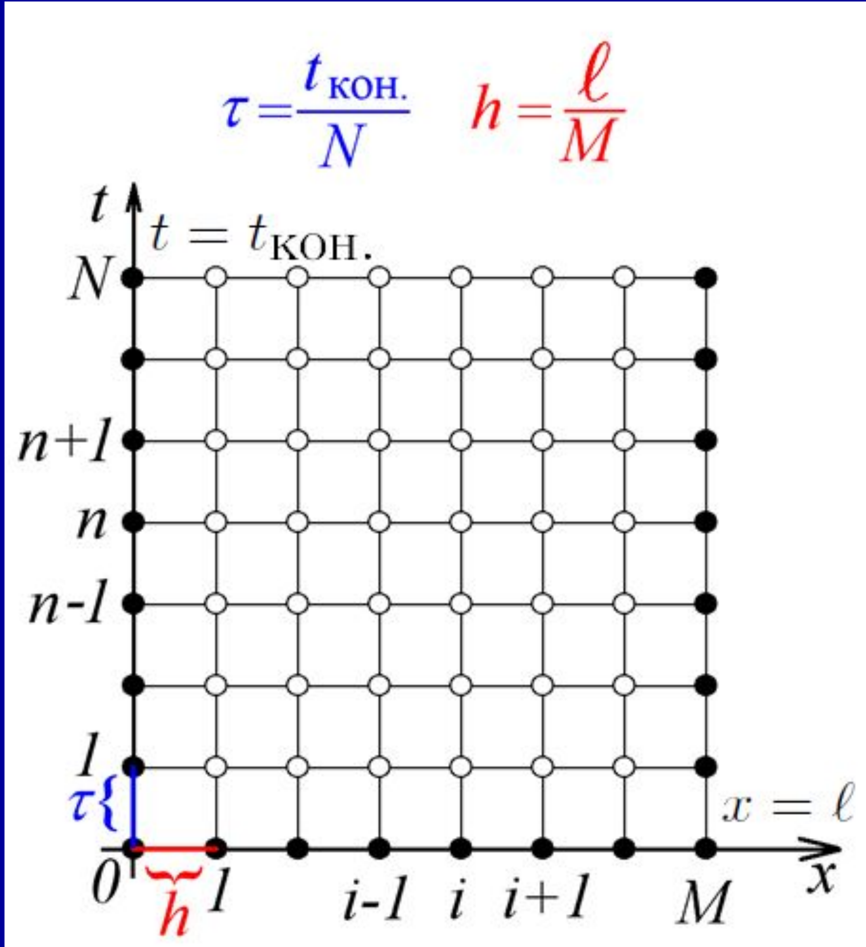


Построение расчетной сетки

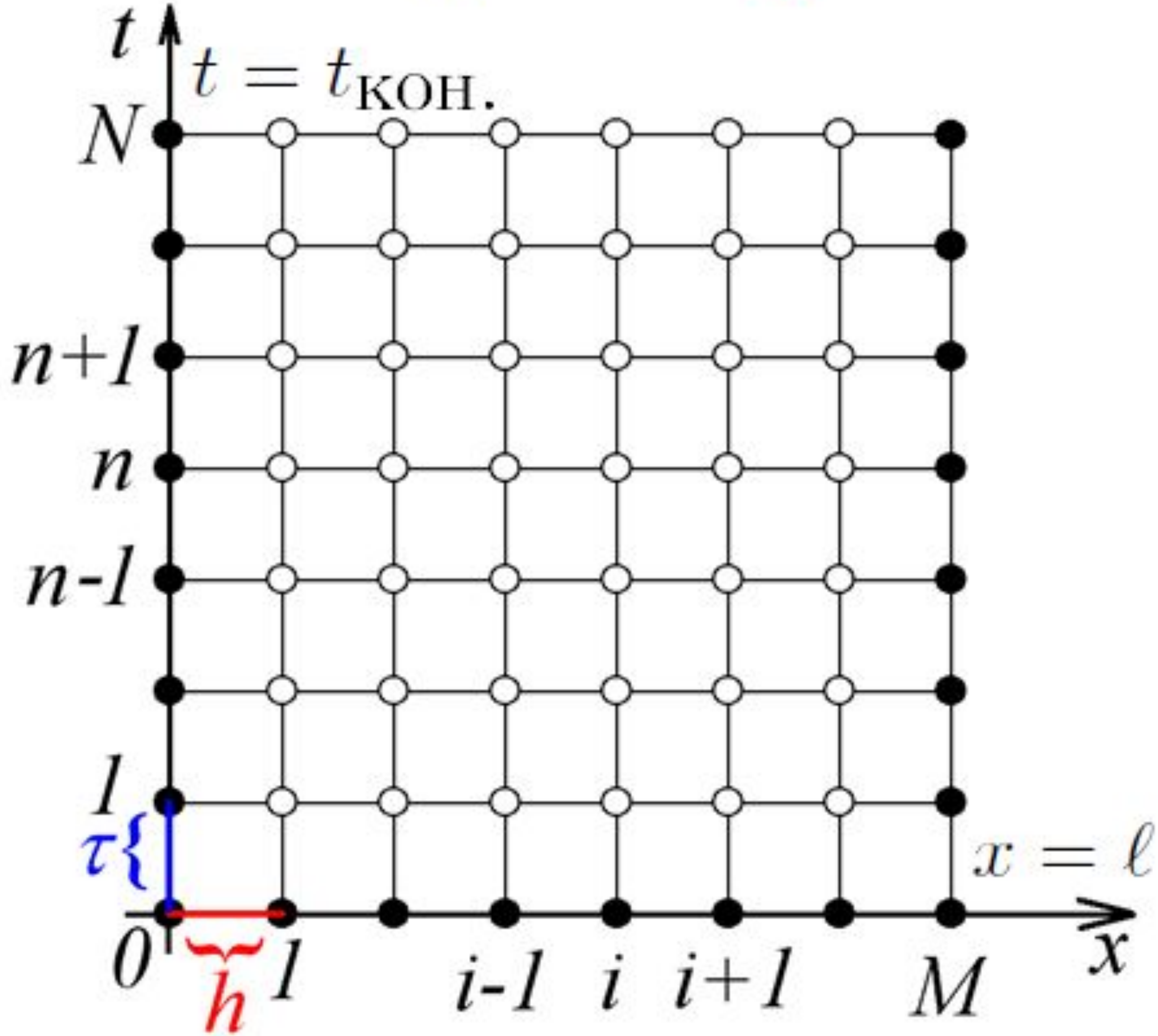
$M+1$ — число точек по x, $h = \Delta x = \dfrac{\ell}{M}$ — шаг по пространству

$N+1$ — число точек по t, $\tau = \Delta t = \dfrac{t_{\text{кон.}}}{N}$ — шаг по времени

$t_n = \tau \cdot n$, $x_i = h \cdot i$ $u_i^n = u(n \cdot \tau, i \cdot h) = u(t_n, x_i)$



$$\tau = \frac{t_{\text{кон.}}}{N} \qquad h = \frac{\ell}{M}$$



В произвольной точке (t_n, x_i):

$$u_t\big|_{(t_n,x_i)} \approx \frac{u(t_n+\tau, x_i) - u(t_n, x_i)}{\tau} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau}$$

$$u_{tt}\big|_{(t_n,x_i)} \approx \frac{\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} - \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\tau}}{\tau} = \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\tau^2}$$

$$u_x\big|_{(t_n,x_i)} \approx \frac{u(t_n, x_i+h) - u(t_n, x_i)}{h} = \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h}$$

$$u_{xx}\big|_{(t_n,x_i)} \approx \frac{\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h} - \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h}}{h} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2}$$

Вместо дифференциального уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

получили **разностное уравнение**:

$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2}$$

т.е.

$$u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1} = \frac{a^2\tau^2}{h^2}\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right)$$

$$u_i^{n+1} = 2u_i^n - u_i^{n-1} + \frac{a^2\tau^2}{h^2}\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right)$$

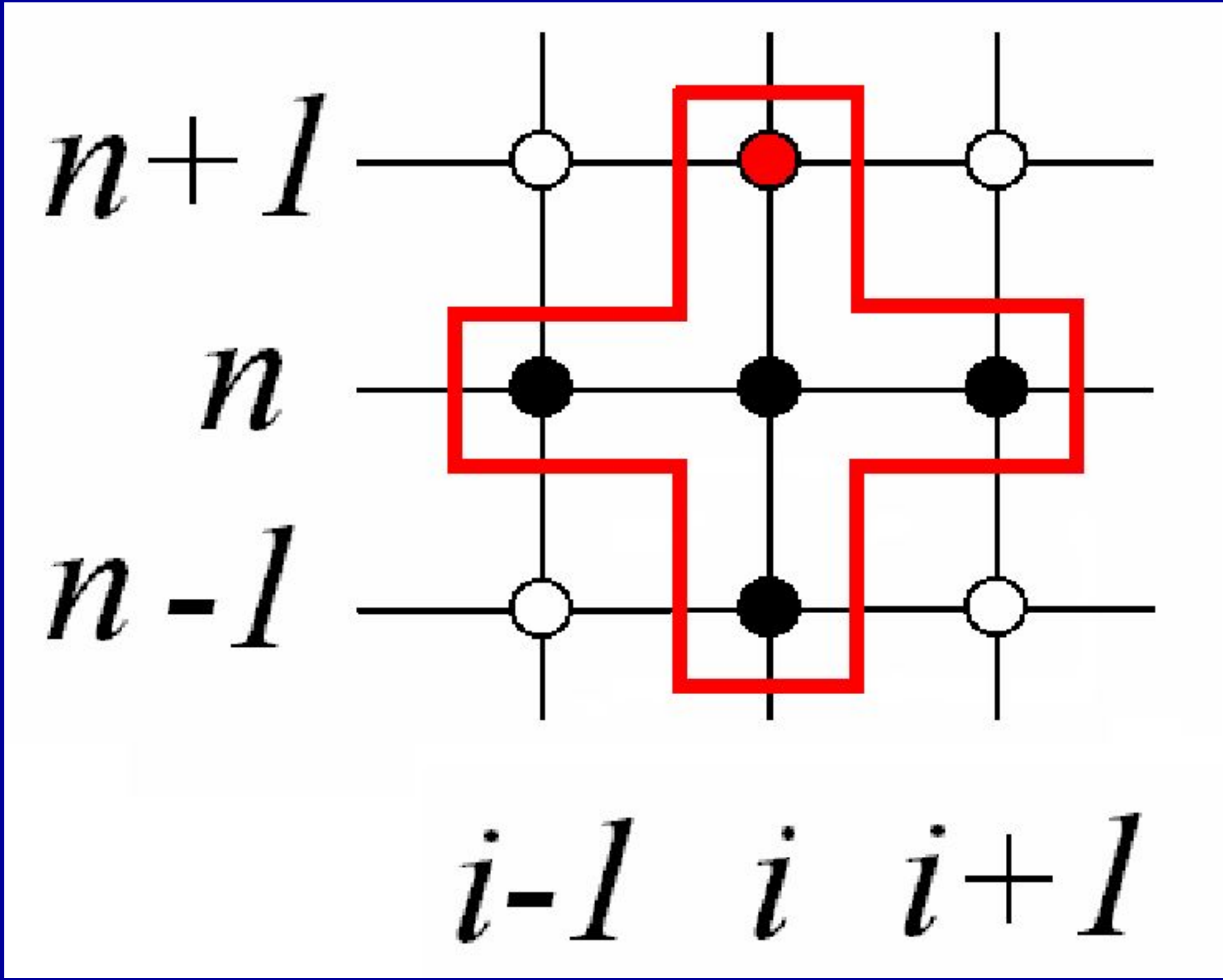
Окончательно:

$$\boxed{u_i^{n+1} = \frac{a^2\tau^2}{h^2}u_{i+1}^n + 2\left(1 - \frac{a^2\tau^2}{h^2}\right)u_i^n + \frac{a^2\tau^2}{h^2}u_{i-1}^n - u_i^{n-1}}$$

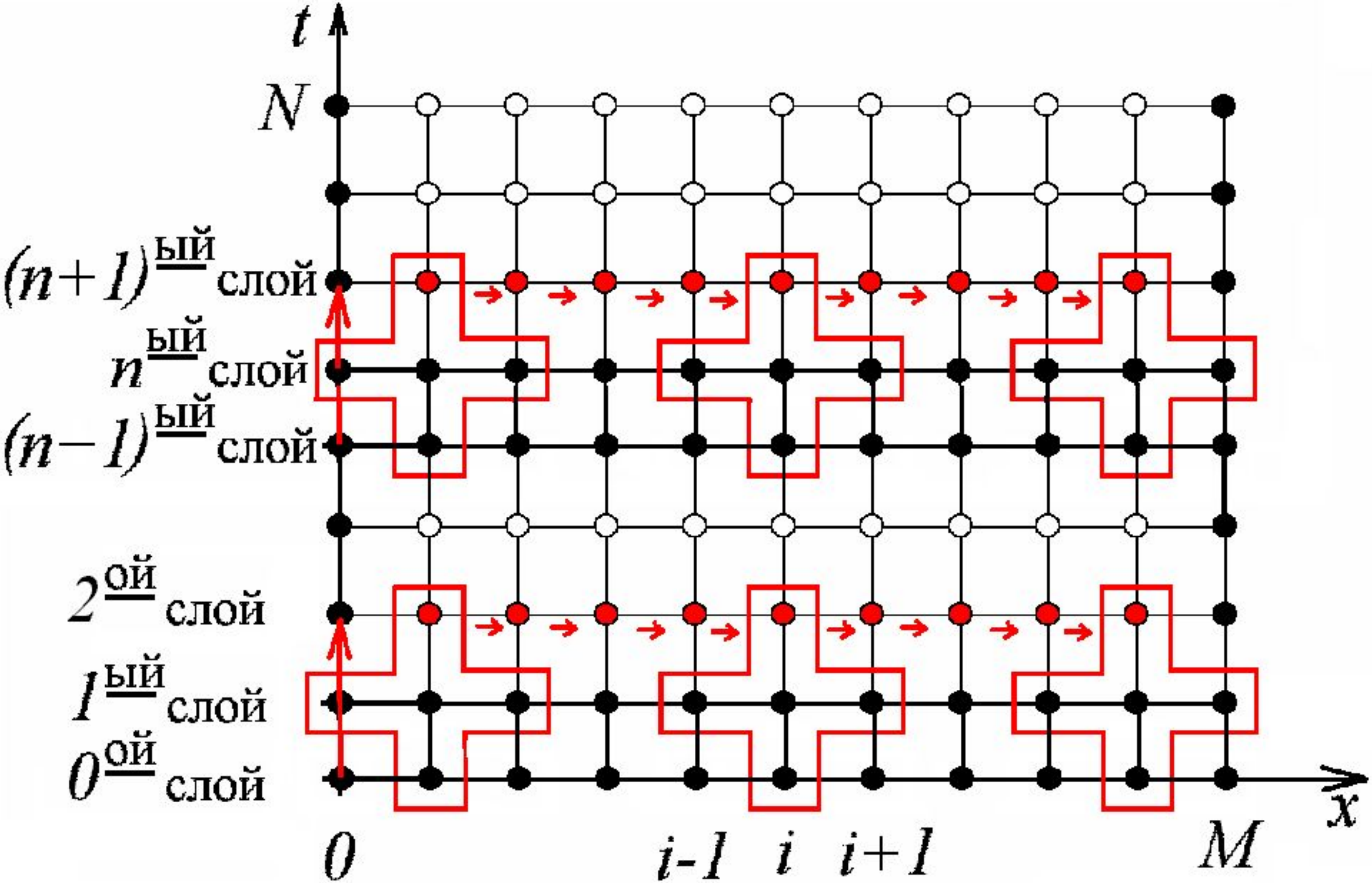
$$u_i^{n+1} = \frac{a^2\tau^2}{h^2}u_{i+1}^n + 2\left(1 - \frac{a^2\tau^2}{h^2}\right)u_i^n + \frac{a^2\tau^2}{h^2}u_{i-1}^n - u_i^{n-1}$$

явная схема

Шаблон:



Алгоритм счета:



Требуется "разгон" с нулевого слоя на первый.

Используется второе начальное условие

$$u_t(t,x)|_{t=0} = \varphi_1(x)$$

Записывается разностное соотношение в точке $(t=0, x=x_i)$ с u_i^0, $(t=\tau, x=x_i)$ с u_i^1:

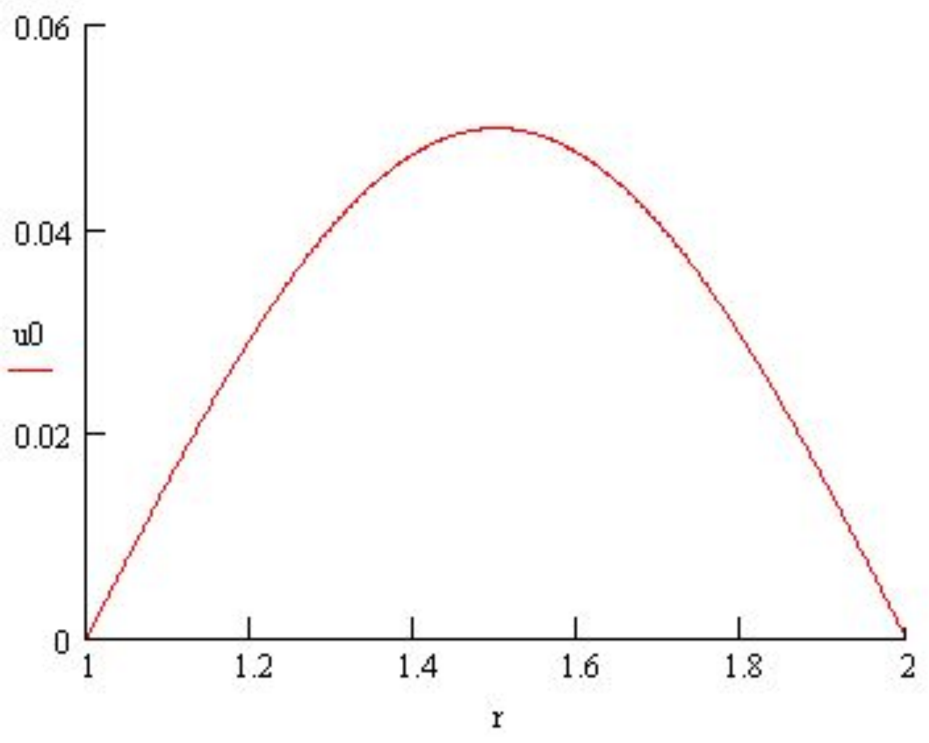
$$\frac{u_i^1 - u_i^0}{\tau} = \varphi_1(x_i)$$

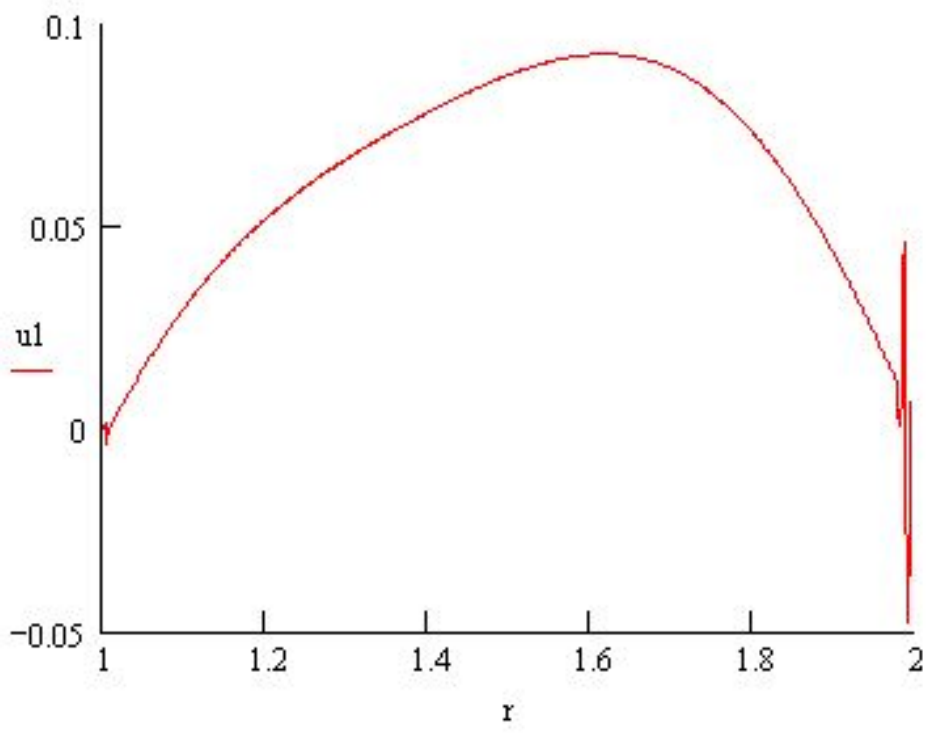
$$u_i^1 = u_i^0 + \tau\varphi_1(x_i), \quad i = 1, 2, ..., M-1$$

Условие устойчивости счета – условие Куранта:

$$1 - \frac{a^2\tau^2}{h^2} \geq 0; \quad 1 \geq \frac{a^2\tau^2}{h^2}; \quad \frac{h^2}{a^2} \geq \tau^2; \quad \frac{h}{a} \geq \tau$$

$$\tau \leq \frac{h}{a}$$





Неявные схемы:

$$\boxed{\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2}}$$

при переходе с n-го на $(n + 1)$-ый слой необходимо решать СЛАУ $\boxed{A\overrightarrow{U}^{n+1} = 2\overrightarrow{U}^n - \overrightarrow{U}^{n-1}, \quad \text{т.е. } \overrightarrow{U}^{n+1} = A^{-1}(2\overrightarrow{U}^n - \overrightarrow{U}^{n-1})}$

Теоремы сходимости для линейных задач:

$$|u(t, x)|_{(t_n, x_i)} - u_i^n| \leq Ch^\alpha$$

$\alpha > 0$ — порядок аппроксимации.

"Плюсы" разностных методов:
можно решить практически любую задачу,
включая нелинейную.

"Минусы" разностных методов:
устойчивость имеет место не всегда;
приходится брать мелкие шаги по времени;
сложности при аппроксимации произвольных граничных условий.

"Проклятие размерности" — трудно решать многомерные задачи.

Создают специальные ЭВМ:
многопроцессорные ЭВМ для распараллеливания счета;
"векторные процессоры"; и т.д., и т.п.

Есть и другие численные методы для таких задач:
метод конечных элементов,
метод Бубнова-Галеркина, и т.д.

Не всегда численные методы дают решение той задачи, что требуется решить!