ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Нижняя и верхняя интегральные суммы

Пусть на отрезке $[a;b]$ задана непрерывная функция $f(x)$. Обозначим через m и M её наименьшее и наибольшее значения на этом отрезке.

Разобьём отрезок $[a;b]$ на n частей точками деления

$$a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b,$$

причём $x_0 < x_1 < x_2 < \ \ldots \ < x_n$.

Положим $x_1 - x_0 = \Delta x_1$, $x_2 - x_1 = \Delta x_2, \ldots,$ $x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$.

Обозначим наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$:

на отрезке $[x_0; x_1]$ через M_1 и m_1;

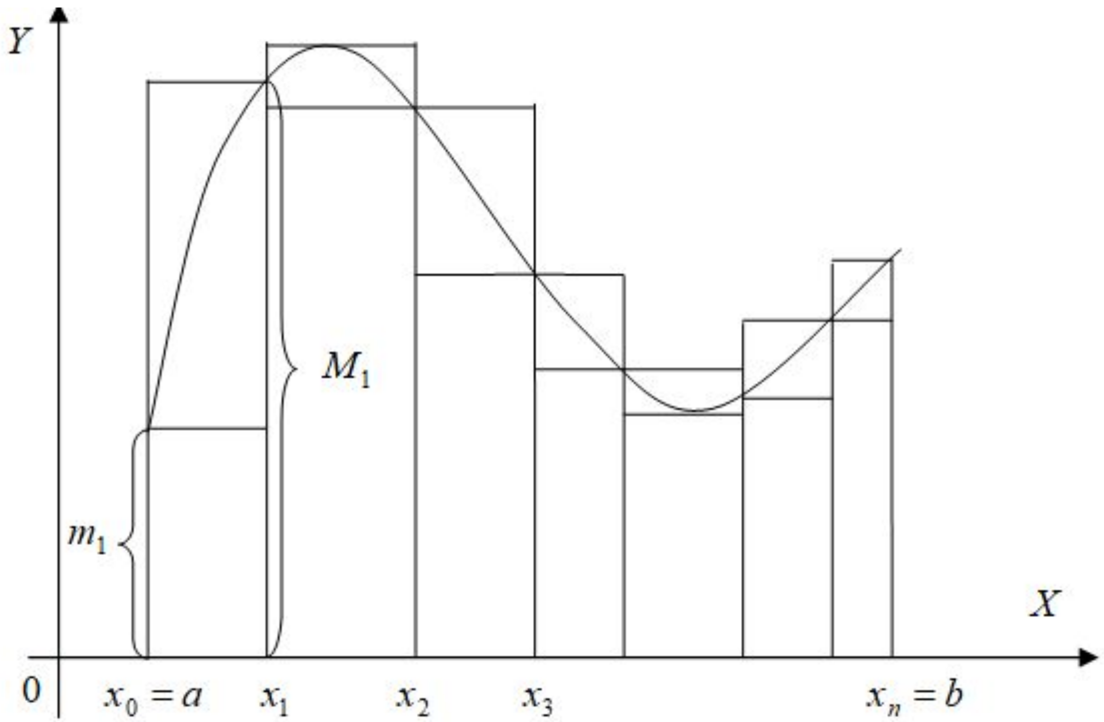
на отрезке $[x_1; x_2]$ через M_2 и m_2;

на отрезке $[x_2; x_3]$ через M_3 и m_3;

……………………………………………

на отрезке $[x_{n-1}; x_n]$ через M_n и m_n.

Нижняя и верхняя интегральные суммы



Составим суммы:

$$\underline{s_n} = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \dots m_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i \ , \qquad (1)$$

$$\overline{S_n} = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \dots M_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i \ . \qquad (2)$$

Нижняя и верхняя интегральные суммы

Сумма $\underline{s_n}$ называется нижней интегральной суммой, а сумма $\overline{S_n}$ называется верхней интегральной суммой.

Если $f(x) \geq 0$, то нижняя интегральная сумма численно равняется площади «вписанной ступенчатой фигуры», а верхняя интегральная сумма численно равняется площади «описанной ступенчатой фигуры».

Свойства верхних и нижних интегральных сумм.

1. Так как $m_i \leq M_i$, где $i = 1, 2, \ldots, n$, то $\underline{s_n} \leq \overline{S_n}$ (на основании формул (1) и (2)).

2. Так как $m_1 \geq m$, $m_2 \geq m$, $\ldots$, $m_n \geq m$, где m – наименьшее значение $f(x)$ на $[a;b]$, то

$$\underline{s_n} = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \ldots m_n \Delta x_n \geq m \Delta x_1 + m \Delta x_2 + \ldots \quad + m \Delta x_n =$$
$$= m(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots \Delta x_n) = m(b-a).$$

Таким образом, $\underline{s_n} \geq m(b-a)$.

3. $\overline{S_n} \leq M(b-a)$, где M - наибольшее значение $f(x)$ на $[a;b]$.

Нижняя и верхняя интегральные суммы

Доказательство: Так как $M_1 \le M$, $M_2 \le M$, …, $M_n \le M$, то

$$\overline{S}_n = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \ldots M_n\Delta x_n \le M\Delta x_1 + M\Delta x_2 + \ldots \quad + M\Delta x_n =$$
$$= M\left(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots \Delta x_n\right) = M\left(b-a\right).$$

Таким образом, $\overline{S_n} \le M\left(b-a\right)$.

Из свойств 2 и 3 следует

$$\boxed{m\left(b-a\right) \le \underline{s_n} \le \overline{S_n} \le M\left(b-a\right)}.$$

Определение определённого интеграла

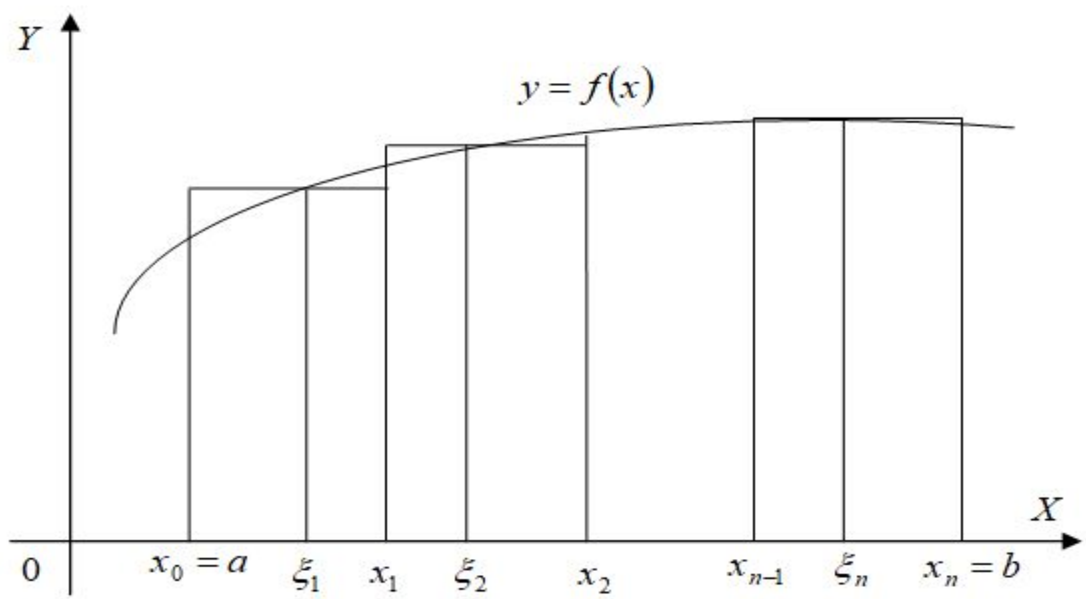
На каждом из отрезков $[x_0;x_1]$, $[x_1;x_2]$, …, $[x_{n-1};x_n]$ возьмём по точке, которые обозначим ξ_1, ξ_2, …, ξ_n, где $x_0 < \xi_1 < x_1$, $x_1 < \xi_2 < x_2$, …, $x_{n-1} < \xi_n < x_n$.

В каждой из этих точек вычислим значения функции $f(\xi_1)$, $f(\xi_2)$, …, $f(\xi_n)$.

Составим сумму:

$$s_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 \quad \ldots \quad f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (1)$$

Эта сумма называется *интегральной суммой* для функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.



Определение определённого интеграла

Так как при произвольном ξ_i, принадлежащем отрезку $[x_{i-1};x_i]$, будет $m_i \le f(\xi_i) \le M_i$ и все $\Delta x_i > 0$, то $m_i\,\Delta x_i \le f(\xi_i)\Delta x_i \le M_i\,\Delta x_i$. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\,\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i\,\Delta x_i\,,$$

т.е.

$$\underline{s_n} \le s_n \le \overline{S_n}\,. \qquad (2)$$

Сумма s_n зависит от выбора точек ξ_i внутри отрезков $[x_{i-1};x_i]$, а также от способа разбиения отрезка $[a;b]$ на отрезки $[x_{i-1};x_i]$.

Определение определённого интеграла

Обозначим через $\max \Delta x_i$ наибольшую из длин отрезков $[x_0; x_1]$. Если $n \to \infty$, то $\max \Delta x_i \to 0$.

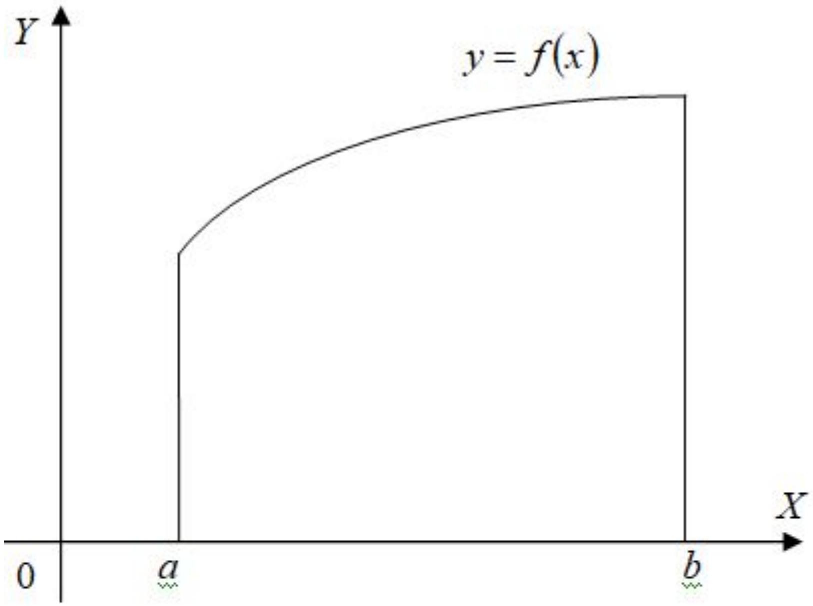
Если при любых разбиениях отрезка $[a;b]$, таких, что $\max \Delta x_i \to 0$ и при любом выборе точек ξ_i сумма $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ стремится к одному и тому же пределу J, то говорят, что функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, функцию $f(x)$ называют *подынтегральной функцией*, а предел J называют *определённым интегралом* от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$. Его обозначают $\int_a^b f(x)\,dx$ и пишут:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i .$$

Число a называется *нижним пределом интегрирования*, а число b – *верхним пределом интегрирования*. Отрезок $[a;b]$ называется *отрезком интегрирования*, переменная x – *переменной интегрирования*.

Замечание. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она интегрируема на этом отрезке. Среди разрывных функций есть как интегрируемые, так и неинтегрируемые.

Геометрический смысл определённого интеграла



Если $f(x) > 0$, то интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox:

$$\boxed{S = \int_a^b f(x)\,dx}.$$

Замечания. 1) Определённый интеграл зависит только от вида функции $f(x)$ и пределов интегрирования, но не зависит от переменной интегрирования, которую можно обозначить любой буквой:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \ldots = \int_a^b f(z)\,dz .$$

2) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

3) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

Основные свойства определённого интеграла

1. Постоянный множитель можно выносить за знак определённого интеграла, т.е., если $C = const$, то

$$\int_a^b C \cdot f(x)\,dx = C\int_a^b f(x)\,dx.$$

2. Определённый интеграл от алгебраической суммы нескольких функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых.

Так, в случае двух слагаемых

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx.$$

3. Если на отрезке $[a;b]$, где $a < b$, функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условию $f(x) \le \varphi(x)$, то

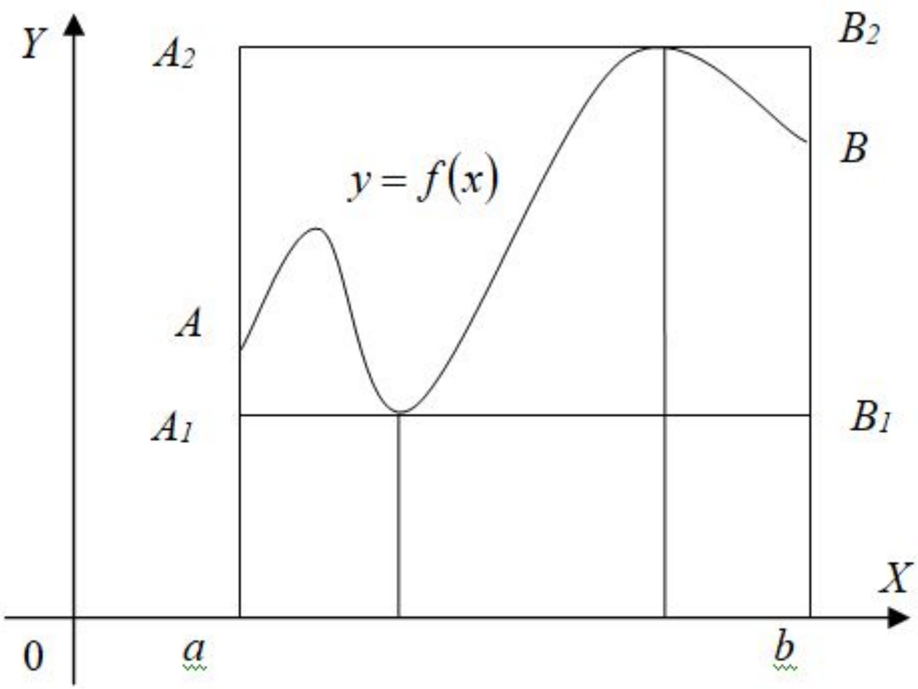
$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Основные свойства определённого интеграла

4. Если m и M – наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и $a \le b$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Если $f(x) \ge 0$, то это свойство иллюстрируется геометрически следующим образом:



Основные свойства определённого интеграла

Площадь криволинейной трапеции $aABb$ содержится между площадями прямоугольников aA_1B_1b и aA_2B_2b.

5. *Теорема о среднем.* Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то на этом отрезке найдётся такая точка ξ, что справедливо следующее равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi).$$

6. Для любых трёх чисел a, b и c справедливо равенство

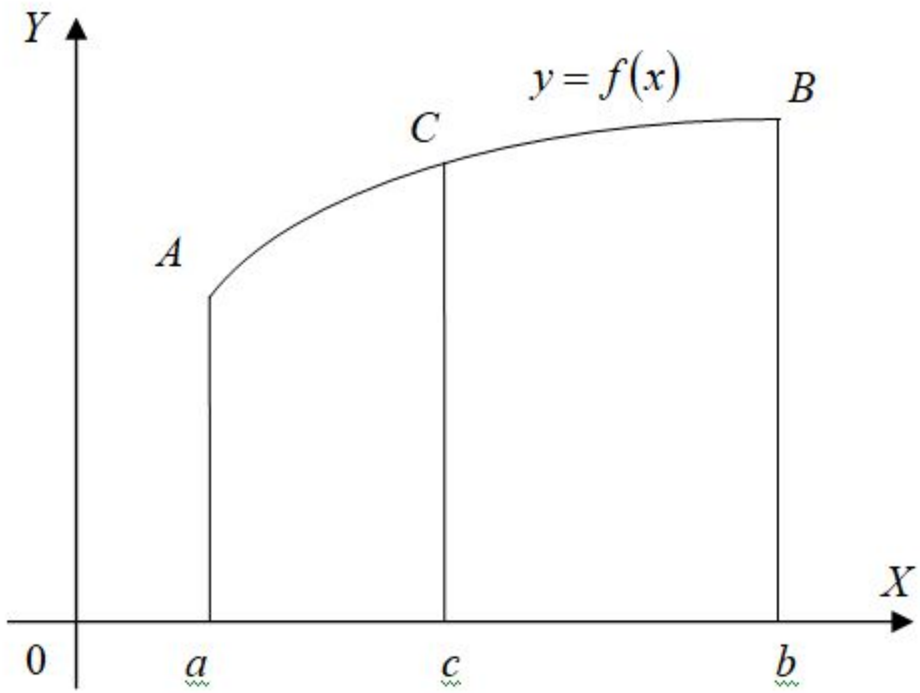
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

если только все эти три интеграла существуют.

Основные свойства определённого интеграла

Геометрическая иллюстрация.

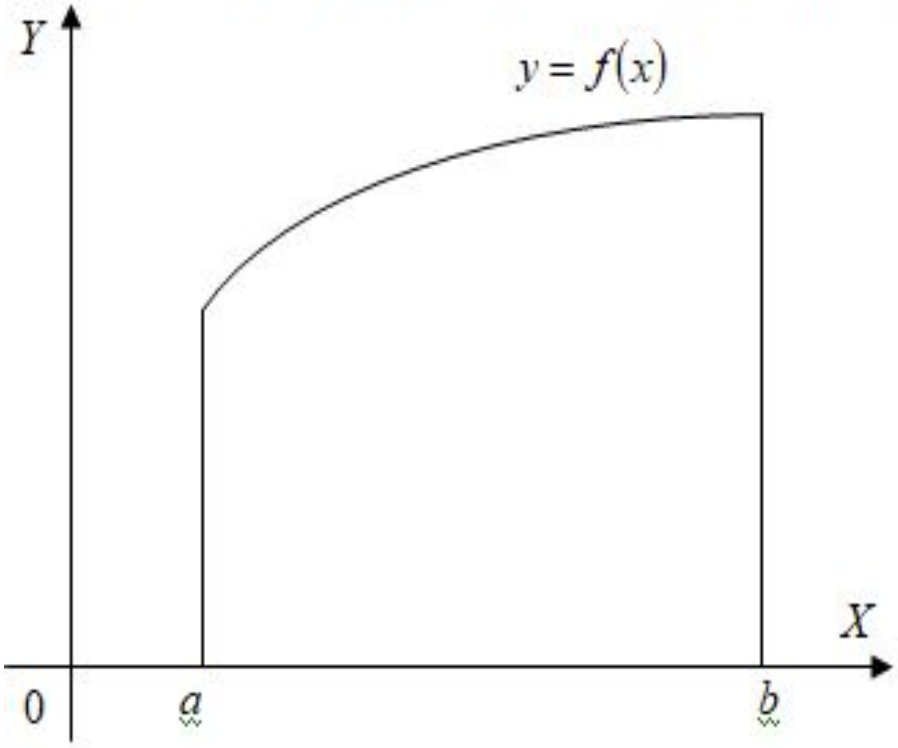
Если $f(x) > 0$ и $a < c < b$, то площадь трапеции $aABb$ равна сумме площадей трапеций $aACc$ и $cCBb$.



ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Вычисление площадей плоских фигур

1. Площадь фигуры, заданной в декартовой системе координат.

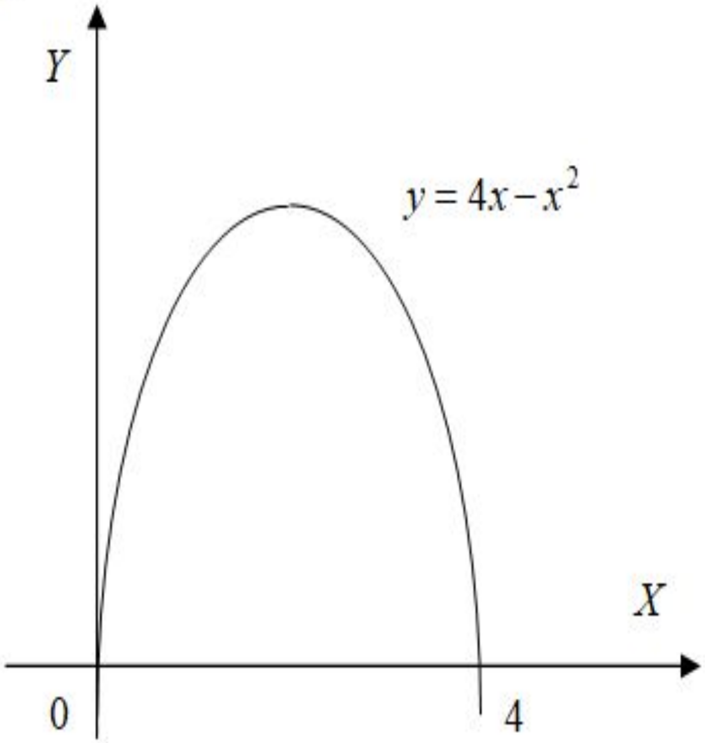


Площадь криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой $y = f(x)\,(f(x) \geq 0)$, двумя прямыми $x=a$, $x=b$ и отрезком $[a;b]$ оси OX вычисляется по формуле:

$$\boxed{S = \int_a^b f(x)\,dx}.$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Пример: Найдите площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 4x - x^2$ и осью OX.

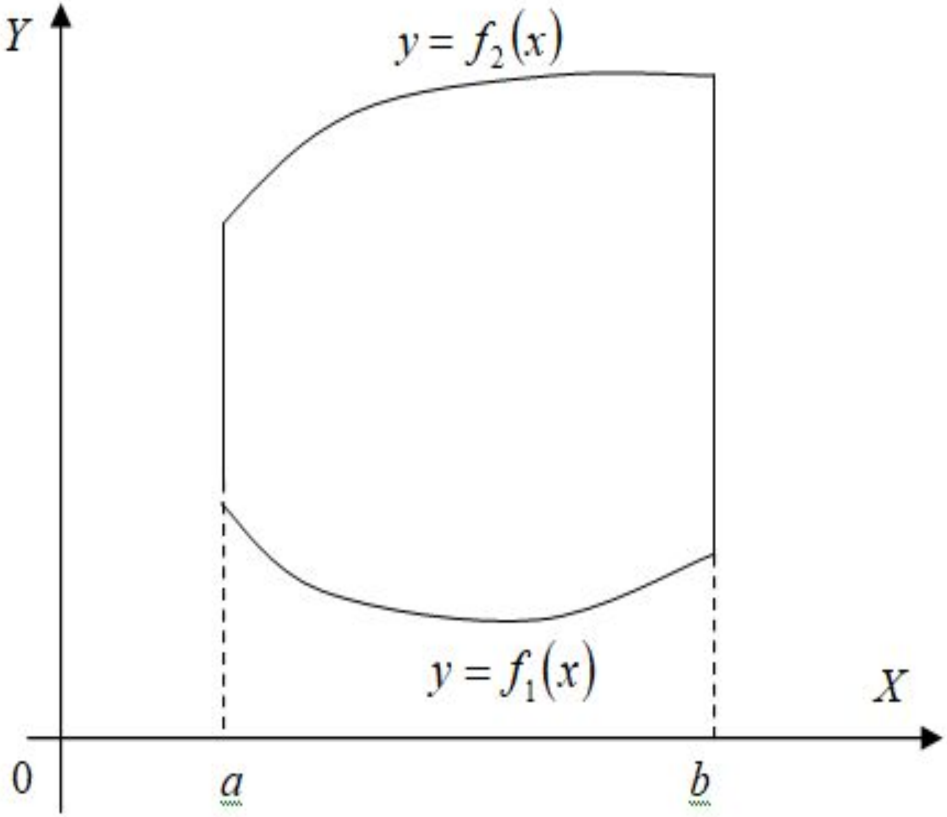


Решение. Находим точки пересечения параболы с осью OX: $4x - x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = 4$. Тогда искомая площадь равна:

$$S = \int_0^4 \left(4x - x^2\right)dx = \left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^4 = .$$

$$= 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА



Площадь фигуры, ограниченной двумя кривыми $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, $(f_2(x)\geq f_1(x))$ и двумя прямыми $x=a$, $x=b$, находится по формуле:

$$\boxed{S=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))\,dx}.$$

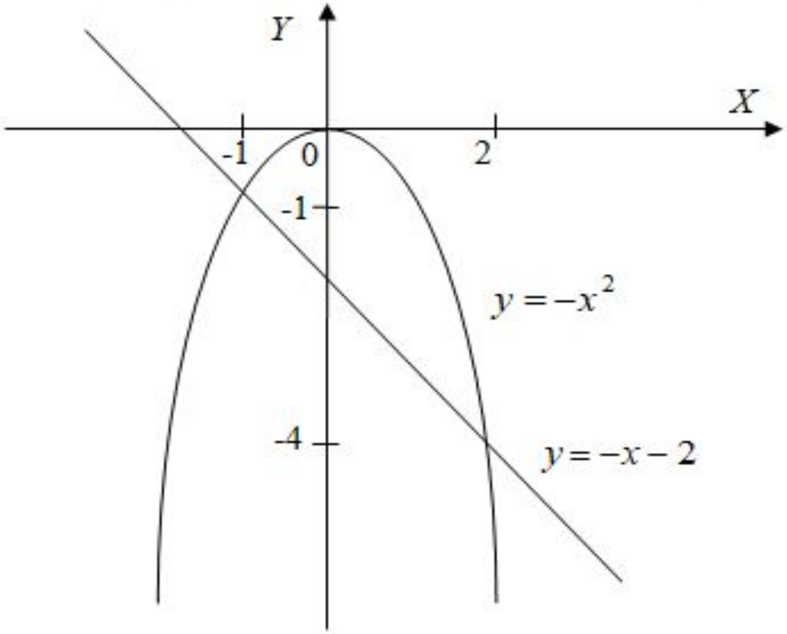
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Пример: Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=-x^2$ $x+y+2=0$.

Решение. Находим точки пересечения линий: $-x^2=-2-x \Rightarrow x^2-x-2=0$ Получаем $x_1=-1, y_1=-1, \quad x_2=2, y_2=-4$.

Вычисляем площадь:

$$S=\int_{-1}^{2}\left(-x^2+x+2\right)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_{-1}^{2}=\left(-\frac{8}{3}+2+4\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)=4{,}5.$$

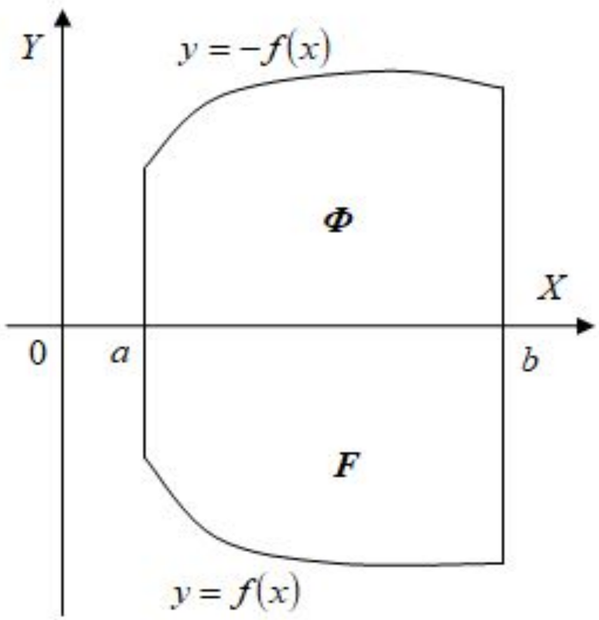


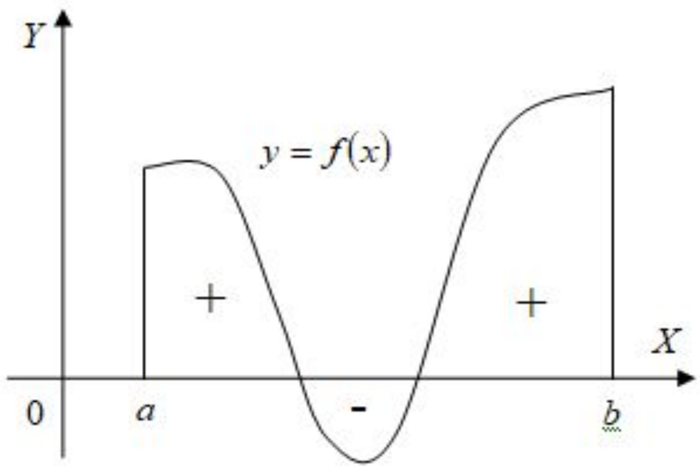
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Пусть функция $y = f(x)$ - непрерывна на $[a;b]$ и $f(x) \le 0$ для всех $x \in [a;b]$. Рассмотрим фигуру Φ, симметричную фигуре F относительно оси OX.

$$S(\Phi) = \int_a^b (-f(x))\,dx, \qquad S(F) = S(\Phi) = \int_a^b (-f(x))\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Таким образом, $\boxed{S(F) = -\int_a^b f(x)\,dx}$.





ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Если $y = f(x)$ конечное число раз меняет знак на отрезке $[a;b]$, то интеграл по отрезку $[a;b]$ разбиваем на сумму интегралов по частичным отрезкам. Интеграл будет положителен на тех отрезках, где $f(x) \geq 0$, и отрицателен там, где $f(x) \leq 0$. Тогда сумма площадей вычисляется по формуле:

$$\boxed{S = \int_a^b |f(x)|\,dx}.$$