Касательная плоскость к сфере.

29.10.2021

Повторим. (устно)

Сферой называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии от данной точки.

Тело, ограниченное сферой, называется шаром.

Сфера может быть получена вращением полуокружности вокруг её диаметра, а шар – вращением полукруга вокруг его диаметра.

В прямоугольной системе координат уравнение сферы радиуса R с центром $O(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$




Устный опрос.

а) Что называется сферой?

Сферой называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии от данной точки.

б) Что называют диаметром сферы?

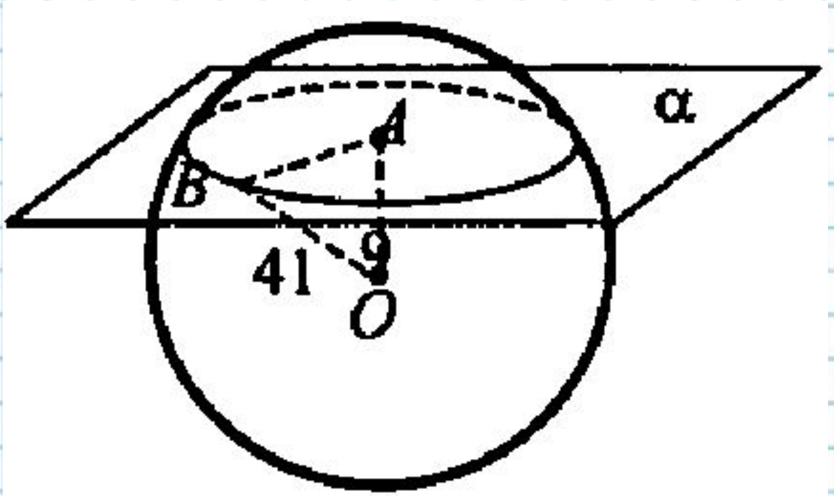
Отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через её центр, называется диаметром сферы.

в) Расскажите о взаимном расположении сферы и плоскости.

Пусть R – радиус, d – расстояние от центра сферы до плоскости.
Возможны случаи:

1. $d < R$: сфера и плоскость пересекаются по окружности;
2. $d = R$: сфера и плоскость имеют одну общую точку;
3. $d > R$: сфера и плоскость не имеют общих точек.

Работа с чертежами.



Найдите площадь сечения плоскостью α шара с центром в точке О, если известно, что ОА = 9 и ОВ = 41.

Решение.

Сечение есть круг с центром в точке А и радиусом АВ. $OA \perp \alpha$.

$\Delta OAB: \angle BAO = 90^\circ$ *по теореме Пифагора*

$$AB = \sqrt{OB^2 - OA^2} = \sqrt{41^2 - 9^2} =$$

$$= \sqrt{1681 - 81} = \sqrt{1600} = 40\ (см).$$

$$S_{сеч.} = \pi r^2 = \pi \cdot 40^2 = 1600\pi\ (см^2).$$

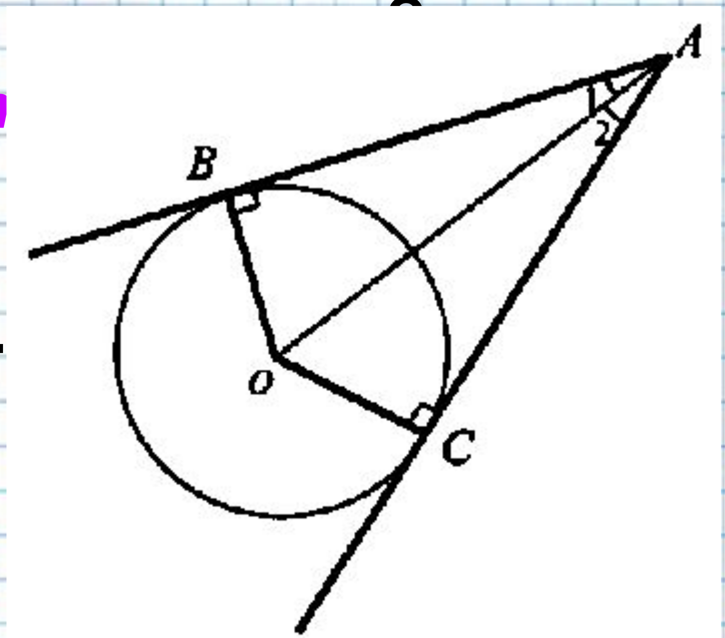
***Ответ*: $1600\pi\ см^2$.**

Объяснение нового материала.

1. Повторение изученного в курсе планиметрии:

а) Что называется касательной к

Прямая, имеющая с окружност
одну общую точку называется
касательной к окружности.



б) Вспомним основные теоремы.

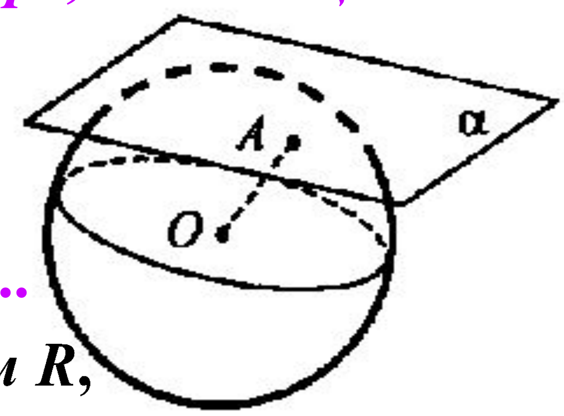
1). *Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания.*

2). *Если прямая проходит через конец радиуса и перпендикулярна к этому радиусу, то она является касательной.*

3). *Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.*

2. Доказательство основных теорем о касательной плоскости.

Плоскость, имеющая со сферой только одну общую точку, называется касательной плоскостью к сфере, а их общая точка – точкой касания.



Теорема: *Радиус сферы, проведенной в точку касания сферы и плоскости, перпендикулярен к касательной плоскости..*

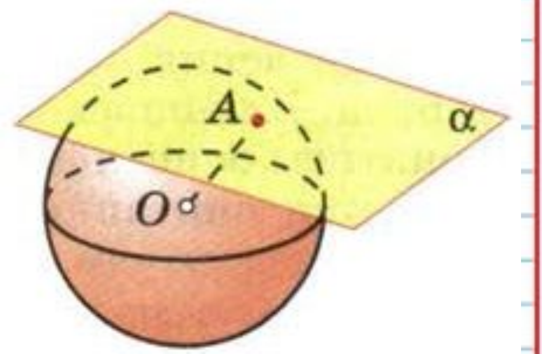
Дано: *сфера с центром в точке O и радиусом R, α – касательная плоскость, A – точка касания.*

Доказать: $R \perp \alpha$.

Доказательство: *Предположим противное: пусть $R = OA \not\perp \alpha$, следовательно OA – наклонная к плоскости α, значит, расстояние от центра сферы до плоскости α меньше $R = OA$: $d < R$, значит, сфера и плоскость α пересекаются по окружности, что противоречит условию, что α – касательная плоскость, т.е. плоскость α и сфера имеют одну общую точку. Значит, $R \perp \alpha$.*

Теорема: (признак касательной плоскости)

Если радиус сферы перпендикулярен к плоскости, проходящей через его конец, лежащий на сфере, то эта плоскость является касательной к сфере.



Дано: сфера с центром в точке O и радиусом R

$OA \perp \alpha$, R — точка A лежит на сфере.

Доказать: α – касательная плоскость.

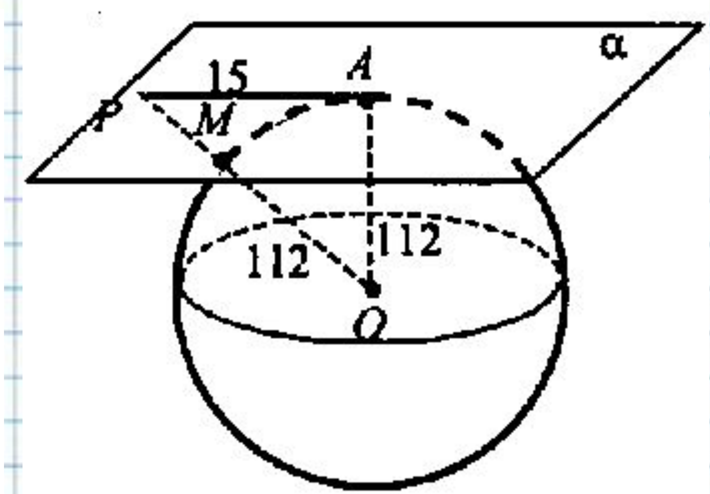
Доказательство: Радиус перпендикулярен к данной плоскости

$R \perp \alpha$, значит, расстояние от центра сферы до плоскости и α равно радиусу сферы $d = R$, следовательно, сфера и плоскость имеют только одну общую точку, то есть данная плоскость является касательной.

Закрепление изученного материала.

Задача № 592. *Дано*: сфера с центром в точке O и радиусом R, $R = 112$ см, α – касательная, A – точка касания, P лежит на сфере, $AP = 15$ см. M – точка пересечения PO и сферы (рис. 9).

Найти: PM.



Решение: ΔOAP – прямоугольный, так как $OA = R$, α – касательная плоскость. По теореме Пифагора найдем

$$OP = \sqrt{112^2 + 15^2} = 113 \text{ (см)}. \quad PM = OD - R = 113 - 112 = 1 \text{ (см)}.$$

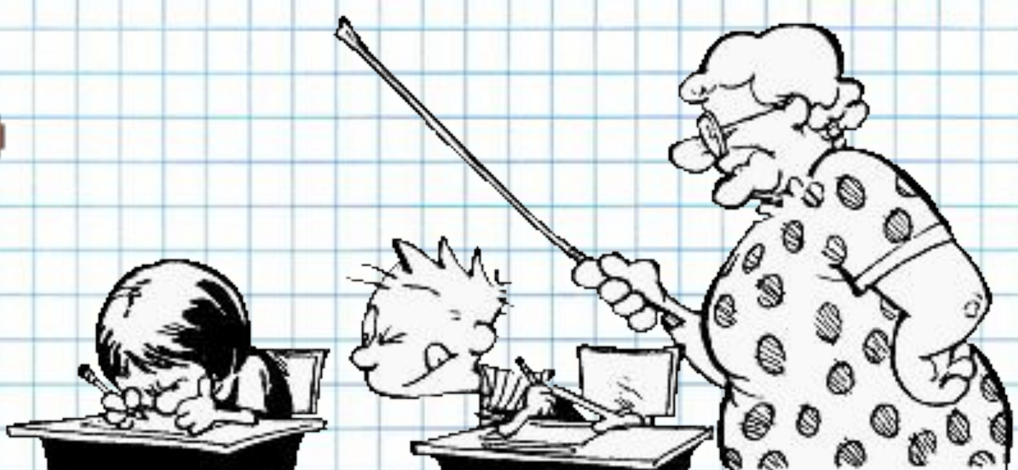
Ответ: 1 см.





Подведение итогов.

1. Вспомним понятие касательной плоскости к сфере.
2. Свойство касательной плоскости.
3. Признак касательной плоскости.



Вывод уравнения сферы.

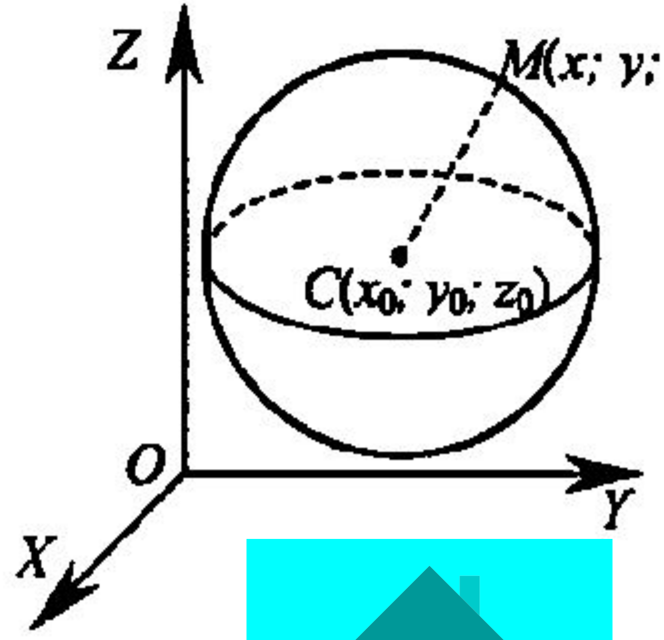
Пусть точка $C(x_0; y_0; z_0)$ центр данной сферы, а точка $M(x; y; z)$ лежит на сфере.

1. Найдем расстояние между этими точками:

$MC = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$, но MC есть радиус сферы, значит, можно записать:

$$R = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$$

или $R^2 = (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2$ – уравнение сферы с центром в точке $C(x_0; y_0; z_0)$.



2. Если центр сферы совпадет с началом отсчета данной системы координат, то уравнение сферы будет иметь вид: $R^2 = x^2+y^2+z^2$, так как $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$.

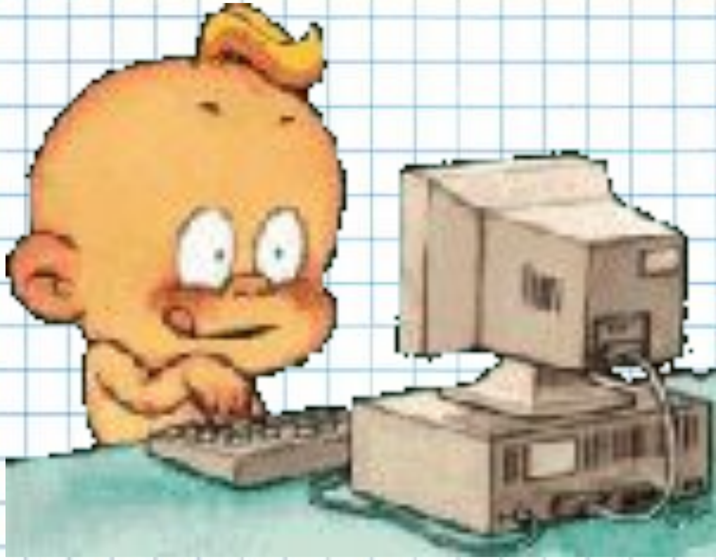
Домашнее задание:

§§ 64–67, вопр. 7–9 стр.152-153; № 593.

Написать конспект и задачи, выполняя чертежи.

Высылать в личном сообщении в вк или на почту SHPAK.IRINA.S@yandex.ru

Перед каждым заданием в тетради пишем ФИО, дата, тема урока



Спасибо за урок!