МИНИМИЗАЦИЯ ПОЛНОСТЬЮ ОПРЕДЕЛЕННЫХ АВТОМАТОВ

Решение задачи минимизации состоит в разбиении всех состояний исходного абстрактного автомата на попарно непересекающиеся классы эквивалентных состояний и замене каждого класса эквивалентности одним состоянием. Получающийся в результате минимизации автомат имеет столько же состояний, на сколько классов эквивалентности разбиваются состояния исходного автомата [3].

Состояния и являются эквивалентными $(a_m \sim a_s)$, если совпадают реакции для всевозможных входных слов ξ: $\lambda(a_m, \xi) = \lambda(a_s, \xi)$. Состояния a_m и a_s k - эквивалентны $(a_m \quad a_s)$, если $\lambda(a_m, \xi) = \lambda(a_s, \xi)$ для всевозможных слов длины k.

При минимизации полностью определённых автоматов Мили вводится понятие одноэквивалентности состояний. **Одноэквивалентными будут состояния с одинаковыми столбцами в таблице выходов.**

Для автомата Мура вводится понятие 0-эквивалентности состояний и разбиение множества состояний на 0-эквивалентные классы. **0-эквивалентными являются одинаково отмеченные состояния.**

Алгоритм минимизации автомата $S = <A, Z, W, \delta, \lambda, a_1>$ состоит из следующих шагов:

1. Находим эквивалентное разбиение состояний π, т. е. разбиение состояний на непересекающиеся классы эквивалентных состояний.

2. В каждом классе эквивалентности разбиения π выбирается по одному состоянию, в результате чего получаем множество A' состояний минимального автомата $S' = \{A', Z, W, \delta', \lambda', a_1'\}$ эквивалентного автомату S.

3. Для определения функции переходов δ' и функции выходов λ' автомата S' в таблицах переходов и выходов вычёркиваются столбцы, соответствующие не вошедшим в A' состояниям. В оставшихся столбцах не вошедшие в множество A состояния заменяются на эквивалентные.

4. В качестве начального состояния a_1' выбирается состояние, эквивалентное состоянию a_1. В частности, удобно за a_1' принимать само состояние a_1.

МЕТОД АУФЕНКАМПА И ХОНА

Минимизация автомата Мили

Выполнение отдельных шагов минимизации автомата Мили рассмотрим на примере.

Пример 1.2. Минимизировать полностью определённый автомат Мили S_1, заданный таблицами переходов и выходов (табл.1.11 и 1.12).

Таблица.1.11

Таблица переходов неминимального автомата Мили

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
z_1	a_3	a_4	a_3	a_4	a_5	a_6
z_2	a_5	a_6	a_5	a_6	a_1	a_2

Таблица 1.12

Таблица выходов неминимального автомата Мили

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
z_1	w_1	w_1	w_1	w_1	w_1	w_1
z_2	w_1	w_1	w_2	w_2	w_1	w_1

1 шаг. По таблице выходов (табл.1.12) находим разбиение π_1 на классы одноэквивалентных состояний, объединяя в одноэквивалентные классы одинаковые столбцы в таблице выходов:

$$\pi_1 = \{B_1, B_2\} = \{\{a_1, a_2, a_5, a_6\}, \{a_3, a_4\}\}.$$

Для сокращения числа скобок будем использовать надчёркивания, а элементы множества под чертой разделять точками.

$$\pi_1 = \{B_1, B_2\} = \{\overline{\mathbf{1.2.5.6}}, \overline{\mathbf{3.4}}\}.$$

Строим таблицу разбиения π_1 (табл. 1.13), заменяя состояния в таблице переходов исходного автомата (табл. 1.11) соответствующими классами одноэквивалентности.

Таблица.1.11

Таблица переходов неминимального автомата Мили

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
z_1	a_3	a_4	a_3	a_4	a_5	a_6
z_2	a_5	a_6	a_5	a_6	a_1	a_2

Таблица.1.13

Разбиение π_1 состояний автомата S_1

π_1	B_1				B_2	
A	a_1	a_2	a_5	a_6	a_3	a_4
z_1	B_2	B_2	B_1	B_1	B_2	B_2
z_2	B_1	B_1	B_1	B_1	B_1	B_1

По табл.1.13 получим разбиение π_2 на классы 2-эквивалентных состояний (табл.1.14): $\pi_2 = \{C_1, C_2, C_3\} = \{\overline{1.2}, \overline{5.6}, \overline{3.4}\}$.

Таблица.1.11

Таблица переходов неминимального автомата Мили

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
z_1	a_3	a_4	a_3	a_4	a_5	a_6
z_2	a_5	a_6	a_5	a_6	a_1	a_2

Таблица 1.14

Разбиение π_2 состояний втомата S_1

π_2	C_1		C_2		C_3	
A	a_1	a_2	a_5	a_6	a_3	a_4
z_1	C_3	C_3	C_2	C_2	C_3	C_3
z_2	C_2	C_2	C_1	C_1	C_2	C_2

Разбиение π_3 получаем аналогично: $\pi_3 = \{D_1, D_2, D_3\} = \{\overline{1.2}, \overline{5.6}, \overline{3.4}\}$; оно полностью совпадает с π_2. Процедура завершена.

Разбиение $\pi_3 = \pi_2 = \pi$ есть разбиение множества состояний автомата Мили S_1 на классы эквивалентных между собой состояний.

2. Из каждого класса эквивалентности произвольно выбираем по одному состоянию:

$$A' = \{a_1, a_3, a_6\}.$$

3. Строим таблицы переходов и выходов минимального автомата (табл.1.15, 1.16).

Таблица 1.15.
Получение таблицы переходов минимального автомата Мили

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
z_1	a_3	a_4	a_3	a_4	a_5	a_6
z_2	$\cancel{a_5}\, a_6$	a_6	$\cancel{a_5}\, a_6$	a_6	a_1	$\cancel{a_2}\, a_1$

→

	a_1	a_3	a_6
z_1	a_3	a_3	a_6
z_2	a_6	a_6	a_1

Таблица 1.16.
Получение таблицы выходов минимального автомата Мили

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
z_1	w_1	w_1	w_1	w_1	w_1	w_1
z_2	w_1	w_1	w_2	w_2	w_1	w_1

→

	a_1	a_3	a_6
z_1	w_1	w_1	w_1
z_2	w_1	w_2	w_1

4. В качестве начального состояния выбирается состояние a_1.

Минимизация автомата Мура

При минимизации полностью определённых автоматов Мура вводится понятие 0-эквивалентности состояний и разбиение множества состояний на 0-эквивалентные классы. 0-эквивалентными являются одинаково отмеченные состояния. Если два состояния автомата Мура 0-эквивалентны и под действием одинаковых входных сигналов попадают в 0-эквивалентные состояния, то они называются 1-эквивалентными.

Все дальнейшие классы эквивалентности для автомата Мура определяются аналогично рассмотренному выше для автомата Мили.

(см. пример 1.3)

Минимизация ЦА на основе использования таблицы пар

Алгоритм минимизации автомата $S = <A, Z, W, \delta, \lambda, a_1>$ состоит из следующих шагов:

1. Находим разбиение состояний π на классы 1-эквивалентных (для автомата Мили) или 0-эквивалентных (для автомата Мура) состояний.

2. Строим таблицу пар.

3. По таблице пар находим разбиение состояний на классы эквивалентных состояний.

4. В каждом классе эквивалентности выбирается по одному состоянию, в результате чего получаем множество A' состояний минимального автомата.

5. Для определения функции переходов δ' и функции выходов λ' автомата S' в таблицах переходов и выходов вычёркиваются столбцы, соответствующие не вошедшим в A' состояниям. В оставшихся столбцах не вошедшие в множество A состояния заменяются на эквивалентные.

6. В качестве начального состояния a_1' выбирается состояние, эквивалентное состоянию a_1. В частности, удобно за a_1' принимать само состояние a_1.