Лекция. Дифференциальные Уравнения

Лектор : Сандаков Евгений Борисович – доцент кафедры №30 Высшей математики «НИЯУ МИФИ»

ОДУ. Лекция 11-ого ноября 2020г

§ Принцип сжимающих отображений

Пусть M — метрическое пространство

Опр. Последовательность $\{x_n\}_1^\infty \subset M$ называется фундаментальной, если для
$$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall n > N_0, \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow$$
$$\rho(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon$$

Опр. Метрическое пространство M называется полным, если любая фундаментальная последовательность $\{x_n\}_1^\infty \subset M$ имеет предел и этот предел принадлежит пространству M.

Пусть M — полное метрическое пространство.

Теорема (о сжимающем операторе)

Пусть оператор A действует в полном метрическом пространстве M (то есть $A: M \to M$) и пусть оператор A есть оператор сжатия: то есть $\exists q: 0 \le q < 1: \rho(Ax, Ay) \le q\rho(x,y)$ для $\forall x, y \in M$. Тогда у оператора A существует единственная неподввижная точка, то есть уравнение $Ax = x$ имеет единственное решение в пространстве M и это решение может быть найдено методом итераций (последовательных приближений), то есть $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, где $x_n = Ax_{n-1}$, причем x_0 – произвольная точка пространства M и справедлива оценка погрешности

$$\rho(x, x_{n+1}) \le \frac{q^n}{1-q}\rho(x_1, x_0)$$

Док-во:

1-ый шаг. Докажем, что последовательность $x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots$, где

$$x_{n+1} = Ax_n$$

имеет предел в M.

а) $\rho(x_{n+1}, x_n) = \rho(Ax_n, Ax_{n-1}) \le q\rho(x_n, x_{n-1}) =$

$= q\rho(Ax_{n-1}, Ax_{n-2}) \le q^2\rho(x_{n-1}, x_{n-2}) \le \ldots$

$\ldots \le q^n \cdot \rho(x_1, x_0)$ (*)

б) Докажем, что последовательность $\{x_n\}_1^\infty$ фундаментальна

$\rho(x_{n+p}, x_n) \overset{\text{(нер-во треугольника)}}{\le} \rho(x_{n+p}, x_{n+p-1}) +$

$+ \rho(x_{n+p-1}, x_{n+p-2}) + \ldots + \rho(x_{n+1}, x_n) \le$

(в силу (*)) $\leq q^{n+p-1}\rho(x_1,x_n)+q^{n+p-2}\rho(x_1,x_0)+\dots$
$\dots+q^n\rho(x_1,x_0)=q^n(1+q+\dots+q^{p-1})\rho(x_1,x_0)\leq$
$\leq q^n(1+q+q^2+\dots+q^{p-1}+\dots)\rho(x_1,x_0)=$
$=\dfrac{q^n}{1-q}\rho(x_1,x_0)$ (**)

Следовательно, $\{x_n\}_1^\infty$ – фундаментальная последовательность. Следовательно $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ и в силу полноты пространства M следует, что $x\in M$.

<u>2-ой шаг.</u> Докажем, что $x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ является неподвижной точкой оператора A.

Рассмотрим $\rho(Ax,x_{n+1})=\rho(Ax,Ax_n)\leq$ $\leq q\rho(x,x_n)$. Перейдем в этом неравенстве к пределу при $n\to\infty$. Получим $\rho(Ax,x)\leq q\rho(x,x)=0$. Следовательно, $\rho(Ax,x)\leq 0$. Откуда следует, что $\rho(Ax,x)=0$. Из аксиом метрического пространства имеем

$$Ax=x.$$

Таким образом $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ является неподвижной точкой оператора A.

<u>3-й шаг.</u> Докажем единственность неподвижной точки $x = \lim_{n\to\infty} x_n$

Будем доказывать это утверждение методом „От противного".

Пусть существует другая неподвижная точка „y" ($y \neq x$) оператора A, то есть $Ay = y$ и $Ax = x$. Тогда

$$\begin{cases} \rho(Ax, Ay) = \rho(x, y) \\ \rho(Ax, Ay) \leq q\,\rho(x, y) \end{cases}$$

Следовательно, $\rho(x, y) \leq q\,\rho(x, y)$ или

$$(1-q)\,\rho(x, y) \leq 0$$

Так как $1-q > 0$, то $\rho(x, y) \leq 0$. Из этого неравенства следует, что $\rho(x, y) = 0$. или (из аксиом метрического пространства) имеем, что $x = y$. Это противоречит предположению. Полученное противоречие и доказывает единственность неподвижной точки оператора A.

4-ый шаг. Оценка погрешности
следует из неравенства (**)
при $p \to +\infty$

$$\rho(x_{n+p}, x_{n+1}) \le \frac{q^n}{1-q}\rho(x_1, x_0) \quad (**)$$

Устремим в этом неравенстве „p" к $+\infty$.
В результате получим

$$\rho(x, x_{n+1}) \le \frac{q}{1-q}\rho(x_1, x_0)$$

\#

Замечание. Рассмотрим в банаховом пространстве B замкнутый шар

$B_b = \{y \in B : \|y - y_0\| \le b\}$ с центром y_0 и радиусом „b". Это множество является полным метрическим пространством. Поэтому теорема о сжимающем операторе справедлива и в B_b.

Теорема. Пусть оператор A задан в B_b и удовлетворяет условиям:

1) A действует из B_b в B_b

2) оператор A является оператором сжатия в B_b, то есть $\exists q : 0 \le q < 1$:

$$\|Ax_1 - Ax_2\| \le q\|x_1 - x_2\|$$

для любых x_1 и x_2 из B_ε.

Тогда оператор A имеет в B_ε единственную неподвижную точку, то есть уравнение $Ax = x$ имеет единственное решение в B_ε и оно может быть найдено методом последовательных приближений, то есть $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, где $x_n = Ax_{n-1}$ (x_0 – произвольная точка из B_ε) и справедлива оценка погрешности

$$\|x - x_{n+1}\| \le \frac{q^n}{1-q}\|x_1 - x_0\| \quad \#$$

§ Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нелинейной системы.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_2' = f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots\dots\dots\dots \\ y_n' = f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \qquad (1)$$

Обозначим $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $\vec{f}(t, \vec{y}) = \begin{pmatrix} f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{pmatrix}$

Тогда (1) примет вид

$$\vec{y}\,' = \vec{f}(t, \vec{y}) \qquad (1)$$

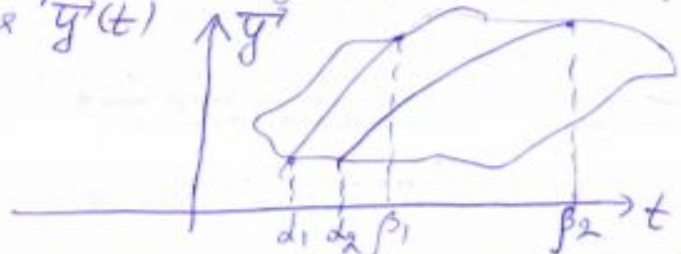
<u>Опр.</u> Решением системы (1) называется вектор-функция $\vec{\varphi}(t)$, определенная на некотором интервале $\langle \alpha, \beta \rangle$ такая, что

1) для $\forall t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ точка $(t, \vec{\varphi}(t)) \in G$, где G — область определения функции $\vec{f}(t, \vec{y})$ и $G \subset R^{n+1} = R^1_t \oplus R^n_{\vec{y}}$ и $\langle \alpha, \beta \rangle \subset \text{Пр}_t G$

2) Вектор-функция $\vec{\varphi}(t) \in \vec{C}^{(1)} \langle \alpha, \beta \rangle$

3) При подстановке вектор-функции $\vec{\varphi}(t)$ в уравнение (1) получаем тождество по $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$.

<u>Замечание</u> Для нелинейной системы интервал $\langle \alpha, \beta \rangle$ зависит от решения $\vec{y}(t)$



<u>Задача Коши</u> для системы (1) состоит в том, чтобы среди всех решений

системы найти те, которые удовлетворяют условиям:

$$\begin{cases} y_1(t_0)=y_{10} \\ y_2(t_0)=y_{20} \\ \dots \\ y_n(t_0)=y_{n0} \end{cases} \quad \text{или} \quad \vec{y}(t_0)=\vec{y}_0 \qquad (2)$$

<u>Лемма</u> Решение задачи Коши (1)–(2)

$$\begin{cases} \vec{y}\,'=\vec{f}(t,\vec{y}) & (1) \\ \vec{y}(t_0)=\vec{y}_0 & (2) \end{cases}$$

где $\vec{f}(t,\vec{y})\in \vec{C}(G)$ эквивалентно решению интегрального уравнения

$$\vec{y}=\vec{y}_0+\int_{t_0}^{t}\vec{f}(\tau,\vec{y}(\tau))\,d\tau \qquad (3)$$

(<u>Опр.</u> Решением уравнения (3) называется функция $\vec{\varphi}(t)\in \vec{C}\langle\alpha,\beta\rangle$ такая, что для каждого $t\in\langle\alpha,\beta\rangle$ точка $(t,\vec{\varphi}(t))\in G$ и при подстановке вектор-функции $\vec{\varphi}(t)$ в уравнение (3) получаем верное равенство.)

<u>Док-во леммы</u>. Пусть $\vec{\varphi}(t)$ — решение задачи Коши (1)–(2). Тогда интегрируя уравнение (1), получим

$$\vec{y}(t)=\int_{t_0}^{t}\vec{f}(\tau,\vec{y}(\tau))d\tau+\vec{C}.$$

Из условия (2) получим, что $\vec{C}=\vec{y}_0$. Подставляя найденное $\vec{C}$ в предыдущее равенство, получим (3), то есть решение задачи Коши (1)-(2) является решением интегрального уравнения (3).

Обратно. Пусть $\vec{\varphi}(t)$ — решение интегрального уравнения (3). Тогда правая часть уравнения (3) дифференцируема по t, так как $\vec{f}\in\vec{C}(G)$. Тогда левая часть равенства (3) также дифференцируема по t (то есть $\vec{y}(t)\in C^{(1)}\langle\alpha,\beta\rangle$).

Тогда дифференцируя равенство (3) получим (1). Подставляя в (3) $t=t_0$, получим (2). Таким образом, если $\vec{y}(t)$ является решением интегрального уравнения (3), то $\vec{y}(t)$ является также решением задачи Коши (1)-(2). Таким образом лемма полностью доказана #

Опр. Функция $\vec{f}(t,\vec{y})$ — определённая в выпуклой по $\vec{y}$ области $\Omega \subset R^{n+1}$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной Липшица L, если для любых двух точек $(t,\vec{y}_1)$ и $(t,\vec{y}_2) \in \Omega$ выполняется условие

$$|\vec{f}(t,\vec{y}_1) - \vec{f}(t,\vec{y}_2)| \leq L \|\vec{y}_1 - \vec{y}_2\|$$