

Линейная алгебра

Байков Андрей Юрьевич

Литература

- 1) Дм. Письменный «Конспект лекций по высшей математике» /М.: Арис-Пресс (стереотипное)
- 2) Байков А.Ю. Линейная алгебра. Краткий конспект лекций для студентов обучающихся по специальности Экономика/ М.: МФЮА, 2012

1. Вектор-столбцы и вектор-строки

Вектор-столбец

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Вектор-строка

$$\vec{a}^* = (a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n)$$

$$\dim(\vec{a}) = n \quad \dim(\vec{a}^*) = n \quad - \text{размерность}$$

Транспонирование:

$$(\vec{a})^T = \vec{a}^* \quad (\vec{a}^*)^T = \vec{a}$$

Схематические изображения



-
столбец



строка

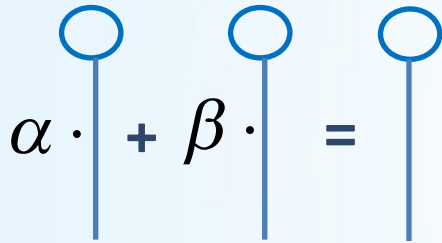
2. Операции над столбцами и строками

Линейные операции (сложение и умножение на

число)

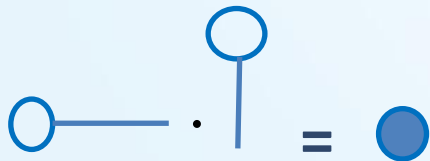
$$\dim(\overset{\boxtimes}{a}) = \dim(\overset{\boxtimes}{b}) = n$$

$$\alpha \overset{\boxtimes}{a} + \beta \overset{\boxtimes}{b} = \alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 + \beta b_1 \\ \alpha a_2 + \beta b_2 \\ \dots \\ \alpha a_n + \beta b_n \end{pmatrix}$$



Умножение строки на столбец

$$\overset{\boxtimes}{a} \cdot \overset{\boxtimes}{b} = (a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$



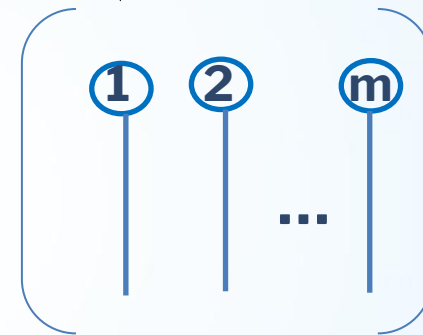
3. Матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$\dim A = n \times m$$

Представление матрицы в виде совокупности

столбцов $A = \left(\overset{\boxtimes}{a_1} \overset{\boxtimes}{a_2} \dots \overset{\boxtimes}{a_m} \right)$



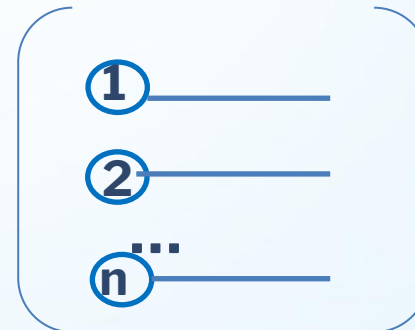
$$\dim \overset{\boxtimes}{a_k} = n$$

Представление матрицы в виде совокупности строк

$$A = \left(\overset{\boxtimes}{a_1^*} \overset{\boxtimes}{a_2^*} \dots \overset{\boxtimes}{a_n^*} \right)$$

$$\dim \overset{\boxtimes}{a_k^*} = m$$

$$A =$$



4. Произведение матрицы на столбец

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c} \textcircled{1} \text{---} \\ \textcircled{2} \text{---} \\ \dots \\ \textcircled{n} \text{---} \end{array} \right) \quad \boxtimes b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} = \textcircled{b} \text{---}$$

$\dim b = m$

$$\dim A = n \times m$$

$$\boxtimes c = A \cdot \boxtimes b = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_1 + a_{12} \cdot b_2 + \dots + a_{1m} \cdot b_m \\ a_{21} \cdot b_1 + a_{22} \cdot b_2 + \dots + a_{2m} \cdot b_m \\ \dots \\ a_{n1} \cdot b_1 + a_{n2} \cdot b_2 + \dots + a_{nm} \cdot b_m \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c} \textcircled{1} \text{---} \cdot \textcircled{b} \\ \textcircled{2} \text{---} \cdot \textcircled{b} \\ \dots \\ \textcircled{n} \text{---} \cdot \textcircled{b} \end{array} \right)$$

$\dim c = n$

5. Произведение матриц

$$A = (a_{ij}) \quad \dim A = n \times m$$

$$B = (b_{rs}) \quad \dim B = m \times k$$

$$A = \begin{pmatrix} \textcircled{1} & \text{---} \\ \textcircled{2} & \text{---} \\ \dots & \dots \\ \textcircled{n} & \text{---} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = C$$

$$\dim C = n \times k$$

$$B = \begin{pmatrix} \textcircled{1} & \textcircled{2} & \dots & \textcircled{k} \\ | & | & & | \\ | & | & & | \\ \dots & \dots & & \dots \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} \begin{array}{ccc} \textcircled{1} & \textcircled{1} & \dots & \textcircled{k} \\ \textcircled{1} & \cdot & | & \textcircled{1} \\ \textcircled{2} & \cdot & | & \textcircled{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \textcircled{n} & \cdot & | & \textcircled{k} \end{array} & \begin{array}{ccc} \textcircled{1} & \textcircled{2} & \dots & \textcircled{k} \\ \textcircled{1} & \cdot & | & \textcircled{1} \\ \textcircled{2} & \cdot & | & \textcircled{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \textcircled{n} & \cdot & | & \textcircled{k} \end{array} & \dots & \begin{array}{ccc} \textcircled{1} & \textcircled{2} & \dots & \textcircled{k} \\ \textcircled{1} & \cdot & | & \textcircled{1} \\ \textcircled{2} & \cdot & | & \textcircled{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \textcircled{n} & \cdot & | & \textcircled{k} \end{array} \end{pmatrix}$$

6. Пример произведения

матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 \\ 15 & 16 & 17 \\ 18 & 19 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \dim A = 2 \times 4 \\ \dim B = 4 \times 3 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \exists C = A \cdot B \\ \dim C = 2 \times 3 \end{cases}$$

Пусть

$$C = \begin{pmatrix} \boxtimes c_1 & \boxtimes c_2 & \boxtimes c_3 \end{pmatrix}$$

$$\boxtimes c_1 = \begin{pmatrix} 1 \cdot 9 + 2 \cdot 12 + 3 \cdot 15 + 4 \cdot 18 \\ 5 \cdot 9 + 6 \cdot 12 + 7 \cdot 15 + 8 \cdot 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 366 \end{pmatrix}$$

6. Пример произведения матриц (продолжение)

$$\boxtimes c_2 = \begin{pmatrix} 1 \cdot 10 + 2 \cdot 13 + 3 \cdot 16 + 4 \cdot 19 \\ 5 \cdot 10 + 6 \cdot 13 + 7 \cdot 16 + 8 \cdot 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 160 \\ 392 \end{pmatrix}$$

$$\boxtimes c_3 = \begin{pmatrix} 1 \cdot 11 + 2 \cdot 14 + 3 \cdot 17 + 4 \cdot 20 \\ 5 \cdot 11 + 6 \cdot 14 + 7 \cdot 17 + 8 \cdot 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 170 \\ 418 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 150 & 160 & 170 \\ 366 & 392 & 418 \end{pmatrix}$$

1-6.

Задачи-1

В задачах 1-2 найти все возможные произведения матриц

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = (1 \quad 2 \quad 3 \quad 4)$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1-6.

Задачи-2

В задачах 1-2 найти все возможные произведения матриц

2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = (1 \quad 2 \quad 3)$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

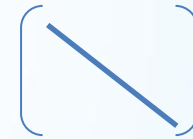
7. Квадратные матрицы

$A = (a_{ij})$ $\dim A = n \times n$ - квадратная матрица размерности n

Если $\dim B = n \times n$, то $A \cdot B = C$, $B \cdot A = D$
 $\dim C = \dim D = n \times n$

$C \neq D$

$\{a_{ii}\}$ - главная диагональ квадратной матрицы



Диагональные матрицы

$$\begin{pmatrix} & & & 0 \\ & & & \\ & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$$

8. Особые виды квадратных матриц

Нулевая матрица

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$A + O = O + A = A$$

Единичная матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$$

$$A \cdot E = E \cdot A = A$$

Треугольная матрица

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Симметричная матрица

$$S^T = S$$

9.Дополнительная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{matrix} m \\ k \end{matrix}$$

Матрица размерности $(n-1) \times (n-1)$, получающаяся вычеркиванием m -й строки и k -го столбца из исходной матрицы, называется дополнительной матрицей к элементу a_{mk}

10. Определитель квадратной матрицы

$$\Delta = \det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Определитель
дополнительной

матрицы называется
минором

Определитель дополнительной к элементу a_{mk} матрицы, взятый со знаком «+», если сумма $m+k$ четная и со знаком «-», если сумма $m+k$ нечетная, называется алгебраическим дополнением элемента a_{mk} . Будем обозначать его A_{mk} .

Определение по

1) Если $\dim(A) = 1 \times 1$, т.е. $A = (a)$, то $\det(A) = a$

2) Если $\dim(A) = n \times n$, то $\det(A) = a_{m1} \cdot A_{m1} + a_{m2} \cdot A_{m2} + \dots + a_{mn} \cdot A_{mn}$

ил $\det(A) = a_{1k} \cdot A_{1k} + a_{2k} \cdot A_{2k} + \dots + a_{nk} \cdot A_{nk}$

и

10. Определитель квадратной матрицы (продолжение)

Чередование знаков алгебраического

дополнения

$$A_{ij} = \begin{cases} m_{ij}, i+j=2p \\ -m_{ij}, i+j=2p+1 \end{cases} = (-1)^{i+j} m_{ij} \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} A_{11} = d & A_{12} = -c \\ A_{21} = -b & A_{22} = a \end{matrix} \quad \det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} =$$

$$= a \cdot A_{11} + b \cdot A_{12} = c \cdot A_{21} + d \cdot A_{22} = a \cdot A_{11} + c \cdot A_{21} = d \cdot A_{12} + d \cdot A_{22} =$$

$$= a \cdot d - b \cdot c \quad \left(\begin{array}{cc} \bullet & \circ \\ \circ & \bullet \end{array} \right) - \left(\begin{array}{cc} \circ & \bullet \\ \bullet & \circ \end{array} \right)$$

11. Определитель 3x3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32}$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{21} \cdot a_{33} + a_{23} \cdot a_{31}$$

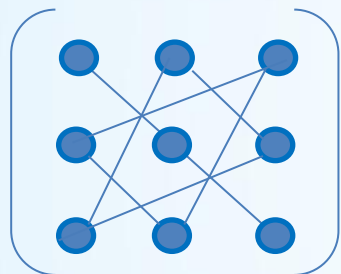
$$A_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}$$

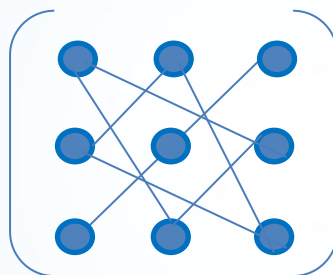
11. Определитель 3x3

(продолжение)

$$\det(A) = (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23}) - \\ - (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21})$$



—



- правило
треугольников

Пример.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = (1 \cdot 5 \cdot 9 + 3 \cdot 4 \cdot 8 + 7 \cdot 2 \cdot 6) - (3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 \cdot 8 \cdot 6 + 9 \cdot 2 \cdot 4) = \\ = 225 - 225 = 0$$

12. Свойства

определителя

1) $\det(A^T) = \det(A)$

2) $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

3) Если какая-либо строка (столбец) определителя состоит из одних нулей, то определитель равен 0.

4) Если все элементы любой строки (столбца) умножить на число α , то и определитель умножится на это же

число α .
5) Если определитель содержит две одинаковые строки (два одинаковых столбца), то он равен нулю

6) При перестановке двух строк (столбцов) определителя он меняет знак на противоположный.

7) Определитель не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), предварительно умноженные на одно и то же число.

13. Эквивалентные преобразования матриц.

Эквивалентными называются преобразования матрицы, не меняющие значение определителя, т.е.

преобразования на основе свойства 7.

Эквивалентные преобразования делаются с целью получения строк (столбцов) с максимальным числом нулей.

Пример. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 5 & 6 & 8 & -1 \\ -3 & 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} = \left[\begin{matrix} \times \\ a_1 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \times \\ a_1 - a_2 \end{matrix} \right] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 5 & 6 & 8 & -1 \\ -3 & 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} =$$

13. Эквивалентные преобразования матриц (продолжение).

$$= 0 \cdot \begin{vmatrix} * & * & * \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} * & * & * \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} * & * & * \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ -3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \left[\begin{matrix} \boxed{a}_2^* \rightarrow \boxed{a}_2^* - 3\boxed{a}_1^* \end{matrix} \right] = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} * & * & * \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} * & * & * \end{vmatrix} = 2 \cdot (2 \cdot 5 - (-4)(-3)) = -4$$

7-13.

Задачи-1.

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$2) \begin{vmatrix} 6 & 8 & 6 \\ -5 & -3 & 8 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$3) \begin{vmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -3 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$4) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$5) \begin{vmatrix} 1 & 234 & 631 \\ 0 & 1 & 764 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$6) \begin{vmatrix} 23 & -25 & -32 \\ -46 & 50 & 65 \\ -23 & 25 & 7 \end{vmatrix} =$$

7-13.

Задачи-2.

$$7) \begin{vmatrix} 5 & -2 & -7 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & -4 \\ 2 & 8 & 4 & -8 \\ 9 & 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$8) \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 4 & -4 \\ 2 & 3 & 4 & -8 \\ 6 & 1 & 10 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$9) \begin{vmatrix} 1 & -21 & -76 & 256 \\ 0 & 2 & 267 & -41 \\ 0 & 0 & 2 & -84 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$10) \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 & -2 \\ 7 & 14 & 21 & 28 \\ 2 & 3 & 4 & -8 \\ 6 & 12 & 18 & 24 \end{vmatrix} =$$

7-13.

Задачи-3.

11) Решить уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 2 & 1-x \end{vmatrix} = 0$$

12) Решить уравнение

$$\begin{vmatrix} 1+x & 2 \\ x & 1-x \end{vmatrix} = 0$$

13) $\det(\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)) =$

7-13.

Задачи-4.

$$14) \begin{vmatrix} 0 & 4 & -2 & 2 \\ 2 & 7 & -2 & 5 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \\ 9 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$15) \begin{vmatrix} 8 & -6 & -2 & 7 \\ -2 & 7 & 3 & 5 \\ 12 & -3 & 0 & 18 \\ 16 & 11 & 10 & 12 \end{vmatrix} =$$

$$16) \begin{vmatrix} 3 & -21 & -76 & 256 \\ 0 & 7 & 267 & -41 \\ 0 & 0 & 2 & -84 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$18) \begin{vmatrix} 1 & -4 & -3 & 0 \\ 17 & 13 & 22 & 24 \\ 2 & 3 & 4 & -8 \\ 16 & 15 & 14 & 22 \end{vmatrix} =$$