Структурный анализ графов

Максимальные полные и максимальные пустые подграфы

Ключевые понятия к данной теме:

- подграф графа;
- пустой граф (подграф);
- полный граф (подграф).

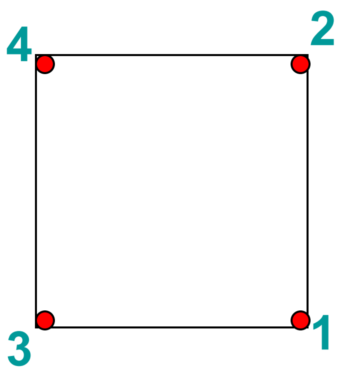
Постановка задачи

Требуется найти в графе *G* =(X,U) все ***максимальные пустые подграфы***.

Определение ***максимального пустого подграфа***

. . . .

G=(X,U)

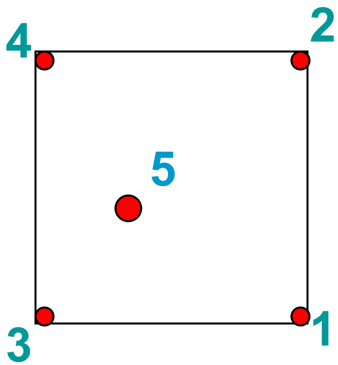


G1=(X1): X1= {(3,2)}

G2=(X2): X2 = {(4,1)}

Максимальные пустые подграфы графа G

G=(X,U)



G1=(X,U): X={(3,2)}; U =Ø

G2=(X,U): X= {(4,1)}; U = Ø

~~G3=(X,U): X= {(5)}; U = Ø~~

максимальные пустые подграфы

Независимое множество вершин
(внутренне устойчивое множество)

граф G = (X,U)

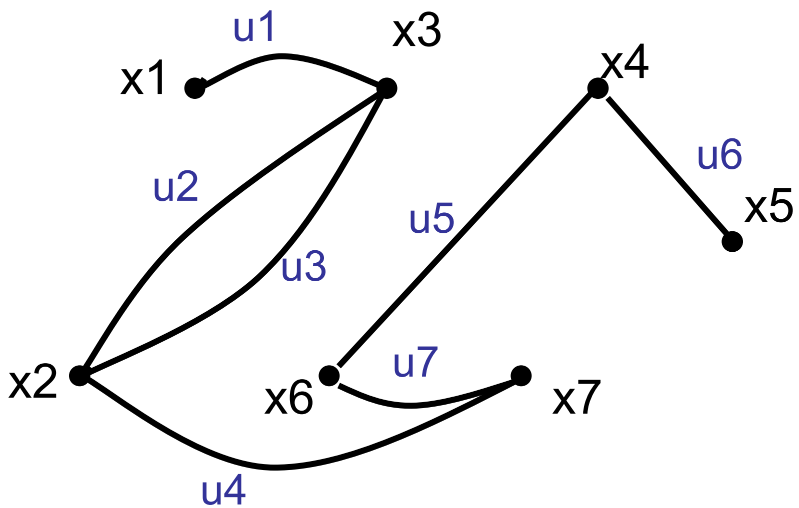


Рисунок 4.

Рассмотрим алгоритм Х.Магу, Дж.Уэйсмана

нахождения в графе *G* всех

максимальных пустых подграфов

$xx\ldots x = x$

$f = x_1 \wedge x_2$

Законы алгебры логики

$f = x_1x_2 \vee x_1x_2$

$x \vee xy = x$

$f = x_1 \vee x_2$

$$xy \vee x\bar{y} = x$$

Эквивалентные преобразования

(a+b) (a+c)… (a+p)= a+bc…p

$x(x \vee y) = (xx \vee xy) = x \vee xy = x$

Эквивалентные преобразования

$(a+b)(a+c)\ldots(a+p) = a+bc\ldots p$

$x \vee xy = x$

$x(x \vee y) = (xx \vee xy) = x \vee xy = x$

операция поглощения

$$xy \vee x\overline{y} = x$$

операция склеивания

$xx\ldots x = x$

$x+x+\ldots+x = x$

Закон идемпотентности

Дан граф G=(X,U)

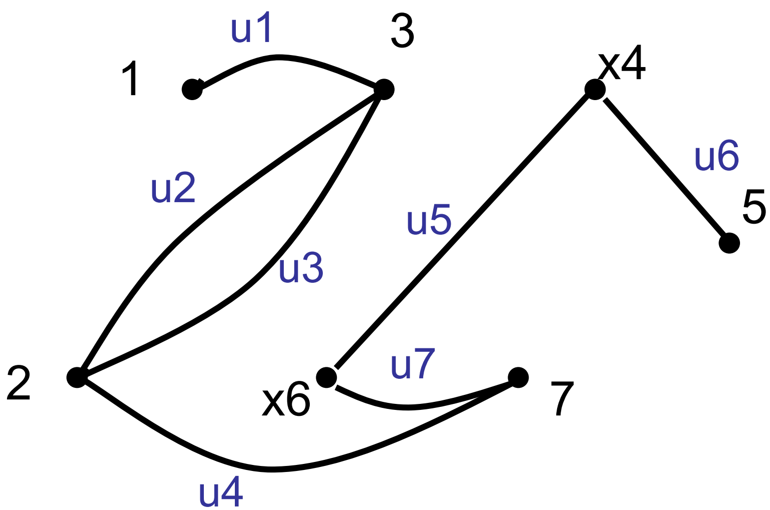


Рисунок 4.

Матрица инциденций *A* графа G=(*X*,*U*)

A	u1	u2	u3	u4	u5	u6	u7
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							

граф G=(X,U)

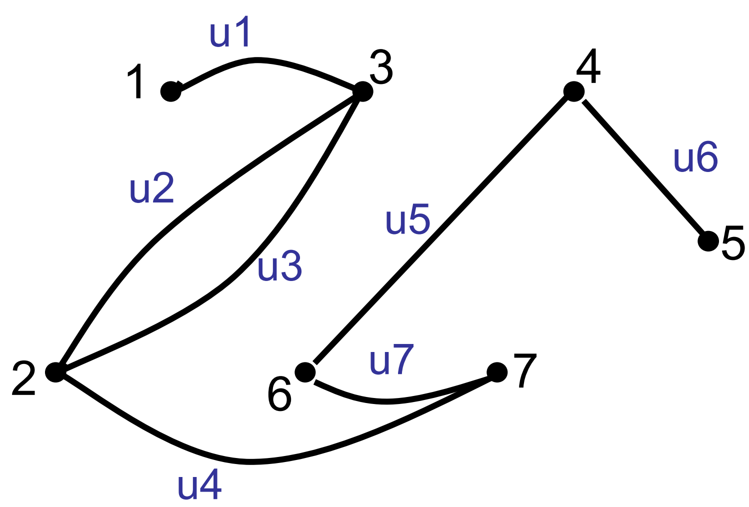


Рисунок 4.

Матрица инциденций *A* графа G=(*X*,*U*)

A	u1	u2	u3	u4	u5	u6	u7
1	1	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	1	0	0	0
3	1	1	1	0	0	0	0
4	0	0	0	0	1	1	0
5	0	0	0	0	0	1	0
6	0	0	0	0	1	0	1
7	0	0	0	1	0	0	1

Усовершенствованная матрица инциденций графа G=(X, U).

Для её получения вводится система «псевдобулевских» переменных

$\{x_i\}$, где $i = \overline{1,n}$ (*n - число вершин графа G*).

Каждая строка матрицы инциденций умножается на соответствующую переменную из $\{x_i\}$.

Усовершенствованная матрица инциденций графа G=(X,U)

граф G=(X,U)

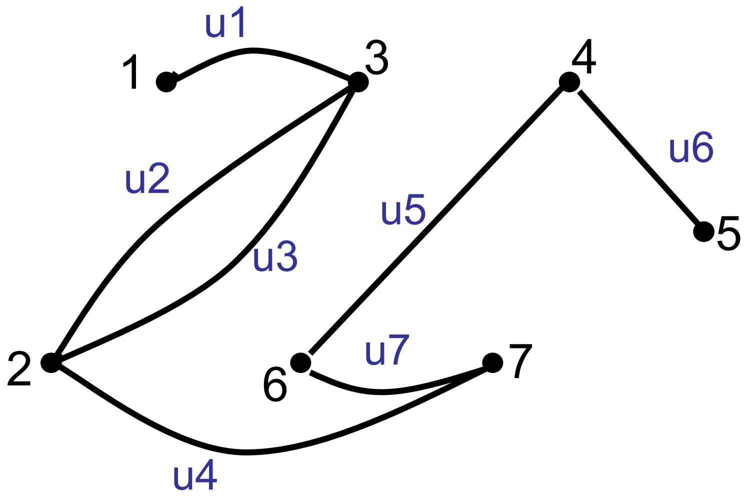


Рисунок 4.

	u1	u2	u3	u4	u5	u6	u7
x1	x_1	0	0	0	0	0	0
x2	0	x_2	x_2	x_2	0	0	0
x3	x_3	x_3	x_3	0	0	0	0
x4	0	0	0	0	x_4	x_4	0
x5	0	0	0	0	0	x_5	0
x6	0	0	0	0	x_6	0	x_6
x7	0	0	0	x_7	0	0	x_7

Составим произведение *П:*

$$\Pi_G = \Pi_j \sum_i a_{i,j} \cdot x_i = 1$$

$\Pi_G = (x1 + x3)\ (x2 + x3)\ (x2 + x3)\ (x2 + x7)\ (x4 + x6)\ (x4 + x5)\ (x6 + x7) =$

$= (x1 + x3)\ (x2 + x3)\ (x2 + x7)\ (x4 + x6)\ (x4 + x5)\ (x6 + x7) =$

$= (x1 + x3)\ (x2 + x3)\ (x2 + x7)\ (x4 + x6)\ (x4 + x5)\ (x6 + x7) =$

$= (x1 + x3)\ (x2 + x3x7)\ (x4 + x5x6)\ (x6 + x7) =$

$= (x1x2 + \cancel{x1x3x7} + x2x3 + x3x7)(x4x6 + x4x7 + x5x6 + \cancel{x5x6x7}) =$

$= (x1x2 + x2x3 + x3x7)(x4x6 + x4x7 + x5x6) =$

$= x1x2x4x6 + x1x2x4x7 + x1x2x5x6 + x2x3x4x6 + \cancel{x2x3x4x7} + x2x3x5x6 +$

$+ \cancel{x3x4x6x7} + x3x4x7 + x3x5x6x7 =$

$= x1x2x4x6 + x1x2x4x7 + x1x2x5x6 + x2x3x4x6 + x2x3x5x6 + x3x4x7 +$
$+ x3x5x6x7.$

Получили произведение *П:*

$$\Pi_G = \Pi_j \sum_i a_{i,j} \cdot x_i = 1$$

Π_G = x1x2x4x6 + x1x2x4x7 + x1x2x5x6 + x2x3x4x6 + x2x3x5x6 +
+ x3x4x7 + +x3x5x6x7 = 1.

Усовершенствованная матрица инциденций графа G=(X,U)

	u1	u2	u3	u4	u5	u6	u7
x1	x_1	0	0	0	0	0	0
x2	0	x_2	x_2	x_2	0	0	0
x3	x_3	x_3	x_3	0	0	0	0
x4	0	0	0	0	x_4	x_4	0
x5	0	0	0	0	0	x_5	0
x6	0	0	0	0	x_6	0	X_6
x7	0	0	0	x_7	0	0	x_7

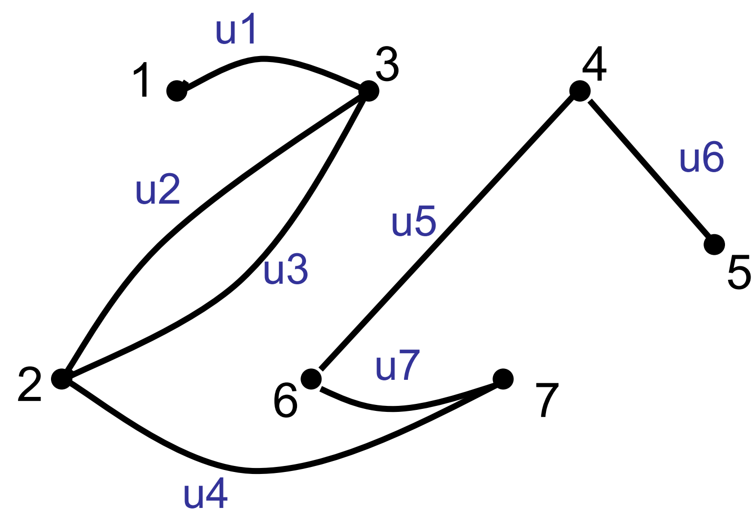


Рисунок 4.

П = x1x2x4x6 + x1x2x4x7 + x1x2x5x6 + x2x3x4x6 + x2x3x5x6 + x3x4x7 + +x3x5x6x7.

Алгебраические дополнения:

$$S = \left[(x_3x_5x_7), (x_3x_5x_6), (x_3x_4x_7), (x_1x_2\ x_5x_6), (x_1x_2x_4), (x_1x_5x_7), (x_1x_4x_7). \right]$$

Усовершенствованная матрица инциденций графа G=(X,U)

	u1	u2	u3	u4	u5	u6	u7
x1	x_1	0	0	0	0	0	0
x2	0	x_2	x_2	x_2	0	0	0
x3	x_3	x_3	x_3	0	0	0	0
x4	0	0	0	0	x_4	x_4	0
x5	0	0	0	0	0	x_5	0
x6	0	0	0	0	x_6	0	X_6
x7	0	0	0	x_7	0	0	x_7

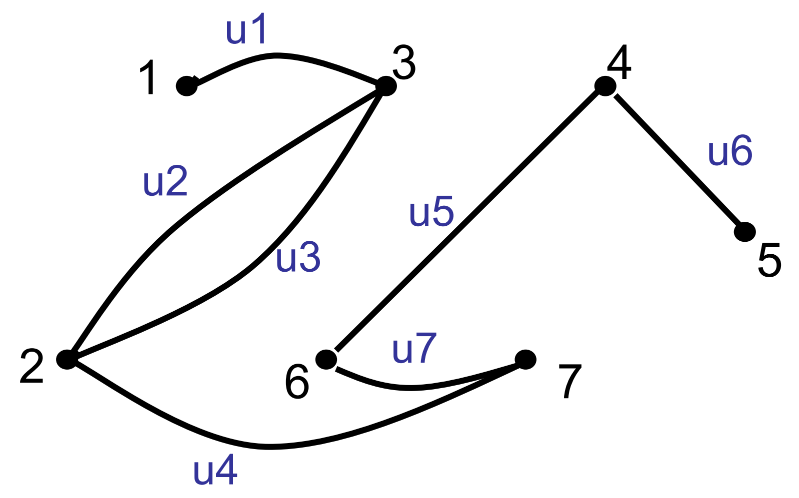


Рисунок 4.

П = x1x2x4x6 + x1x2x4x7 + x1x2x5x6 + x2x3x4x6 + x2x3x5x6 + x3x4x7 + +x3x5x6x7.

Максимальные пустые подграфы графа G:

$$S = \left\{ (x_3x_5x_7), (x_3x_5x_6), (x_3x_4x_7), (x_1x_2\,x_5x_6), (x_1x_2x_4), (x_1x_5x_7), (x_1x_4x_7) \right\}$$

Раскраска графа

Правильная раскраска вершин графа

Хроматическое число графа

Хроматическое число графа — минимальное количество цветов, требуемое для раскраски вершин графа, при которой любые вершины, соединенные ребром раскрашены в разный цвет.

Применение алгоритма

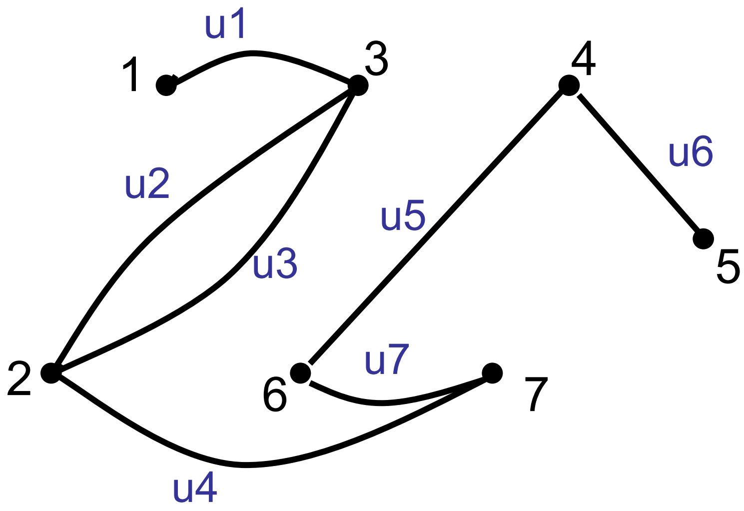


Рисунок 4.

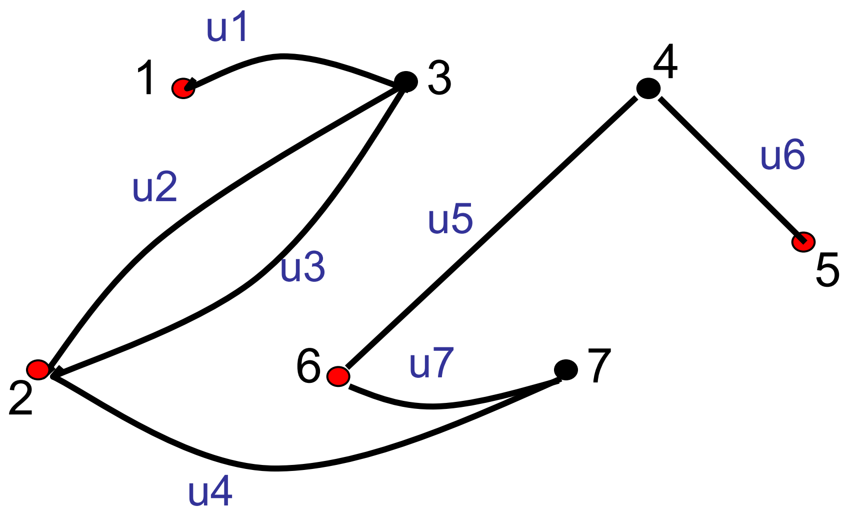


Рисунок 4а.

Максимальные пустые подграфы:

$$S = \left[\begin{array}{l} (x_3x_5x_7), (x_3x_5x_6), (x_3x_4x_7), (x_1x_2\ x_5x_6), (x_1x_2x_4), \\ (x_1x_5x_7), (x_1x_4x_7). \end{array} \right]$$

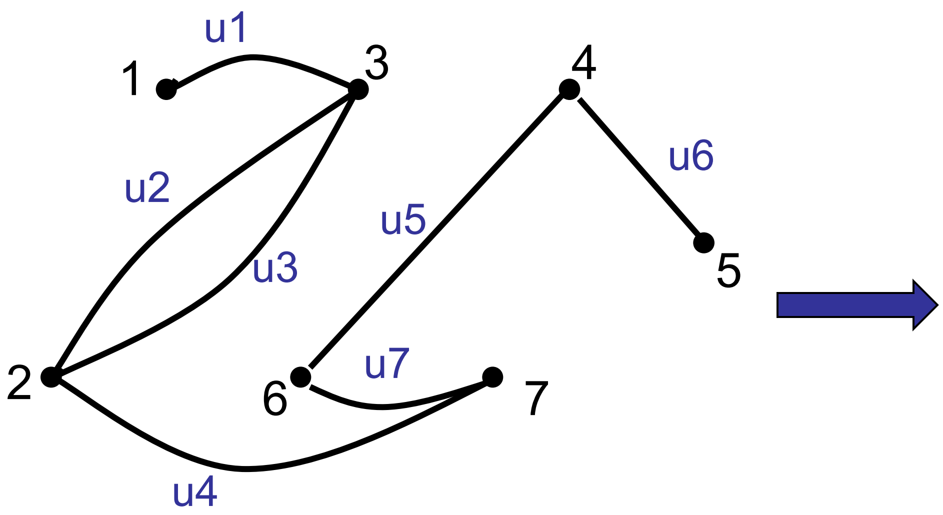


Рисунок 4.

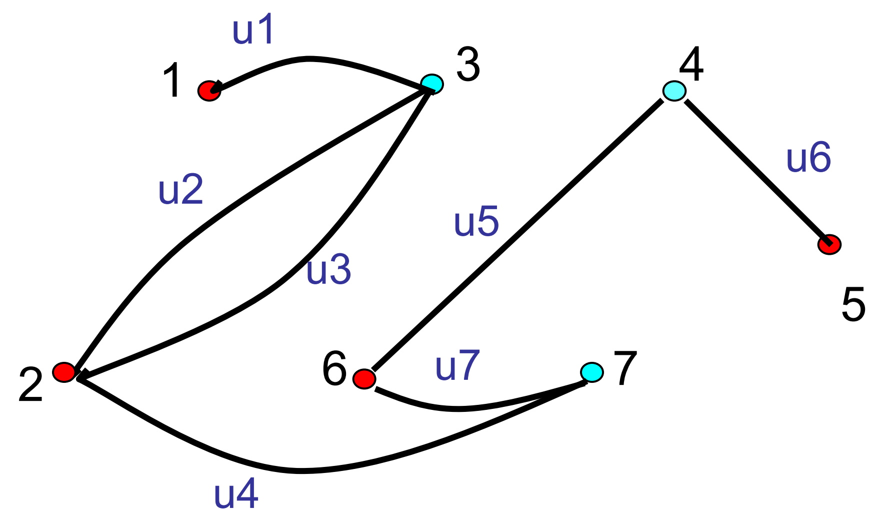


Рисунок 4а.

Алгебраические дополнения:

$$S = \left[\begin{array}{l} (x_3x_5x_7), (x_3x_5x_6), (x_3x_4x_7), (x_1x_2\, x_5x_6), (x_1x_2x_4), \\ \quad (x_1x_5x_7), (x_1x_4x_7). \end{array} \right]$$

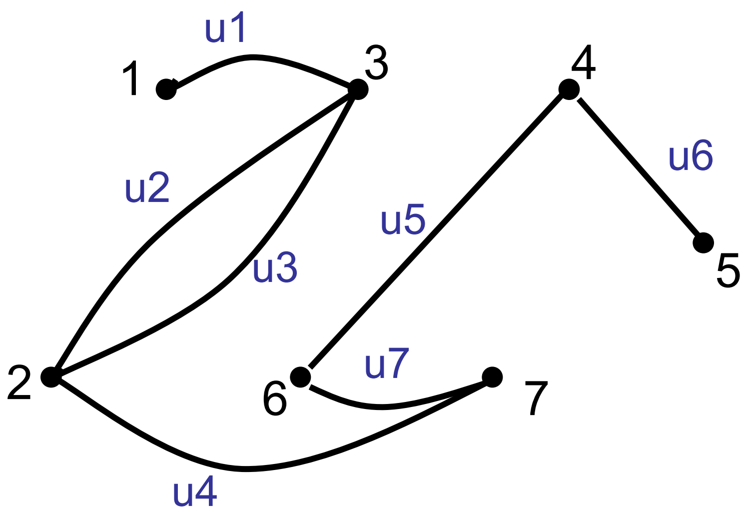


Рисунок 4.

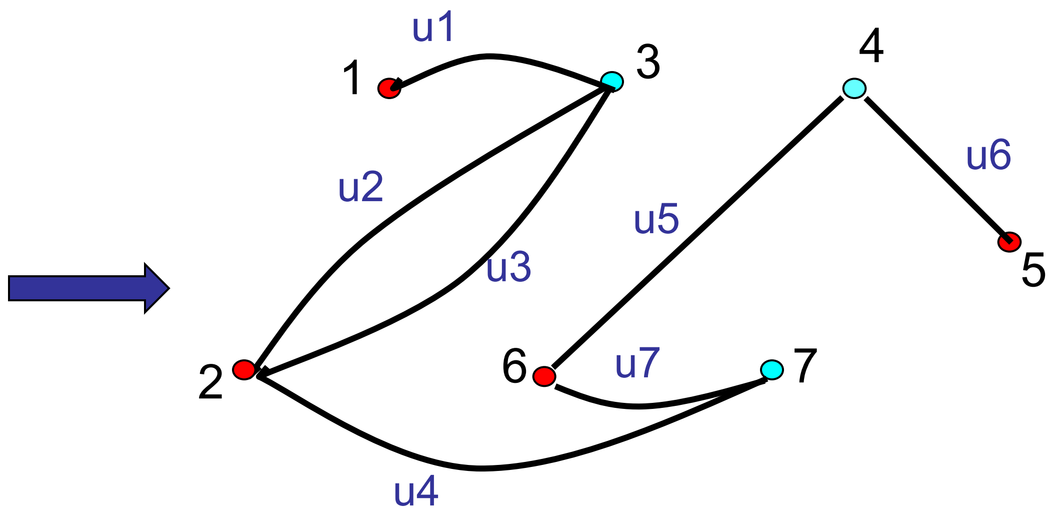


Рисунок 4а.

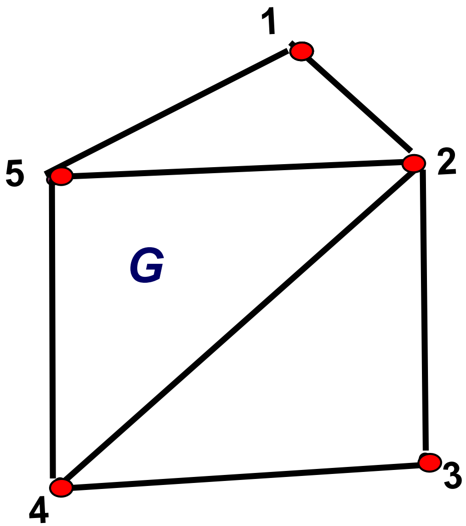
Алгебраические дополнения:

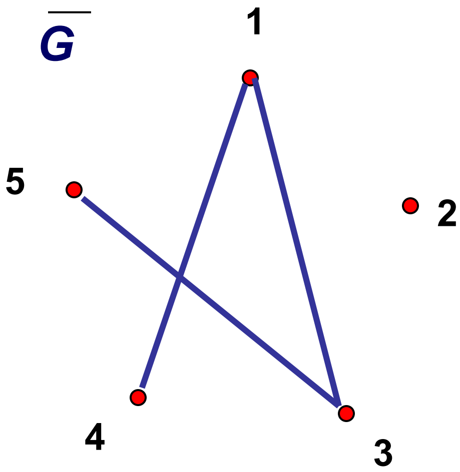
$$S = \left[\begin{array}{l} (x_3x_5x_7),\ (x_3x_5x_6),\ (x_3x_4x_7),\ (x_1x_2\ x_5x_6),\ (x_1x_2x_4), \\ \quad (x_1x_5x_7),\ (x_1x_4x_7). \end{array} \right]$$

Максимальные полные подграфы

Задача : найти в графе *G* все *максимальные* полные подграфы.

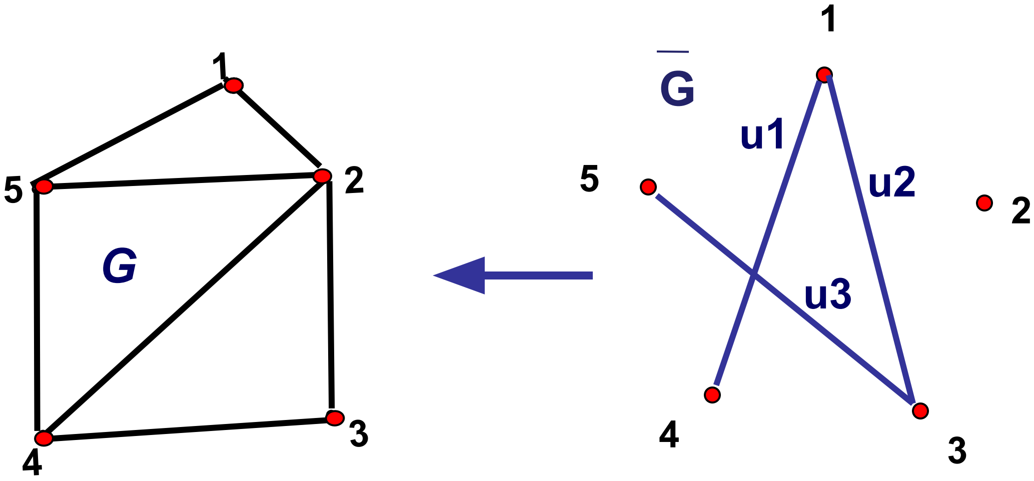
Решение.





G	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	1
2	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	1	1	0	1	0

$\overline{G}$	1	2	3	4	5
1	0	0	1	1	0
2	0	0	0	0	0
3	1	0	0	0	1
4	1	0	0	0	0
5	0	0	1	0	0



$\overline{G}$	1	2	3	4	5
1	0	0	1	1	0
2	0	0	0	0	0
3	1	0	0	0	1
4	1	0	0	0	0
5	0	0	1	0	0

$\overline{G}$ – граф, дополняющий G до полного

$\overline{G}$	u1	u2	u3
1	1	1	0
2	0	0	0
3	0	1	1
4	1	0	0
5	0	0	1

$\overline{G}$	u1	u2	u3
1	x1	x1	0
2	0	0	0
3	0	x3	x3
4	x4	0	0
5	0	0	x5

$$П = (x_1 + x_4x_3)(x_3 + x_5) = x_1x_3 + x_1x_5 + + x_4x_3 + x_4x_3\cancel{x_5}.$$

Алгебраические дополнения:

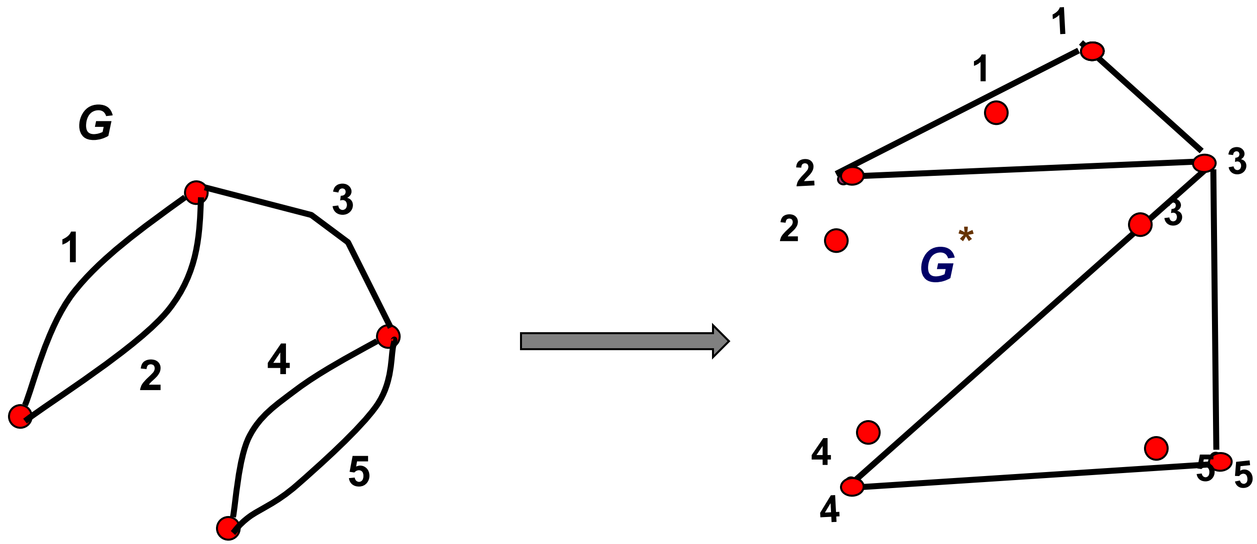
S = x2x4x5; x2x4x3; x1x2x5

Максимальные полные подграфы графа G :

x2x4x5; x2x4x3; X1x2x5 .

Раскраска графа

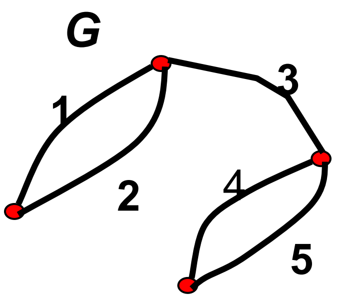
Пример рёберной правильной раскраски с помощью алгоритма Дж.Магу, Х.Уэйсмана

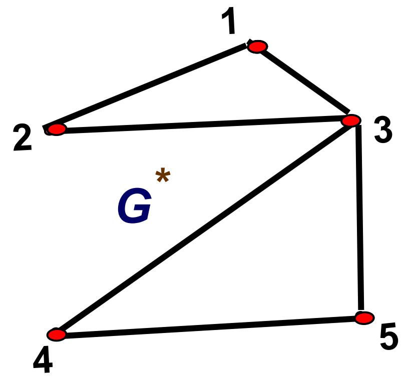


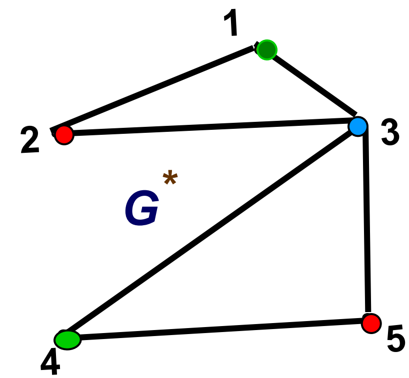
$$П = (1 + 23)(3+ 245)(4+5) = (13+1245+23+2345)(4+5) =$$

$$= 134+135+1245+234+23\cancel{4}5+23\cancel{4}5 + 235 =$$

$$= 134 +135+ 1245 +234 + 235.$$







$$\Pi_{g^*} = (1 + 23)(3 + 245)(4+5) = (13+1245+23+2345)(4+5) =$$

$$= 134+135+1245+234+2345+2345 + 235 =$$

$$= 134 + 135 + 1245+234+235.$$

Алгебраические дополнения:

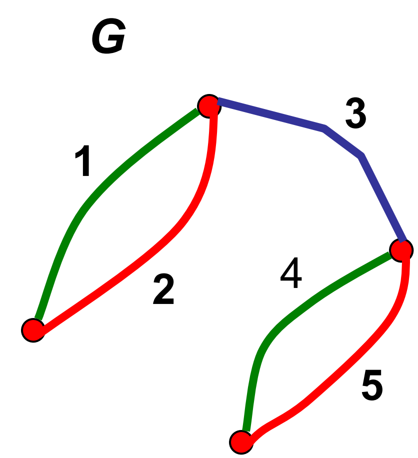
$S = \{ 25; 24; 3; 15; 14 \}$

Раскраска G^*:

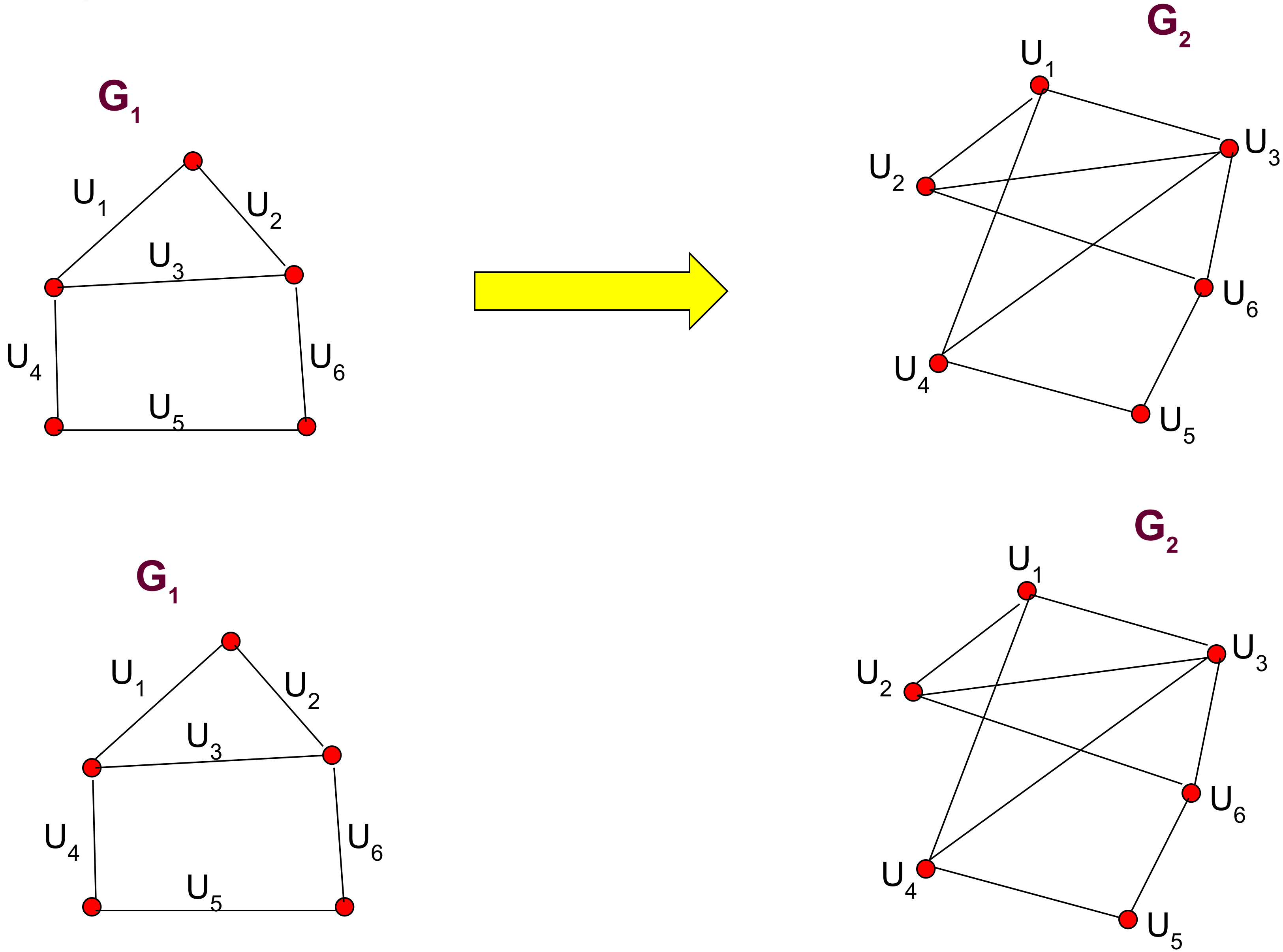
2, 5 —

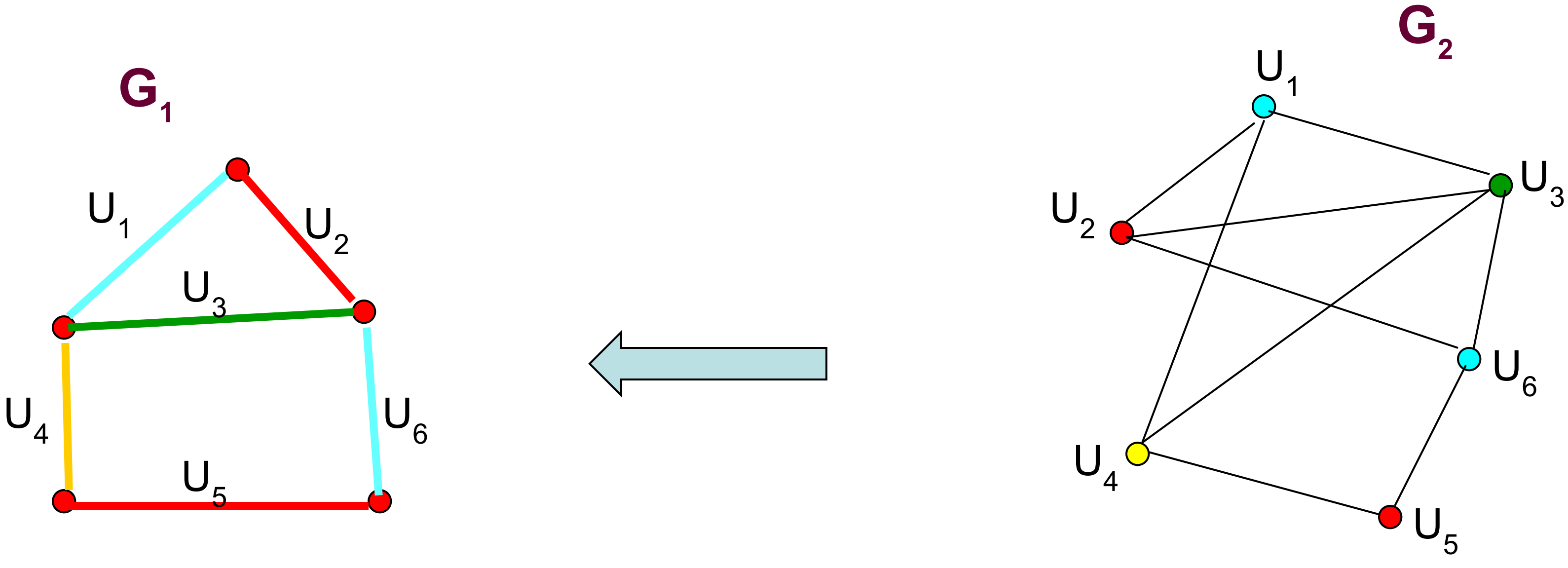
1, 4 —

3 —



Пример 2


G1
U1
U2
U3
U4
U5
U6
G2
U1
U2
U3
U4
U5
U6
G1
U1
U2
U3
U4
U5
U6
G2
U1
U2
U3
U4
U5
U6



G1
U1
U2
U3
U4
U5
U6
G2
U1
U2
U3
U4
U5
U6

$П_G =$

Усовершенствованная матрица инциденций графа G=(X,U)

	u1	u2	u3	u4	u5	u6	u7
x1	x_1	0	0	0	0	0	0
x2	0	x_2	x_2	x_2	0	0	0
x3	x_3	x_3	x_3	0	0	0	0
x4	0	0	0	0	x_4	x_4	0
x5	0	0	0	0	0	x_5	0
x6	0	0	0	0	x_6	0	x_6
x7	0	0	0	x_7	0	0	x_7