Презентация по Математическому Анализу

Лекция 17

Обыкновенные дифференциальные уравнения. Основные понятия. Уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения. Линейные уравнения первого порядка.

1. *Определение обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) и его решения.*

Обыкновенным дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее между собой значения независимой переменной ***x***, неизвестной функции $y = f(x)$ и её производных (или дифференциалов):

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

(все три переменные ***x***, ***y***, ***F*** - действительны).

Определение. Порядком уравнения называется максимальный порядок n входящей в него производной (или дифференциала).

Пример: $y^{(4)} - y + x = 0$ - уравнение четвёртого порядка.

Определение. Частным решением уравнения **(1)** на интервале ***(a, b)*** (конечном или бесконечном) называется любая ***n*** раз дифференцируемая ф $y = \varphi(x)$ удовлетворяющая этому уравнению, т.е. обращающая уравнение на этом интервале в тождество.

Так, функция ***y(x) =*** e^x ***+ x*** обращает уравнение $y^{(4)}$ ***– y + x = 0*** в тождество на всей числовой оси ***(*** $y^{(4)}(x) = e^x$; e^x ***–(*** e^x ***+x) + x = 0),*** т.е. является частным решением этого уравнения.

Любое уравнение порядка $n \geq 1$ имеет множество частных решений (частным решением приведённого уравнения является и функция ***y(x) = sin (x) + x).***

Процедуру решения дифференциального уравнения часто называют интегрированием уравнения, при этом интегрировать приходится в общем случае ровно ***n*** раз, и при каждом интегрировании в решение входит очередная произвольная постоянная.

<u>Определение</u>. Общим решением (общим интегралом) уравнения **(1)** называется такое соотношение

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

1. Любое решение ***(2)*** $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ относительно ***y*** (для набора постоянных ***C1, C2, …, Cn*** из некоторой области n-мерного пространства) - частное решение уравнения ***(1);***
2. Любое частное решение уравнения ***(1)*** может быть получено из ***(2)*** при некотором наборе постоянных ***C1, C2, …, Cn.***

Мы будем в основном рассматривать дифференциальные уравнения в форме, разрешённой относительно старшей производной:

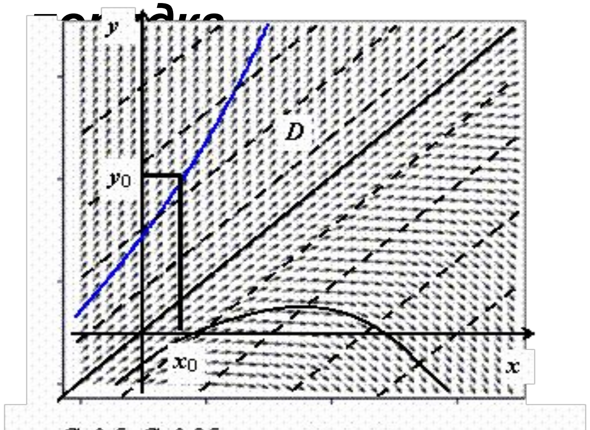
$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) \qquad (3)$$

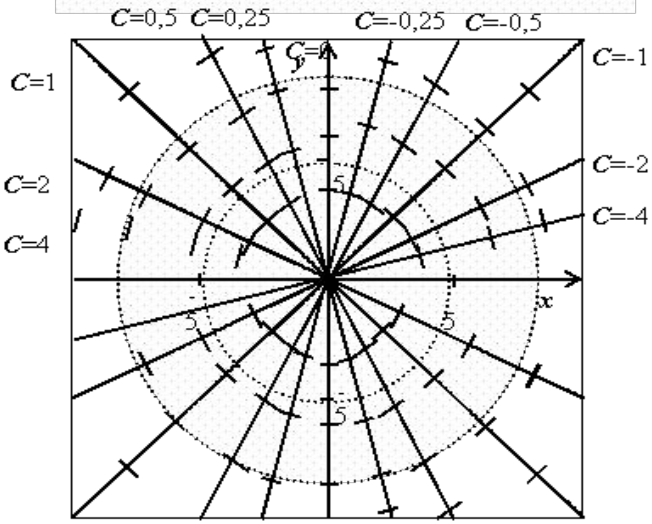
и получать общее решение в форме

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \qquad (4)$$

решённой относительно неизвестной функции.

2. ОДУ первого порядка





Как следует из определения, обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (5)$$

где **x** - независимая переменная, **y(x)** - неизвестная функция. В форме, разрешённой относительно производной, уравнение первого порядка записывается так:

$$y' = f(x, y) \qquad (6)$$

Если пользоваться другим обозначением производной, то можно записать (6) как

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (7)$$

Общее решение (общий интеграл) уравнения при n = 1 имеет в $\Phi(x, y, C) = 0$
или $y = \varphi(x, C)$.

3. Геометрический смысл уравнения первого порядка.

Уравнение ***(6)*** в каждой точке ***(x, y)*** области ***D***, в которой задана функция ***f(x, y),*** определяет - $y'(x)$ угловой коэффициент касательной к решению, проходящему через точку ***(x, y),*** т.е. направление, в котором проходит решение через эту точку.

Говорят, что уравнение (6) задаёт в **D** поле направлений.

График любого решения дифференциального уравнения (называемый также ***интегральной кривой***) в любой своей точке касается этого поля, т.е. проходит в направлении, определяемом полем.

Интегрирование дифференциального уравнения геометрически означает нахождение кривых, у которых направление касательной в каждой точке совпадает с направлением поля.

На рисунке изображено поле направлений, определяемое уравнен $y' = y - x + 1$ и три интегральные кривые (три частных решения) этого уравнения.

Решение можно провести через любую точку области ***D***; единственное решение можно выделить, если задать точку, через которую проходит интегральная кривая

$$y\big|_{x = x_0} = y_0$$

Для изображения поля направлений, задаваемого дифференциальным уравнением, рассматривают линии уровня функции **f(x, y),** т.е. геометрические места точек, в которых касательные к интегральным кривым сохраняют постоянное направление. Такие линии называются изоклинами. С помощью изоклин можно приближённо изобразить интегральные кривые

Для примера построим изоклины уравнени: $y' = -\frac{x}{y}$

Перебираем различные значения постоянной ***C***, строим линии уровня ф $f(x,y) = -\frac{x}{y}$, соответствующие этим значения $-\frac{x}{y} = C$. прямые), и на этих линиях ставим чёрточки в направлении, определяемым $\operatorname{tg}\alpha = C$ ием ***C*** α , где - угол между чёрточкой и положительным направлением $C = 0 \Rightarrow x = 0$ - ось ***Oy***;

$$C = 1 \Rightarrow -\frac{x}{y} = 1 \Rightarrow y = -x \longrightarrow C = -1 \Rightarrow -\frac{x}{y} = -1 \Rightarrow y = x \longrightarrow C = \pm 2 \Rightarrow -\frac{x}{y} = \pm 2 \Rightarrow y = \mp \frac{x}{2}$$

и т.д.

Информация о направлении интегральных кривых, полученная из рисунка (выше справа), достаточна, чтобы сделать качественный вывод об их поведении: кривые должны огибать начало координат. Это могут быть окружности или спирали (когда мы научимся решать дифференциальные уравнения, мы легко установим, что это окружности; две такие окружности изображены пунктиром).

4. Задача Коши (задача с начальным условием).

Пусть функция ***f(x, y)*** определена в области ***D***, точ $(x_0, y_0) \in D$. Требуется найти решение уравнения

$$y' = f(x, y) \qquad \textbf{(8)}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{y}_0 \qquad \textbf{(9)}$$

начальное условие **(9)** часто записывают в форме

$$y\big|_{x=x_0} = y_0$$

Теорема Коши (существования и решения задачи Коши).

Если в области ***D*** функция ***f(x, y)*** непрерывна и имеет непрерывную частную производную $f'_y(x, y)$, то для любой точки $(x_0, y_0) \in D$ в окрестности точки x_0 существует единственное решение задачи ((8),(9)).

Мы примем эту теорему без доказательства. На самом деле для существования решения в окрестности точки x_0 достаточно только непрерывности функции ***f(x, y);*** условие непрерывности $f'_y(x, y)$ обеспечивает единственность этого решения.

5. Уравнения с разделяющимися переменными.

Уравнения с разделёнными переменными.

Так называются уравнения вида (10), удовлетворяющее начальному условию

$$f(x)\,dx + g(y)\,dy = 0. \qquad \textbf{(10)}$$

Пусть **y(x)** - решение этого уравнения, т.е. $f(x)dx + g(y(x))dy(x) = 0$

Интегрируя это тождество, получим

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = 0$$

- общий интеграл (общее решение) этого уравнения.

<u>**Пример**</u>:

Решить задачу Коши

$$\begin{cases} 2(x-1)dx + 3y^2 dy = 0; \\ y(2) = 1. \end{cases}$$

Исходное уравнение - с разделёнными переменными, интегрируя его, получим

$$\int 2(x-1)dx + \int 3y^2 dy = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + y^3 = C$$

Соотношение $(\boldsymbol{x}-1)^2 + \boldsymbol{y}^3 = \boldsymbol{C}$ - общее решение (общий интеграл) уравнения; для того, чтобы найти частное решение, удовлетворяющее начальному условию, надо подставить в общее решения данные значения $\boldsymbol{x}_0$ и $\boldsymbol{y}_0$, и найти значение постоянной С на этом решении:

$$(2-1)^2 + 1^3 = 2 \Rightarrow \boldsymbol{C} = 2$$

Таким образом, решение поставленной задачи

$$(\boldsymbol{x}-1)^2 + \boldsymbol{y}^3 = 2.$$

Уравнения с разделяющимися переменными.

Так называются уравнения вида

$$y' = f(x)\cdot g(y) \qquad \textbf{(11)}$$

или

$$f_1(x)\,g_1(y)\,dx + f_2(x)\,g_2(y)\,dy = 0 \qquad \textbf{(12)}$$

Эти уравнения легко сводятся к уравнению с разделёнными переменными:

Записываем уравнение (11) в форме $\frac{dy}{dx} = f(x)\cdot g(y)$ затем делим на g(y) и умножаем на dx $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$	Уравнение (12) делим на $f_2(x)g_1(y)$ $g_1(y)$: $\frac{f_1(x)dx}{f_2(x)} + \frac{g_2(y)dy}{g_1(y)} = 0$

Эти уравнения - с разделёнными переменными. Интегрируя, получим общие интегралы:

$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$	$\int \frac{f_1(x)dx}{f_2(x)} + \int \frac{g_2(y)dy}{g_1(y)} = C$

В обоих случаях возможна потеря решений: деление на функцию может привести к уравнению, которое неэквивалентно данному.

Если функция ***g(y)*** имеет действительные корни $y_1, y_2, y_3, \ldots,$ то $y = y_1, y = y_2, y = y_3, \ldots,$ функции очевидно, являются решениями исходного уравнения.	Если функция $f_2(x)$ имеет действительные корни $x_1, x_2, x_3, \ldots,$ функция $g_1(y)$ имеет действительные корни $y_1, y_2, y_3, \ldots,$ то функции $x = x_1, x = x_2, x = x_3, \ldots, y = y_1,$ $y = y_2, y = y_3, \ldots$ являются решениями исходного уравнения.

В обоих случаях эти решения могут содержаться в общем решении, но могут и не содержаться в нём; последнее может случиться, если на этих решениях нарушаются условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши.

Примеры
:

1. $y' = x\cdot(y-1);\ \frac{dy}{dx} = x\cdot(y-1);\ \frac{dy}{(y-1)} = x\cdot dx;\ \int\frac{dy}{(y-1)} = \int x\cdot dx;\ \ln|y-1| = \frac{x^2}{2} + C$

При такой форме записи общего интеграла решение ***y = 1*** потеряно. Можно преобразовать общее решение к виду, который содержит это решение. Переобозначим постоянную ***C*** как $\ln|C_1|$:

$$\ln|y-1| = \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow \ln|y-1| = \frac{x^2}{2} + \ln|C_1| \Rightarrow |y-1| = e^{\ln|C_1| + \frac{x^2}{2}} \Rightarrow |y-1| = |C_1|\,e^{\frac{x^2}{2}} \Rightarrow y-1 = C_1 e^{\frac{x^2}{2}}$$

Вернёмся к обозначению постоянной интегрирования ***C***; общее реше $y = Ce^{\frac{x^2}{2}} + 1$ содержит частное решение ***y = 1*** при ***C = 0***.

2. Найти решение задачи Коши $(xy^2 - x)dx = (x^2y - y)dy;$ $y|_{x=1} = 5.$

Решаем уравнение:

$$x(y^2-1)dx = y(x^2-1)dy \Rightarrow \frac{ydy}{y^2-1} = \frac{xdx}{x^2-1} \Rightarrow \int\frac{ydy}{y^2-1} = \int\frac{xdx}{x^2-1} \Rightarrow \frac{1}{2}\ln|y^2-1| = \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + \frac{1}{2}\ln|C|$$

Здесь могут быть потеряны решени $x = \pm1,\ y = \pm1;$ постоянная интегрирова $\frac{1}{2}\ln|C|$ сана как .

Далее, $\ln|y^2-1| = \ln|C(x^2-1)| \Rightarrow y^2-1 = C(x^2-1)$

Общий интеграл уравнения $y^2 = C(x^2-1)+1$

Частные решения $y = \pm1$ содержатся в общем интеграле при ***C = 0***, реш $x = \pm1$ утеряны (понятно, почему это произошло: если записать урав

в форме, решённой относительно производно $y' = \dfrac{x(y^2-1)}{y(x^2-1)} = f(x,y)$

то, очевидно, на решениях нарушаются условия, налагаемые теоремой Коши на правую часть уравнения).

Всё множество решений: $y^2 = C(x^2 - 1) + 1,\ x = 1,\ x = -1$

Мы должны найти ещё частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 5$

Подстановка значений $x = 1, y = 5$ в общий интеграл даёт *25=1*, т.е. общий интеграл этого частного решения не содержит.

Решение ***x = 1*** удовлетворяет начальному условию, это и есть решение задачи Коши.

К уравнениям с разделяющимися переменными сводятся уравнения вида

$$y' = f(ax + by + c)$$ ($a, b \neq 0, c$ - постоянные).

Если перейти к новой неизвестной функции $z = ax + by + c$, $z' = a + by' \Rightarrow y' = \frac{z' - a}{b}$

и уравнение представляется как $z' = bf(z) + a$.

Это - уравнение с разделяющимися переменными.

Пример: $y' = e^{3x+y-5}$

$$z = 3x + y - 5,\ z' = 3 + y',\ y' = z' - 3,\ z' - 3 = e^{z},\ \frac{dz}{dx} = e^{z} + 3,\ \frac{dz}{e^{z}+3} = dx,\ \int \frac{dz}{e^{z}+3} = \int dx,$$

$$\int \frac{e^{z}\,dz}{e^{z}(e^{z}+3)} = \int dx,\ \int \frac{de^{z}}{e^{z}(e^{z}+3)} = x + C,\ \frac{1}{3}\int \frac{\left[(e^{z}+3) - e^{z}\right]de^{z}}{e^{z}(e^{z}+3)} = x + C,\ \frac{1}{3}\int \frac{de^{z}}{e^{z}} - \frac{1}{3}\int \frac{de^{z}}{e^{z}+3} = x + C,$$

$$\frac{1}{3}\left[\ln|e^{z}| - \ln|e^{z}+3|\right] = x + \frac{1}{3}\ln C,\ \ln\frac{e^{z}}{e^{z}+3} = 3x + \ln C,\ \frac{e^{z}}{e^{z}+3} = Ce^{3x},\ e^{3x+y-5} = Ce^{3x}(e^{3x+y-5}+3).$$

6. Уравнения с однородной правой частью.

Так называются уравнения со специальным видом зависимости функции $f(x, y)$ от своих аргументов:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \textbf{(13)}$$

Это уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными относительно новой неизвестной функк $\frac{y(x)}{x} = u(x)$ еной $y(x) = x \cdot u(x)$ ии .

Подставляя в **(13)** $y = x \cdot u$, $y' = u + x \cdot u$ получим $u + xu' = f(u), x\frac{du}{dx} = f(u) - u,$ (это - уравнение с разделяющимися переменными),

$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}, \int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x}$ - это общий интеграл уравнения относительно переменных ***x, u***.

Пример
:

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y},\ u = \frac{y}{x},\ y = ux,\ y' = u + u'x,\ u + u'x = u + \frac{1}{u},\ x\frac{du}{dx} = \frac{1}{u},\ udu = \frac{dx}{x},$$

$$\int udu = \int\frac{dx}{x},\ \frac{u^2}{2} = \ln|x| + \frac{C}{2},\ u^2 = 2\ln|x| + C,\ \frac{y^2}{x^2} = \ln x^2 + C,\ y^2 = x^2\left(C + \ln x^2\right)$$

- общее решение уравнения.

Как "узнать в лицо" уравнение с однородной правой частью? Введём определение.

Функция ***f(x, y)*** называется однородной функцией своих аргументов степени ***m***, если для любого ***t*** выполняется тождество $f(tx, ty) = t^m f(x, y)$

Так, $x^3 - 3xy^2 + 4y^3$ - однородная функция степени 3, $\ln x - \ln y$ - однородная функция нулевой степени. Если ***M(x, y), N(x, y)*** - однородные функции одной степени, то уравнение $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ может быть приведено к виду $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Примеры:

1. $(y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0$

Здесь коэффициенты при дифференциалах - однородные функции второй степени, т.е. уравнение должно приводиться к виду **(13).**

Решаем уравнение относительно производной:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy - y^2}{x^2},$$

делим числитель и знаменатель правой части на x^2:

$$\frac{dy}{dx} = 2\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

- это уравнении с однородной правой частью.

$$u = \frac{y}{x},\ y = ux,\ y' = u + u'x,\ u + u'x = 2u - u^2,\ x\frac{du}{dx} = u - u^2,\ \frac{du}{u - u^2} = \frac{dx}{x},$$

$$\int\frac{du}{u(1-u)} = \int\frac{dx}{x},\ \int\frac{(1-u)+u}{u(1-u)}du = \int\frac{dx}{x},\ \ln|u| - \ln|1-u| = \ln|x| + \ln|C|,\ \frac{u}{u-1} = Cx,\ \frac{y/x}{y/x-1} = Cx,\ \frac{y}{y-x} = Cx.$$

Это общий интеграл уравнения. Утерянные решения: ***x = 0, y = x (u = 1);*** решение ***y = 0*** (получаемое из ***u = 0***) содержится в общем решении при ***C = 0***.

2. $xy' = y\cos(\ln y - \ln x)$

Преобразуем уравнение: $y' = \frac{y}{x}\cos\ln\frac{y}{x}$

Решение. $u = \frac{y}{x},\ y = ux,$

$$y' = u + u'x,\ u + u'x = u\cos\ln u,\ x\frac{du}{dx} = u\cos\ln u - u,\ \frac{du}{u(\cos\ln u - 1)} = \frac{dx}{x},\ \int\frac{du}{u(\cos\ln u - 1)} = \int\frac{dx}{x},$$

$$\int\frac{du}{u(\cos\ln u - 1)} = |s = \ln u| = \int\frac{ds}{\cos s - 1} = \left|p = \operatorname{tg}\frac{s}{2}\right| = \int\frac{2dp/(1+p^2)}{\frac{1-p^2}{1+p^2}-1} = \int\frac{2dp}{-2p^2} = \frac{1}{p} = \operatorname{ctg}\frac{s}{2} + C = \operatorname{ctg}\frac{\ln u}{2} + C,$$

общий интеграл уравнения в переменных ***x, u***: $\operatorname{ctg}\frac{\ln u}{2} = \ln|x| + \ln|C|$

Преобразуем это выражение: $Cx = e^{\operatorname{ctg}\frac{\ln u}{2}}$, или $Cx = e^{\operatorname{ctg}\frac{\ln(y/x)}{2}}$ $C \neq 0$).

Утерянные решения: $\cos\ln u = 1;\ \ln u = 2k\pi,\ u = e^{2k\pi};$ $y = xe^{2k\pi},\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Ответ: $Cx = e^{\operatorname{ctg}\frac{\ln(y/x)}{2}}$ ($C \neq 0$); $y = xe^{2k\pi},\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

7. Линейные уравнения.

ДУ первого порядка называется линейным, если неизвестная функция ***y(x)*** и её производная $y'(x)$ входят в уравнение в первой степени:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \qquad \textbf{(14)}$$

Здесь ***p(x), q(x)*** - непрерывные функции

Для решения уравнения **(14)** представим ***y(x)*** в виде произведения двух новых неизвестных функций $u(x)$ и $v(x)$: $y(x) = u(x)\,v(x)$.

Тогда $y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$, и уравнение приводится к виду $u'v + uv' + p(x)uv = q(x)$

или $u'v + u(v' + p(x)v) = q(x)$

Это уравнение решаем в два этапа:

1. сначала находим функцию ***v(x)*** как частное решение уравнения с разделяющимися переменными $v' + p(x)v = 0$;

2. затем находим ***u(x)*** из уравнения $u'v = q(x)$;

Итак, $\frac{dv}{dx} + p(x)v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -p(x)dx \Rightarrow \int\frac{dv}{v} = -\int p(x)dx \Rightarrow \ln|v| = -\int p(x)dx \Rightarrow v = e^{-\int p(x)dx}$

(мы не вводим в это решение произвольную постоянную ***C***, нам достаточно найти одну функцию ***v(x),*** обнуляющую слагаемое со скобками в ур $u'v + u(v' + p(x)v) = q(x)$).

Теперь уравнение для ***u(x)*** запишется как

$$e^{-\int p(x)dx} \cdot u'(x) = q(x) \Rightarrow u'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx} \Rightarrow \Rightarrow u(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C$$

Общее решение уравнения **(14):**

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right)$$

Пример $y' - tgx \cdot y = \dfrac{1}{\cos x}, y(0) = 1$

.

Решение

$$y = uv, y' = u'v + uv', u'v + uv' - \operatorname{tg} x \cdot uv = \frac{1}{\cos x}, u'v + u\left(v' - v \operatorname{tg} x\right) = \frac{1}{\cos x}, v' - v \operatorname{tg} x = 0, \frac{dv}{dx} = \operatorname{tg} x \cdot v,$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{\sin x dx}{\cos x}, \ln|v| = -\ln|\cos x|, v = \frac{1}{\cos x}$$

Теперь для ***u(x)*** получим: $\dfrac{u'}{\cos x} = \dfrac{1}{\cos x}, u(x) = x + C$, и общее решение уравнения

$$y(x) = \frac{x + C}{\cos x}$$

Для нахождения частного решения, соответствующего начальным условиям задачи Коши, подставим в общее р $x = 0, y = 1 : 1 = \dfrac{0 + C}{\cos 0} \Rightarrow C = 1$

<u>Решение задачи:</u>

$$y(x) = \frac{x + 1}{\cos x}$$

Этот метод решения линейных уравнений часто реализуется по-другому - в форме вариации произвольной постоянной.

Уравнение **(14)** называется однородным, если ***q(x) = 0***.

Пусть дано неоднородное уравнение **(14)** $y' + p(x)y = q(x)$

Оно, как и в предыдущем случае, решается в два этапа.

Обнулим правую часть, получившееся уравнение будем называть однородным уравнением, соответствующим уравнению **(14):** $y' + p(x)y = 0$

Решаем это уравнение:

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0\Rightarrow\frac{dy}{y}=-p(x)dx\Rightarrow\int\frac{dy}{y}=-\int p(x)dx\Rightarrow\ln|y|=-\int p(x)dx+\ln|C|\Rightarrow y=Ce^{-\int p(x)dx}$$

(при делении на ***y*** теряется решение ***y (x) = 0***, но оно входит в общее решение при ***C = 0***).

Теперь ищем общее решение уравнения **(14)** в ви $y(x)=C(x)e^{-\int p(x)dx}$,

где - $C(x)$ - новая неизвестная функция; находим производную

$$y'(x)=C'(x)e^{-\int p(x)dx}-p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx}$$

и подставляем в **(14)** y и y' :

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx}-p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx}+p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx}=q(x)$$

или

$$C'(x)=q(x)e^{\int p(x)dx}\Rightarrow C(x)=\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C_0$$

где $C_0=\text{const}$.

Теперь $y(x)=C(x)e^{-\int p(x)dx}=C_0e^{-\int p(x)dx}+e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$

Понятно, что обе реализации решения имеют один смысл (решение однородного уравнения играет роль функции ***v(x),*** варьируемая постоянная ***C(x)*** - роль функции ***u(x)).***

Отметим ещё одно важное обстоятельство. Переменные x и y равноправны, поэтому надо иметь в виду, что можно искать решение в виде ***x = x(y),*** а не в виде ***y = y(x).***

Пример: $(x + y^2)dy = ydx.$

Если представить его в виде

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x + y^2}{y} = \frac{x}{y} + y$$

то относительно функции ***x = x(y)*** оно линейно.

Решаем его методом вариации произвольной постоянной.

Соответствующее однородное уравнение:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y}$$

Его решение:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln|x| = \ln|y| + \ln|C| \Rightarrow x = Cy$$

Ищем решение данного уравнения в форме ***x = C(y) y***.

Тогда $x' = C'(y)y + C(y) \Rightarrow C'(y)y + C(y) = \frac{C(y)y}{y} + y \Rightarrow C'(y) = 1 \Rightarrow C(y) = y + C_0 \Rightarrow x = y(y + C)$

(постоянная C0 переобозначена как).

Утерянное решение ***- y = 0.***