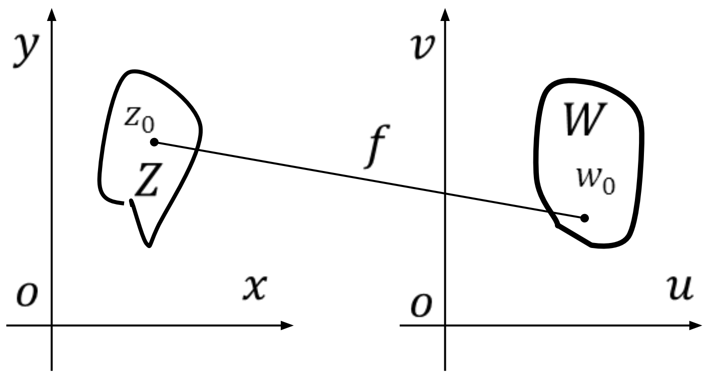
10. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

10. 1 Основные понятия



Если каждому комплексному числу $z = x+y\,j$ из некоторого множества Z комплексной плоскости z поставлено в соответствие определенное комплексное число w = u+v j из множества W комплексной плоскости w, то считается, что задана **однозначная функция комплексного переменного** ***w = f(z)***, отображающая множество Z на множество W.

Комплексную функцию можно записать в виде $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, где

$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ – действительная часть функции $f(z)$,

$v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ – мнимая часть функции $f(z)$.

Задание комплексной функции равносильно заданию двух действительных функций $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ действительных переменных x и y.

Функция $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ называется **непрерывной** в точке z_0, если выполняется равенство $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

10.2. Основные элементарные функции комплексного переменного.

Если аргументом показательной или тригонометрических функций является комплексное число, то определение этих функций, вводимое в элементарной алгебре, теряет смысл.

Функции $e^z, \sin z$, $\cos z, sh\, z, ch\, z$ определяются с помощь суммы следующих рядов, сходящихся во всей плоскости комплексного переменного

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots$$

$$\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

$$sh\, z = \frac{z}{1!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ \ldots \qquad ch\, z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ \ldots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} +$$

Для функций комплексного ьпеременного справедлива *формула Эйлера*

$$e^{zj} = \cos z + j \sin z$$

10.3 Дифференцирование функции комплексного переменного. Условия Коши – Римана.

Производной однозначной функции комплексного переменного $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ в точке z называется предел

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z},$$

если он существует при любом способе стремление Δz к нулю :

1) $\Delta z = \Delta x + i0 = \Delta x;\qquad \Delta x \to 0;$ 2) $\Delta z = 0 + i\Delta y;\qquad \Delta y \to 0;$

Функция f(z), имеющая непрерывную производную в любой точке области D называется **аналитической** функцией на этой области.

Правила дифференцирования функций комплексного аргумента не отличаются от правил дифференцирования функций действительной переменной.

Если функция $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ имеет производную в точке $z = x + i\,y$, то её действительные компоненты u и v имеют в точке (x, y) частные производные первого порядка, удовлетворяющие условию Коши – Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Пример. Функцию $w = f(z) = z^2 - z + i$ представить в виде $w = u(x,y) + iv(x,y).$

Если функция аналитическая, то вычислить ее производную в точке $z_0 = i.$

Р е ш е н и е.

1 э т а п. Представим функцию в виде $w = u(x,y) + iv(x,y)$ Подставим в $w = f(z)$ выражение $z = x + iy$

$$w = f(z) = (x+iy)^2 - (x+iy) + i = x^2 + 2xyi + i^2 y^2 - x - iy + i = \left\| i^2 \Rightarrow -1 \right\| =$$

$$= x^2 + 2xyi - y^2 - x - iy + i = (x^2 - x - y^2) + i(2xy - y + 1),$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{w = (x^2 - x - y^2) + i(2xy - y + 1)}$$

2 э т а п Функция $w = u(x,y) + iv(x,y)$ - аналитическаяв области D, если в этой области выполняются условия Коши-Римана: $u'_x = v'_y, \quad u'_y = -v'_x.$

$$w = (x^2 - x - y^2) + i(2xy - y + 1) \quad \Rightarrow \quad u(x,y) = x^2 - x - y^2, \quad v = 2xy - y + 1.$$

Так как $u'_x = 2x - 1, \quad u'_y = -2y, \quad v'_x = 2y, \quad v'_y = 2x - 1,$ то

условия Коши-Римана выполняются при любых значениях x и y

$\Rightarrow$ <u>функция аналитическая во всей комплексной плоскости.</u>

3 этап.

Найдём производную $f'(z) = u'_x + iv'_x$ функции $w = u(x, y) + iv(x, y)$.

Так как $w = (x^2 - x - y^2) + i(2xy - y + 1)$ $=>$ $u(x, y) = x^2 - x - y^2, \quad v = 2xy - y + 1.$

$u'_x = 2x - 1, \quad v'_x = 2y, \qquad =>$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 2x - 1 + i2y =$$

$$= \|z = x + iy\| = (2x + i2y) - 1 = 2(x + iy) - 1 = 2z - 1.$$

$=>$ $\underline{f'(z) = 2z - 1.}$

4 Этап.

Вычислим значение производной в точке $z_0 = i.$

Так как $f'(z) = 2z - 1$, то имеем $f'(z_0) = f'(i) = 2i - 1.$

$=>$ $\underline{f'(z_0) = 2i - 1.}$