Основы функционального анализа

Глава 3. Линейные операторы

2. Линейные ограниченные операторы

Пусть E, F – линейные нормированные пространства, одновременно вещественные или комплексные.

Определение

Линейный оператор $A : E \to F$ называется *ограниченным*, если

$$(\exists C \geq 0)(\forall\, x \in E)[\, \|Ax\|_F \leq C\|x\|_E].$$

Теорема 2.1. *Пусть* E, F *— линейные нормированные пространства и* $A : E \to F$ *— линейный оператор. Тогда следующие свойства оператора* A *равносильны :*

а) A *ограничен;*

б) A *переводит единичный шар в ограниченное множество;*

в) A *переводит любое ограниченное множество в ограниченное множество;*

г) A *непрерывен на* E*;*

д) A *непрерывен в нуле.*

3. Норма линейного ограниченного оператора

Пусть E и F – ЛНП-ва над полем P ($P=\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$);

$A: E \to F$ – ЛОО, т.е. $(\exists C \geq 0)(\forall x \in E)\,[\,\|Ax\|_F \leq C \cdot \|x\|_E\,]$.

Опр. Нормой ЛОО-ра A называется число $\|A\| = \min\{C\}$, где $\{C\}$ – множество всех таких констант C, при которых $\|Ax\| \leq C \cdot \|x\|$ $\forall x \in E$.

Др. словами, $\|A\|$ – наименьшая из всех констант C, таких, что $\|Ax\| \leq C \cdot \|x\|$ $\forall x \in E$.

Замечание. Строго говоря, $\|A\| = \inf\{C\}$. То, что $\|A\| \in \{C\}$, требует доказательства.

Теорема (о вычислении нормы). $\|A\| \overset{(1)}{=} \sup\limits_{\substack{x\neq\theta \\ x\in E}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \overset{(2)}{=} \sup\limits_{\substack{\|x\|=1 \\ x\in E}} \|Ax\|.$

Док-во. 1) Док-м, что $\|A\| = \sup\limits_{\substack{x\neq\theta \\ x\in E}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ (1).

Пусть $\alpha = \sup\limits_{\substack{x\neq\theta \\ x\in E}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$. Тогда $\alpha \geq \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ $\forall x\neq\theta \Rightarrow$

$\Rightarrow \|Ax\| \leq \alpha\cdot\|x\|$ $\forall x\in E$ (для $x=\theta$ тоже выполняется) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \|A\| \leq \alpha$ (3).

Покажем, что $\|A\| = \alpha$. П: $\|A\| < \alpha$. По определению supremum'a, $\exists$ послед-ть $\{x_n\}\subset E$: $\frac{\|Ax_n\|}{\|x_n\|} \to \alpha$ при $n\to\infty$.

Т.к., по предположению, $\|A\| < \alpha$, то $(\exists N)\left[\|A\| < \frac{\|Ax_N\|}{\|x_N\|} \leq \alpha\right]$, то есть $\|Ax_N\| > \|A\|\cdot\|x_N\|$, что противоречит определению $\|A\|$.

След-но, предположение неверно $\Rightarrow$ $\|A\| = \alpha$. Равенство (1) доказано.

2) Равенство (2) вытекает из (1):

$$\sup_{\substack{\|y\|=1 \\ y\in E}} \|Ay\| = \sup_{\substack{x\neq\theta \\ x\in E}} \left\|A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| = \sup_{\substack{x\neq\theta \\ x\in E}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|A\|.$$

Теорема доказана.

4. Норма линейного оператора, действующего в конечномерных пространствах

Рассмотрим оператор $A : \mathbb{R}_1^n \to \mathbb{R}_1^m$, заданный матрицей

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

$$Ax = \mathcal{A}x = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{mk}x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = y \quad \forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_1^n.$$

Норма в $\mathbb{R}_1^n$: $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$; норма в $\mathbb{R}_1^m$: $\|y\|_1 = \sum_{k=1}^{m} |y_k|$.

Найдём $\|A\|$.

$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{m} |y_i| = \sum_{i=1}^{m} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k \right| \le \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| \cdot |x_k| \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} |a_{ik}| \cdot |x_k| \right) = \sum_{k=1}^{n} \left[|x_k| \cdot \sum_{i=1}^{m} |a_{ik}| \right] \le$$

Пусть $\alpha = \max\limits_{1 \le k \le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ik}|$.

Пусть $\alpha = \max\limits_{1 \le k \le n} \sum\limits_{i=1}^{m} |a_{ik}|$.

$$\le \sum_{k=1}^{n} \left[|x_k| \cdot \alpha \right] = \alpha \cdot \sum_{k=1}^{n} |x_k| = \alpha \cdot \|x\|_1 .$$

След-но, $\underline{\|A\| \le \alpha \ (1)}$. $\underline{\text{Докажем: } \|A\| = \alpha}$.

Рассмотрим такой номер k_0, что $\sum\limits_{i=1}^{m} |a_{ik_0}| = \alpha$.

Пусть $\bar{x} = e_{k_0} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$ ($\bar{x}_{k_0} = 1$; $\bar{x}_k = 0$ при $k \ne k_0$);

$\|\bar{x}\|_1 = 1$; $\bar{y} = A\bar{x} = (a_{1k_0}, a_{2k_0}, \dots, a_{mk_0})^T$.

Тогда $\|A\bar{x}\|_1 = \|\bar{y}\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{m} |a_{ik_0}| = \alpha = \alpha \cdot \|\bar{x}\|_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \|A\| = \sup\limits_{\|x\|_1 = 1} \|Ax\|_1 \ge \|A\bar{x}\| = \alpha$, т.е. $\underline{\|A\| \ge \alpha \ (2)}$.

(1), (2) $\Rightarrow \underline{\|A\| = \alpha}$.

5. Норма оператора интегрирования

$A : C[0,1] \longrightarrow C[0,1]$;

$A : x(t) \longmapsto y(t) = \int\limits_0^t x(\tau)\,d\tau.$

Найдём $\|A\|$.

$$\|Ax\| = \max_{0\le t\le 1} \left| \int\limits_0^t x(\tau)\,d\tau \right| \le \max_{0\le t\le 1} \int\limits_0^t \underbrace{|x(\tau)|}_{\le \|x\|}\,d\tau \le \|x\| \Rightarrow$$

$\Rightarrow \underline{\|A\| \le 1}$ (1)

Рассм-м функцию $\bar{x}(t) \equiv 1$; $\|A\bar{x}\| = \max\limits_{0\le t\le 1} |t| = 1$;

$\|\bar{x}\| = 1.$

След-но, $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| \ge \|A\bar{x}\| = 1 \Rightarrow \underline{\|A\| \ge 1\ (2)}$

(1), (2) $\Rightarrow \underline{\|A\| = 1}$

6. Норма оператора дифференцирования

$E = C^1[0,1]$, $F = C[0,1]$, $A : E \to F$, $A = \frac{d}{dt} : x \mapsto \dot{x}$.

Найдём $\|A\|$.

$$\|Ax\|_F = \max_{0\le t\le 1} |\dot{x}(t)| \le \max_{0\le t\le 1} |x(t)| + \max_{0\le t\le 1} |\dot{x}(t)| = \|x\|_E \Rightarrow \underline{\|A\| \le 1} \quad (1)$$

Рассмотрим послед-ть $\{x_n(t) = \sin \pi n t\}_{n=1}^{\infty}$,

$$\|x_n\|_E = \max_{0\le t\le 1} |x_n(t)| + \max_{0\le t\le 1} |\dot{x}_n(t)| = 1 + \pi n ;$$

$$\|Ax_n\|_F = \|\dot{x}_n\|_F = \pi n .$$

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \ne \theta \\ x \in E}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \ge \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\|Ax_n\|}{\|x_n\|} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\pi n}{1+\pi n} = 1 \Rightarrow \underline{\|A\| \ge 1 \, (2)}$$

$(1), (2) \Rightarrow \underline{\|A\| = 1}$.

7. Пример неограниченного оператора

Пусть $E = \{x \in C[0,1] \mid x$ – непр. дифф-ма на $[0,1]\}$;

$\|x\|_E = \max\limits_{0\le t\le 1} |x(t)|$; $F = C[0,1]$.

Расс-м $A = \frac{d}{dt} : E \to F$, $A : x \longmapsto \dot{x}$.

И рассмотрим множество $M = \{x_n = \sin \pi n t\}_{n=1}^{\infty}$;

$\|x_n\|_E = \max\limits_{0\le t\le 1} |x_n(t)| = 1 \ (\forall n) \Rightarrow M$ – огранич. множ-во в E.

$(Ax_n)(t) = \dot{x}_n(t) = \pi n \cdot \cos \pi n t$; $\|Ax_n\|_F = \pi n \to +\infty$ (при $n \to \infty$),

след-но, мн-во $A(M) = \{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$ – не огран. в F.

След-но, A – не ограниченный ЛО.

Задачи

N 1. Доказать ограниченность оператора $A: \mathbb{R}^3_1 \longrightarrow \mathbb{R}^2_1$ и найти его норму, если A задан матрицей:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение.

1) $$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ -2x_1 + 3x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = y; \quad \|Ax\|_1 = \|y\| = |y_1| + |y_2|;$$

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + |x_3|.$$

$\|Ax\|_1 = |y_1| + |y_2| = |x_1 + 3x_2 + 2x_3| +$

$+ |-2x_1 + 3x_3| \leq |x_1| + 3|x_2| + 2|x_3| + 2|x_1| + 3|x_3| =$

$= 3|x_1| + 3|x_2| + 5|x_3| \leq 5\|x\|_1 \Rightarrow \underline{\|A\| \leq 5\ (1)}$

<u>Докажем: $\|A\| = 5$.</u>

Найдем такой $\bar{x} \in R^3_1$, что $\|\bar{x}\|_1 = 1$ и $\|A\bar{x}\|_1 = 5$.

а) $\bar{x} = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $Ae_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\|Ae_1\| = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow e_1$ не подходит.

б) $\bar{x} = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\|Ae_2\| = 3 \Rightarrow e_2$ не подходит.

в) $\bar{x} = e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\|Ae_3\| = 5 \Rightarrow$ $\underline{e_3 \text{ – подходит!}}$

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \geq \|Ae_3\| = 5 \Rightarrow \underline{\|A\| \geq 5 \ (2)}$$

$$(1), (2) \Longrightarrow \underline{\|A\| = 5.}$$

2) Самостоятельно. $\underline{\text{Ответ: } \|A\| = 5.}$

№2. Доказать ограниченность оператора $A: \mathbb{R}_1^2 \longrightarrow \mathbb{R}_1^3$ и найти его норму, если A задан матрицей:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. 1) $\|Ax\|_1 \leq 6|x_1| + 5|x_2| \leq 6\|x\|_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{\|A\| \leq 6 \ (1)}$.

Пусть $\bar{x} = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\|Ae_1\| = 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow \|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| \geq \|Ae_1\| = 6 \Rightarrow \underline{\|A\| \geq 6 \ (2)}$

$(1), (2) \Rightarrow \underline{\|A\| = 6.}$

2) Самост-но. <u>Ответ: $\|A\| = 8$</u>.

№3. Док-ть ограниченность и найти норму оп-ра $A : \mathbb{R}^3_1 \to \mathbb{R}^3_1$, если A задан матрицей:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Ответы: а) $\|A\| = 7$; б) $\|A\| = 9$.