ЛЕКЦИЯ № 4

Принцип относительности в классической механике. Преобразования Галилея. Силы инерции.

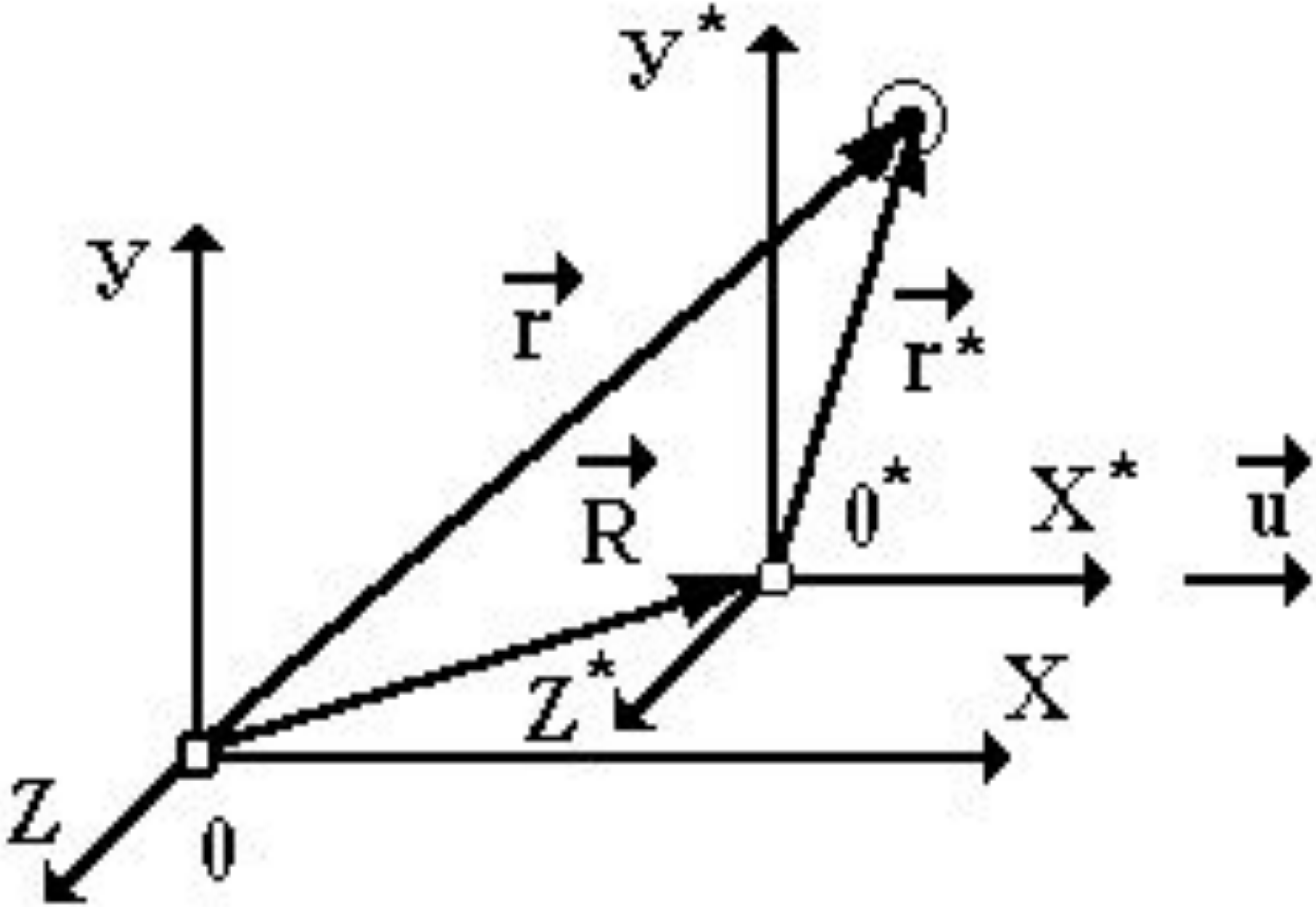
ВОПРОСЫ

11. Принцип относительности в механике. Инерциальные системы отсчёта. Преобразования Галилея.
12. Неинерциальные системы отсчёта. Сила инерции.
13. Силы инерции во вращающихся неинерциальных системах и системах. Принцип эквивалентности масс.

Вопрос № 11.
Принцип относительности в механике.
Преобразования Галилея.
Инерциальные системы отсчёта.

Инерциальные системы

Рассмотрим две системы отсчёта, одна покоится (K), другая ($K^{/}$) движется относительно другой со скоростью $\vec{V}_0$.


y*
y
$\vec{r}$
$\vec{r}^*$
$\vec{R}$
0*
X*
$\vec{u}$
Z*
X
Z
0

Запишем связь между координатами (x, y, z) и (x', y', z') точки «P» в системах (K) и (K').

Полагаем, что время в системах одинаково: $t = t'$,

в начальный момент $t = 0$, $x = x'$.

Получаем четыре уравнения

$$x = x' + v_0 t$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = t'$$

это преобразование Галилея, используем его если $V_0 << c$, иначе надо использовать преобразование Лоренца.

Дифференцируем по времени:

$$\dot{x} = \dot{x}' + v_0$$

$$\dot{y} = \dot{y}'$$

$$\dot{z} = \dot{z}'$$

Или в следующем виде (напоминаем, что только для выбранной схемы, рисунка)

$$v_x = v'_x + v_0$$

$$v_y = v'_y$$

$$v_z = v'_z$$

Перейдём к векторам

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0$$

Дифференцируем

$$\dot{\vec{v}} = \dot{\vec{v}}' \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{a}'$$

или для уравнения движения

$$m\vec{a} = m\vec{a}' \Leftrightarrow \vec{F} = \vec{F}'$$

Уравнения динамики не изменяются при переходе от одной инерциальной системы отсчёта к другой, то есть они инвариантны.
Сила и ускорение инвариантны (неизменны) относительно преобразования Галилея.

Итак, все инерциальные системы отсчёта инвариантны: Уравнения движения выглядят одинаково (дифференциальные уравнения), но движения разные, так как разные начальные условия (V_0, r_0).

12. Неинерциальные системы отсчёта. Сила инерции.

Неинерциальные системы

Рассмотрим две системы отсчёта, одна инерциальная, вторая – неинерциальная, Имеется некоторое тело, которое движется с ускорением a_i относительно инерциальной системы, a_n – относительно неинерциальной системы.

Разность ускорений тела в инерциальной и неинерциальной системах отсчёта
(для поступательного движения)

$$\vec{a}_i - \vec{a}_n = \vec{a}$$

a – одинаково во всех точках пространства неинерциальной системы ($\vec{a}$ = const) и представляет собой ускорение неинерциальной системы отсчёта.

Через 2-й закон Ньютона представим ускорения.

Инерциальная система:

$$\vec{a}_i = \frac{\vec{F}}{m}$$

Неинерциальная система:

$$\vec{a}_n = \vec{a}_i - \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} - \vec{a}$$

m – масса тела.

Отсюда, при $F = 0$ тело будет двигаться, в неинерциальной системе отсчёта с ускорением $-a$, как если бы была сила $-ma$.

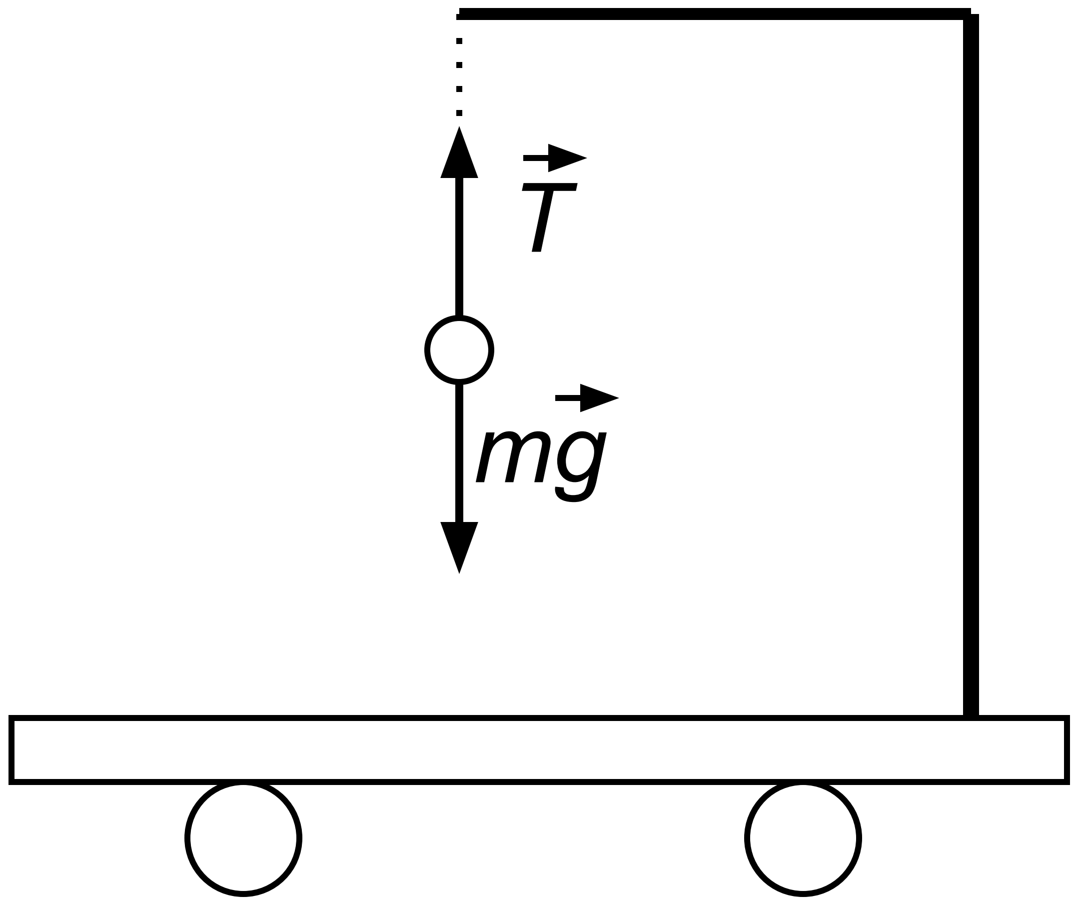
Введём силу инерции

$$\vec{F}_i = -m(\vec{a}_i - \vec{a}_n) = -m\vec{a}$$

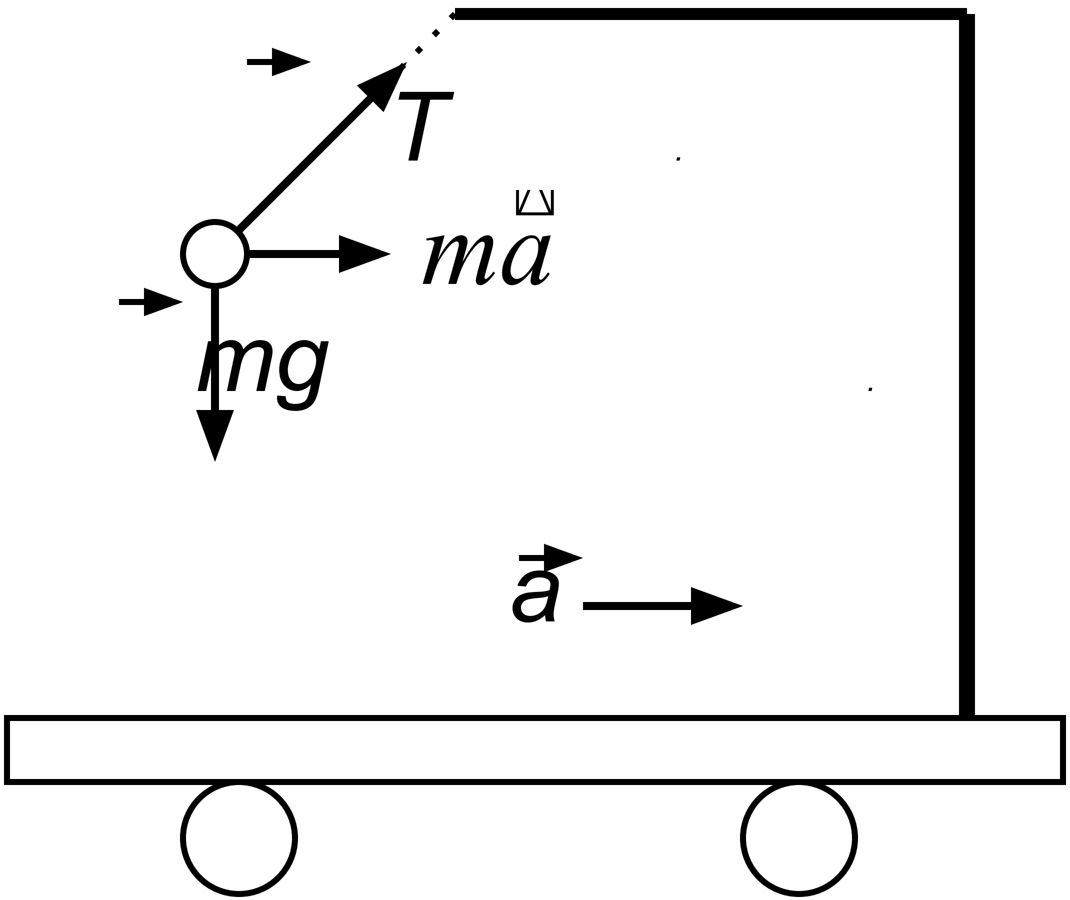
2-й закон Ньютона в неинерциальной системе отсчёта

$$m\vec{a}_n = \vec{F} + \vec{F}_i$$

Пример: платформа с грузом
(a = 0)



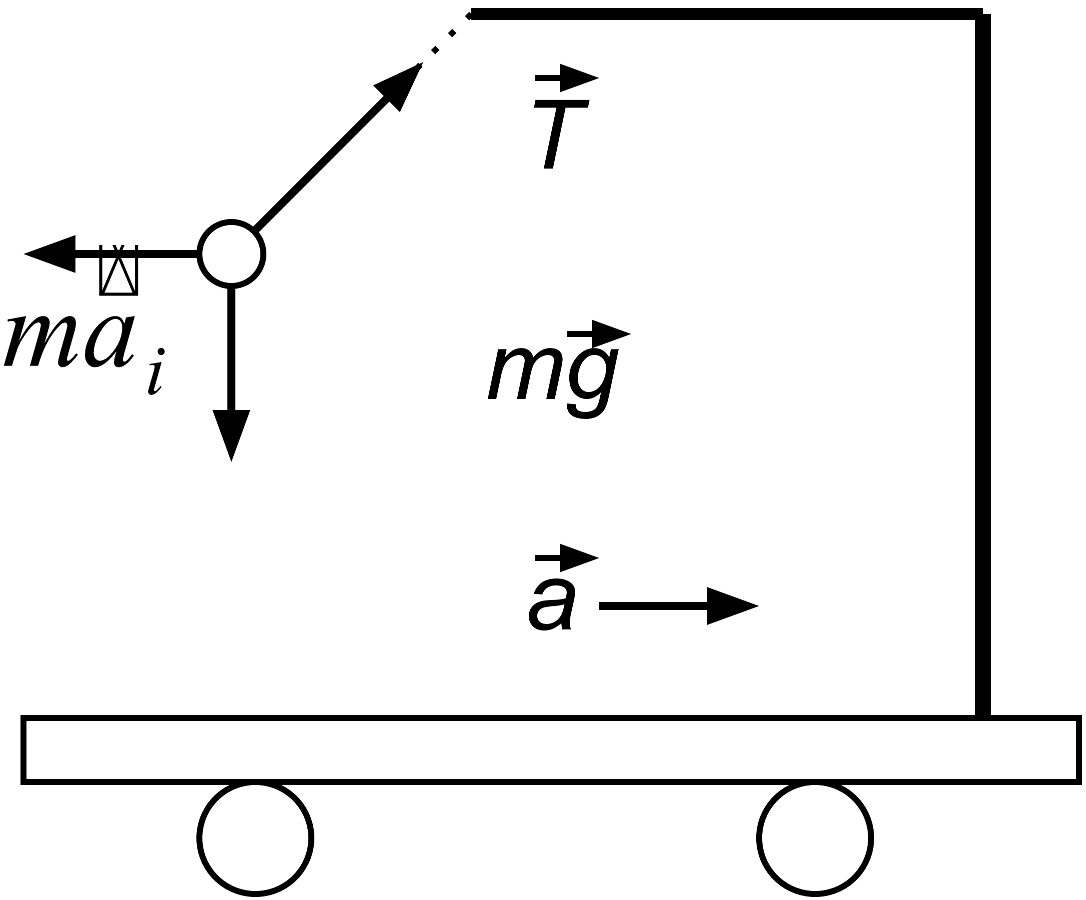
Платформа с грузом, наблюдатель стоит рядом, $m\vec{a} = \vec{T} + m\vec{g}$



Платформа с грузом, наблюдатель на платформе

$$m\vec{a}_i + \vec{T} + m\vec{g} = 0$$

$$\vec{F}_i = -m\vec{a}_i$$



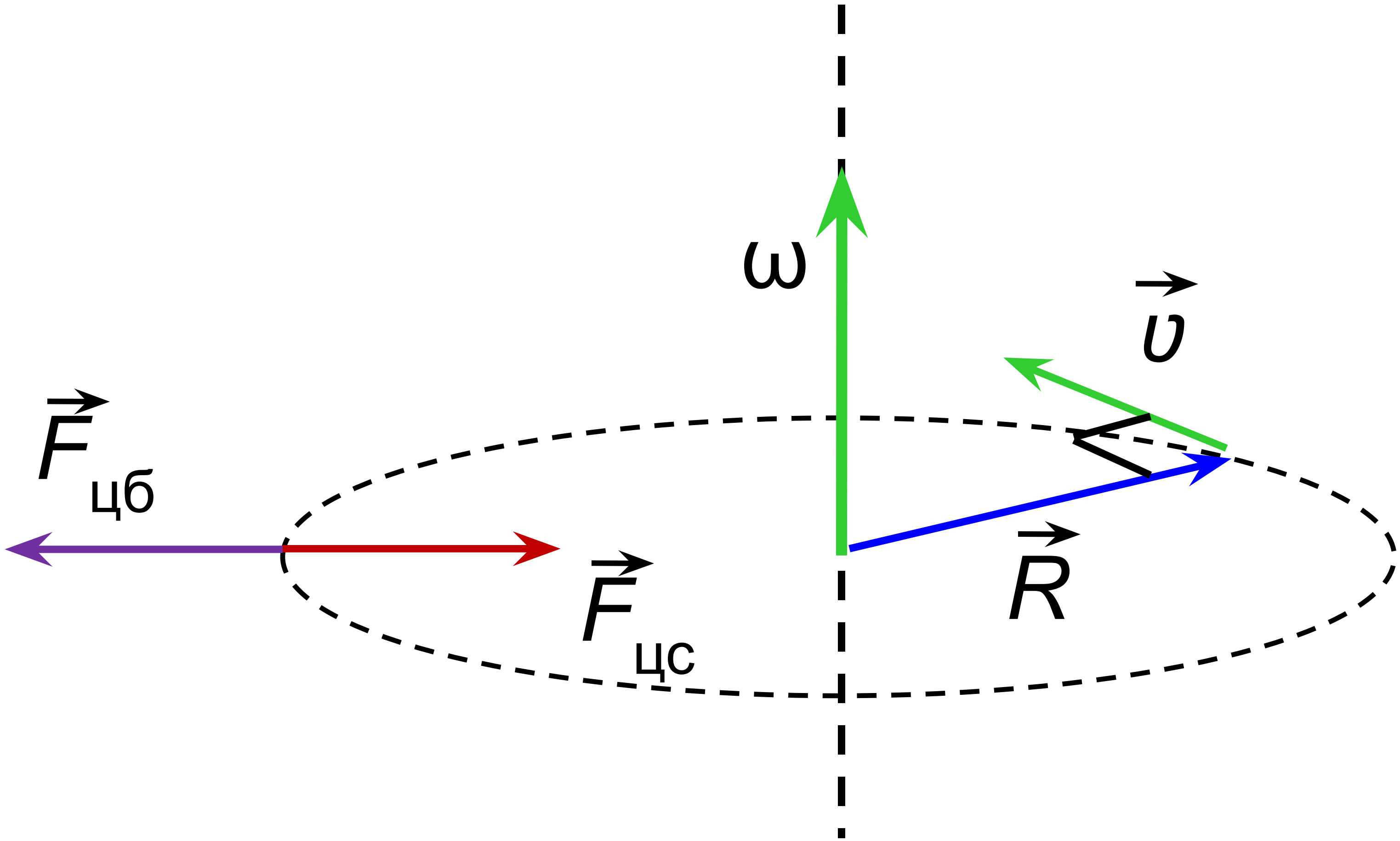
Все силы в физике обусловлены взаимодействием тел, то есть одно тело действует на другое, и силы зависят от вида взаимодействия. Силы инерции обусловлены свойствами системы отсчёта, в которой рассматриваются механические явления. В этом смысле их можно назвать фиктивными силами.

13. Силы инерции во вращающихся неинерциальных системах и системах. Принцип эквивалентности масс.

Рассмотрим движение тела по окружности.

В инерциальной системе тело удерживается на окружности центростремительной силой.

В качестве центростремительной силы могут быть следующие силы: центростремительная сила, сила натяжения, сила гравитационного взаимодействия, электромагнитное взаимодействие.



143

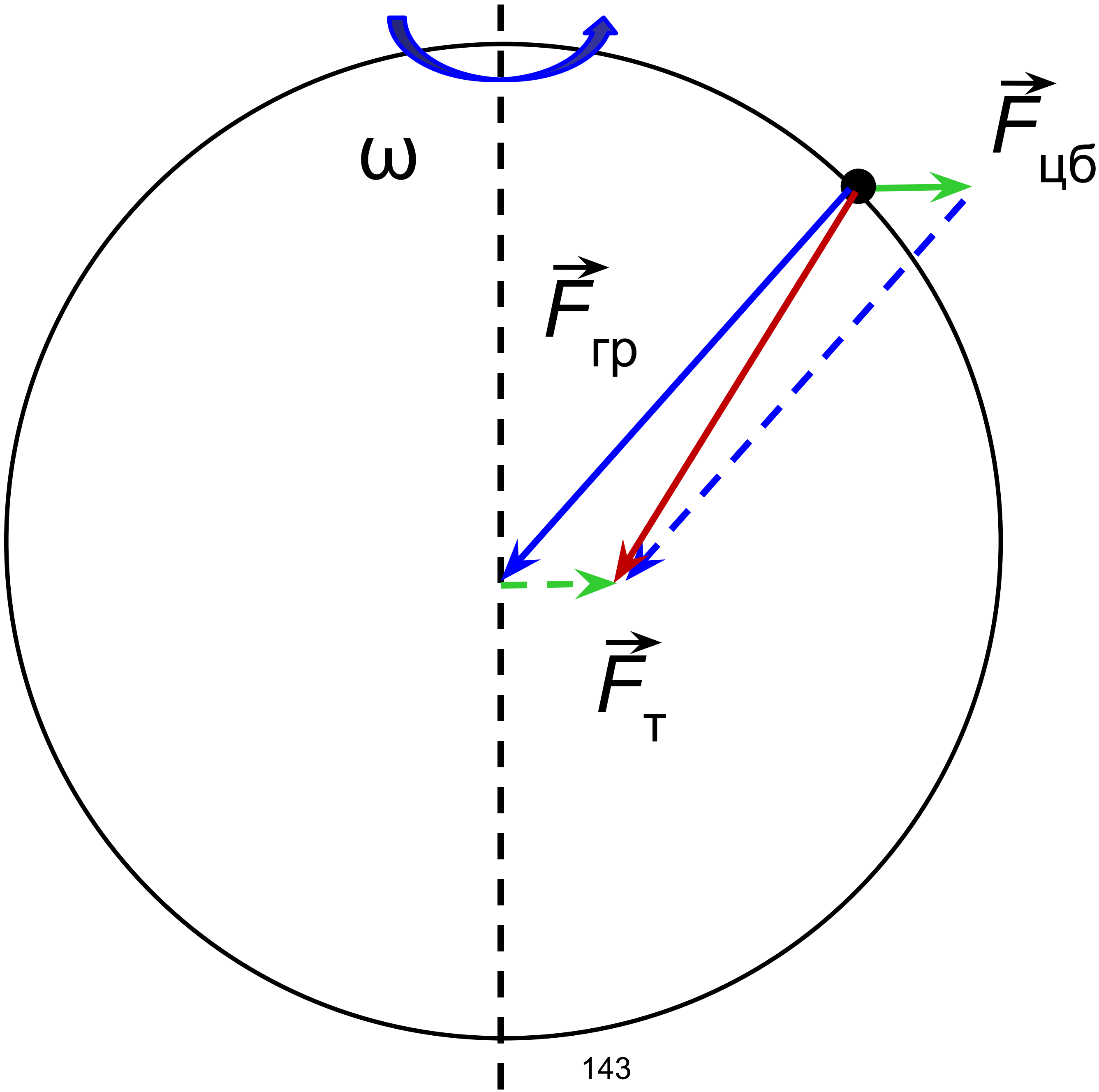
Если наблюдать из инерционной системы отсчёта (наблюдатель находится рядом, не двигается), то необходимо использовать силу центростремительную $F_{цс}$, которая направлена к центру окружности и изменяет направление движения (модуль скорости не изменяется).

$$\vec{F}_{цс} = m\vec{a}_{цс} = -m\omega^2\vec{R}$$

Если наблюдать из неинерционной системы отсчёта (наблюдатель двигается по окружности радиусом *R* с угловой скоростью ω), то для описания состояния вращающегося тела необходимо ввести силу инерции – центробежную силу $F_{цб}$, которая будет противодействовать силе центростремительной.

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{цб} = m\omega^2 \vec{R} = -\vec{F}_{цс}$$

Влияние центробежной силы на силу тяжести.
Сила гравитационного взаимодействия притягивает тела на поверхности Земли к центру Земли.
Центробежная сила направлена от оси вращения.
Векторная сумма этих двух сил есть сила тяжести.



143

Центробежная сила на экваторе за счёт вращения Земли вокруг своей оси:

$a_{цб} = 3{,}4$ см/с^2.

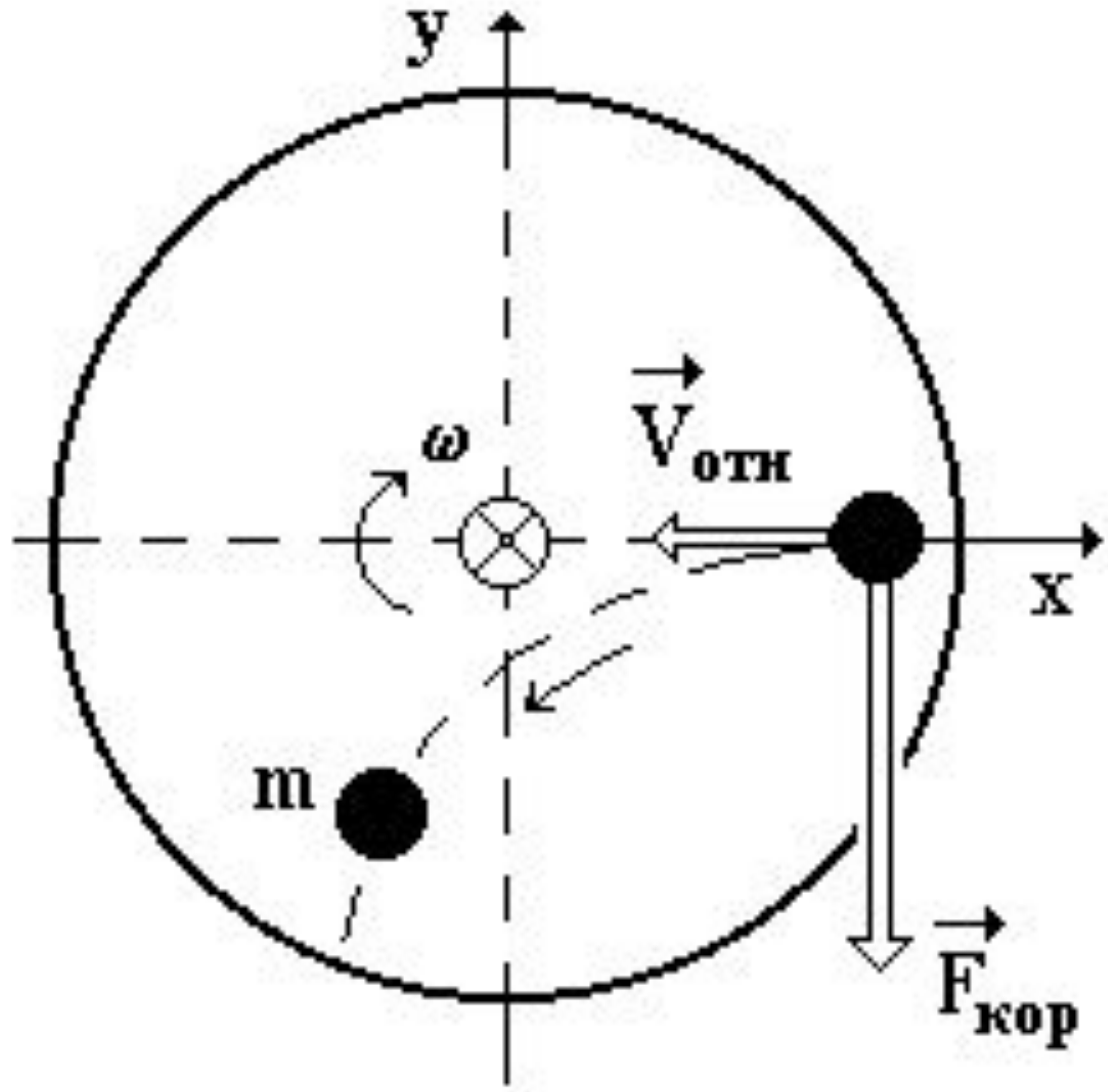
Центробежная сила за счёт вращения Земли вокруг Солнца:

$a_{цб} = 0{,}6$ см/с^2.

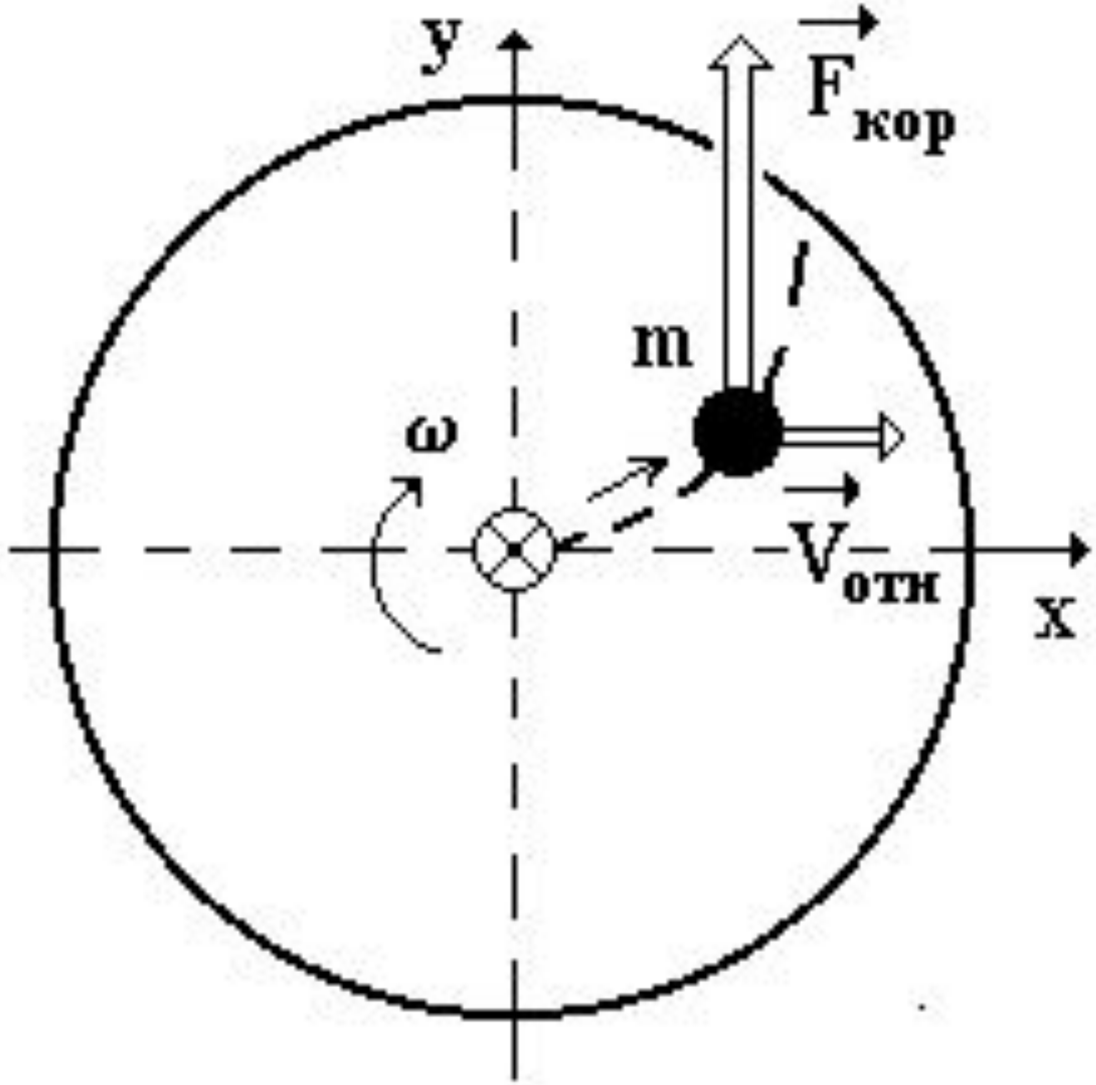
При движении тела относительно вращающейся системы отсчёта, кроме центробежной силы инерции, появляется ещё одна сила, называемая силой Кориолиса или кориолисовой силой инерции.

$$\vec{F}_{\text{К}} = 2m[\vec{\upsilon}_{\text{отн}} \times \vec{\omega}]$$

Рассмотри случай, когда $\upsilon_{\text{отн}} \perp \omega$ и $\upsilon_{\text{отн}} \parallel R$: $F_{\text{к}} = 2m\upsilon_{\text{отн}}\omega$.



200



200

Если $\upsilon_{отн}$ II ω и $\upsilon_{отн} \perp R$: $F_к = 0$.
При движении параллельно оси вращения, силы Кориолиса нет.

Если $\upsilon_{отн} \perp$ ω и $\upsilon_{отн}$ II R: $F_к$ II $F_{цб}$.
При движении по параллелям на запад или восток, сила Кориолиса будет уменьшать или увеличивать центробежную силу, соответственно.

Принцип эквивалентности масс. Все физические явления в гравитационном поле происходят совершенно так же, как и в поле сил инерции, если напряженности обоих полей совпадают в соответствующих точках пространства, а начальные условия одинаковы для всех тел изолированной системы.

(Или) масса гравитационная равняется массе инерционной

$$m_i = \frac{F}{a} \qquad m_g = \frac{FR^2}{GM}$$

Пустили фотон с некоторой частотой ν сверху вниз.

Энергия и масса фотона:

$E_ф = mc^2$, $m = h\nu/c^2$.

На высоте H (в опыте было H = 20м)

$$h\nu + mgH = h\nu + \frac{h\nu}{c^2}gH$$

внизу:

$$h\nu' = h\nu + \frac{h\nu}{c^2}gH$$

200

Изменение частоты:

$$\Delta\nu = \frac{gH\nu}{c^2}$$

что и было зафиксировано. Точность измерений была:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = 2 \cdot 10^{-15}$$

200

ЛЕКЦИЯ № 5

Элементы релятивистской механики

ВОПРОСЫ

14. Предпосылки появления специальной теории относительности (СТО).
15. Преобразования Лоренца. Следствия из преобразований Лоренца. Причинно-следственная связь в СТО.
16. Закон сложения скоростей в СТО. Релятивистский импульс.

14. Предпосылки появления специальной теории относительности (СТО).

Классическая физика рассматривает движение макротел с медленными скоростями.
Описание взаимодействия тел с помощью потенциальной энергии предполагает мгновенное распространение.
Причем скорость этого распространения может быть сколь угодно большой.

Однако это противоречит экспериментальным данным, которые появились к концу XIX века. По Эйнштейну существует максимальная конечная скорость распространения взаимодействий – скорость света в вакууме $c \approx 3 \cdot 10^8$ м/с.

В связи с механическим принципом относительности Галилея возникает вопрос:
равноправны ли все инерциальные системы отсчета при рассмотрении тепловых, электрических, магнитных, световых и других физических явлений, кроме механических?

Как показал, Эйнштейн принцип относительности распространяется на любые физические явления, а не только механические.

Позднее им была *создана специальная теория относительности* (СТО) для движения тел и частиц со скоростями υ, близкими к скорости света в вакууме (1905г.). В этой теории предполагается, как и в классической физике, что пространство изотропное и однородное и время однородное.

Позднее Эйнштейн создал общую теорию относительности (1916г.), которая учитывает большие гравитационные поля.
Но рассмотрим только специальную теорию, без гравитационных полей.

1-й постулат (релятивистский принцип относительности):
в любых инерциальных системах отсчета все физические явления при одних и тех же условиях протекают одинаково, т. е. никакими физическими опытами невозможно установить движется данная инерциальная система отсчёта равномерно и прямолинейно или покоится.

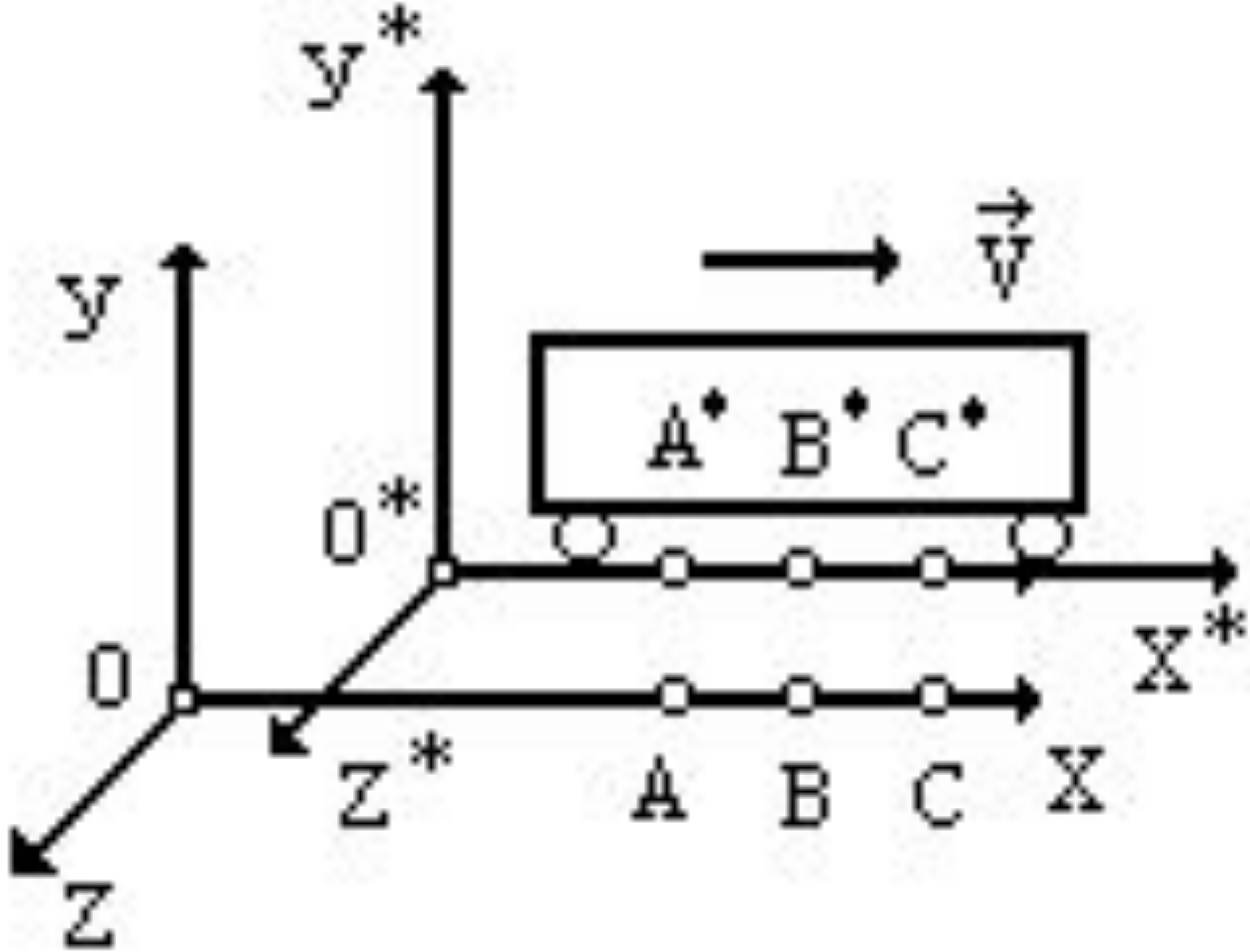
Следовательно, все физические законы инвариантны (независимы) по отношению к выбору инерциальной системы отсчета.

2-й постулат (принцип инвариантности скорости света в вакууме):

Скорость света в вакууме не зависит от вида движения источника света, приемника и не зависит от направления в пространстве.

Эти принципы приводят к тому, что события одновременные в классической механике в релятивистской становятся относительными.

Пример: перрон – система K, движущийся вагон со скоростью υ = const – система K'.


y*
y
v
A* B* C*
0*
0
x*
z*
A B C
x
z

Для вагона точки обозначим через A^*, C^* и B^*, причем $A^*B^* = B^*C^*$. В тот момент, когда одноименные точки совпадают, в точках A и C происходят два события, например вспышка света. Из-за изотропности пространства свет от точек A и C дойдет до точки B одновременно.

Наблюдатель же в точке B^*, движущийся в направлении точки C^*, заметит вначале вспышку, произведенную в точке C^* и позднее в точке A^*.

Наблюдатель на Земле, находясь в точке В увидит два пространственно разделенных события, произошедшие одновременно, тогда как наблюдатель в точке B^* заметит, что событие в точках A^* и C^* произойдут не одновременно.

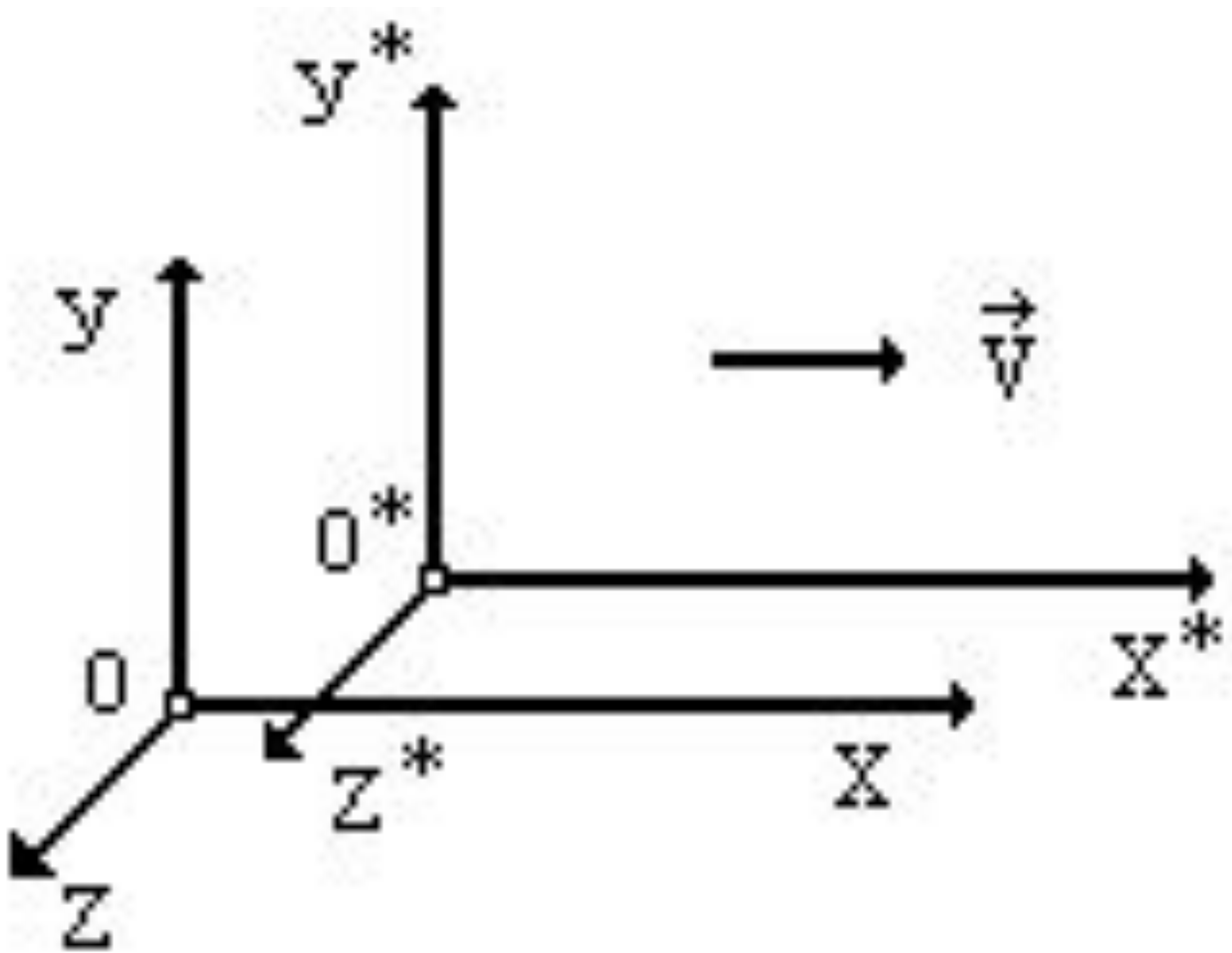
Следовательно, понятие одновременности относительно, т. е. два пространственно разделенных события, одновременные в одной ИСО не будут одновременными в другой ИСО, движущейся относительно первой равномерно и прямолинейно со скоростью $\upsilon = \text{const}$.

Это относится лишь к событиям, между которыми отсутствуют причинно-следственная связь. Причинно связанные события ни в одной ИСО не будут одновременными, так как во всех ИСО событие, являющееся причиной, всегда будет предшествовать следствию.

15. Преобразования Лоренца. Следствия из преобразований Лоренца: сокращение длины движущихся тел и замедление темпа хода движущихся часов. Причинно-следственная связь в СТО.

Для описания движения в СТО используют преобразования Лоренца, позволяющие переходить от координат одной инерциальной системы отсчета к другой, движущейся относительно первой равномерно и прямолинейно и обратно.

Преобразования Лоренца имеют наиболее простой вид в случае, когда сходственные оси декартовых координат неподвижной К и движущейся К' инерциальных систем отсчета попарно параллельны, и если система К' движется относительно системы К равномерно и прямолинейно со скоростью υ = const вдоль, например, оси X.


y*
y
$\vec{v}$
0*
x*
0
z*
x
z

Начало отсчета времени выбирается в тот момент, когда координаты начала 0 и 0' обеих инерциальных систем отсчета К и К' совпадают, т. е. $t = 0$ и $t' = 0$.

С учетом этого преобразования Лоренца записываются в виде:

$$x = \frac{x' + \upsilon t'}{\sqrt{1 - (\upsilon / c)^2}}; \qquad x' = \frac{x - \upsilon t}{\sqrt{1 - (\upsilon / c)^2}};$$

$$y = y'; \qquad y' = y; \qquad z = z'; \qquad z' = z;$$

$$t = \frac{t' + \upsilon x' / c^2}{\sqrt{1 - (\upsilon / c)^2}}; \qquad t' = \frac{t - \upsilon x / c^2}{\sqrt{1 - (\upsilon / c)^2}}.$$

Следствия преобразований Лоренца.

Одновременность событий в разных системах отсчёта.

В системе К в точках x_1 и x_2 происходят одновременно два события в момент времени $t_1 = t_2 = b$;

Но в системе К′ эти события произойдут моменты времени:

$$t_1' = \frac{b - \upsilon x_1 / c^2}{\sqrt{1-(\upsilon / c)^2}}; \qquad t_2' = \frac{b - \upsilon x_2 / c^2}{\sqrt{1-(\upsilon / c)^2}}.$$

Но если события причинно связанные, ни в одной из систем следствие не произойдёт раньше причины.

Промежуток времени между событиями.

Существуют события, вызванные причинно-следственной связью. Например, чтобы камень упал в воду, его нужно бросить.

Бросок является причиной, а падение камня в воду – следствием.
1) сначала происходит событие, являющееся причиной, а затем происходит событие, являющееся следствием первого;
2) если устранить событие, являющееся причиной, то не последует и другого события.

В связи с этим в СТО, хотя время и преобразуется, но последовательность во времени между причиной и следствием сохраняется. Например, в ИСО, связанной с Землей произошел выстрел в момент времени t_1 в точке с координатой x_1, а пуля попала в мишень с координатой x_2 в момент времени t_2.

Тогда скорость пули

$$u = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}.$$

Используя преобразования Лоренца найдем промежуток времени между этими же событиями в ИСО системы К′:

$$t_2' - t_1' = \frac{(t_2 - t_1) - \upsilon(x_2 - x_1)/c^2}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}} =$$

$$= \frac{(t_2 - t_1)}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}\left(1 - \frac{u\upsilon}{c^2}\right),$$

где скорости u и υ << c.

Так как $t_2 > t_1$, то и $t'_2 > t'_1$.

Поэтому

$$t_2' - t_1' = \frac{(t_2 - t_1)}{\sqrt{1-(\upsilon / c)^2}}$$

если событие происходит в одной и той же точке, т. е. $x_1 = x_2$. Следовательно,

$$\Delta t = \Delta t' \sqrt{1-(\upsilon / c)^2},$$

т. е. промежуток времени между двумя событиями имеет меньшее значение в ИСО, связанной с точкой, где происходит событие.
В любой другой ИСО этот временной интервал будет больше.
Вывод: В движущейся ИСО время течёт медленнее.

Промежуток времени Δt – собственное время тела, в системе, где тело покоится. Собственное время всегда меньше, чем время, отсчитанное по часам, движущимся относительно тела. Собственное время – величина инвариантная.

Эксперименты подтвердили полученный результат. Например, время жизни покоящихся мюонов τ ≈ 2 мкс. Мюоны же в потоках космических лучей движутся относительно Земли со скоростью $\upsilon = 0{,}991 \cdot c$ и успевают пролететь расстояние не распадаясь ≈ 6 км, т. е. их время жизни с точки зрения земного наблюдателя в десятки раз больше.

Длина тел в разных системах.

Длина стержня в ИСО равна разности координат его концов. Например, $\lambda = x_2 - x_1$, причем координаты x_1 и x_2 измеряются одновременно (наблюдатель покоится относительно стержня).

Однако результат изменяется, когда наблюдатель и стержень движутся относительно друг друга. Понятие одновременности относительно и события одновременные в одной ИСО не будут одновременны в другой ИСО, поэтому длина стержня будет неодинаковой в различных ИСО.

Для вычисления длины стержня используют преобразования Лоренца.
Например, пусть некоторый стержень расположен параллельно оси *X* в ИСО К, относительно которой он покоится.

В ИСО К′, движущейся относительно ИСО К равномерно и прямолинейно со скоростью υ = const длина этого стержня:

$$\lambda' = x'_2 - x'_1.$$

Используя преобразования Лоренца, имеем

$$x_1 = \frac{x_1' + \upsilon t_1'}{\sqrt{1-(\upsilon / c)^2}}; \quad x_2 = \frac{x_2' + \upsilon t_2'}{\sqrt{1-(\upsilon / c)^2}},$$

то есть

$$\lambda = x_2 - x_1 = \frac{(x_2' - x_1') + \upsilon(t_2' - t_1')}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}$$

Если координаты концов отрезка в ИСО К′ измерены одновременно (так как $t'_2 = t'_1$.), то

$$\lambda = \frac{\lambda'}{\sqrt{1-(v/c)^2}}; \quad \lambda' = \lambda\sqrt{1-(v/c)^2}.$$

λ – собственная длина, длина измеренная в системе, где тело покоится.

Следовательно, длина отрезка в любой ИСО, относительно которой он движется, меньше длины отрезка в неподвижной ИСО.

Однако это не означает, что стержень деформируется в движущейся ИСО.

16. Закон сложения скоростей в СТО. Релятивистский импульс. Энергия релятивистской частицы. Инварианты преобразования Лоренца. Интервал.

Интервал

Любые события характеризуются точкой, где оно произошло, имеющей координаты x, y, z и временем t, т. е. каждое событие происходит в четырехмерном пространстве-времени с координатами x, y, z, t.

В обычной механике рассматривают пространственные координаты отдельно от времени и расстояние между двумя точками

$$\Delta \ell = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

является инвариантной величиной (не изменяется при переходе из одной ИСО в другую ИСО).

В релятивистской механике эта величина не является инвариантной. Приходится учитывать четвёртую величину – время.

В четырёхмерном пространстве-времени вводят понятие интервал:

$$\Delta \Box = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2}$$

Интервал является инвариантом.

Релятивистский закон сложения скоростей:

$$u_x = \frac{u'_{x'} + \upsilon}{1 + \frac{\upsilon u'_{x'}}{c^2}}, \quad u'_{x'} = \frac{u_x - \upsilon}{1 - \frac{\upsilon u_x}{c^2}}.$$

где u_x – скорость м. т. (тела) в ИСО К; $u'_{x'}$ – скорость м. т. (тела) в К′; υ – относительная скорость движения ИСО К и К′. Все эти скорости параллельны оси X.

Для скоростей параллельных осям *Y* и *Z*:

$$u_y = \frac{u'_{y'}\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}{1+\frac{\upsilon u'_{x'}}{c^2}}, \quad u_z = \frac{u'_{z'}\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}{1+\frac{\upsilon u'_{x'}}{c^2}},$$

$$u'_{y'} = \frac{u_y\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}{1-\frac{\upsilon u_x}{c^2}}, \quad u'_{z'} = \frac{u_z\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}{1-\frac{\upsilon u_x}{c^2}}.$$

Релятивистский импульс в виде

$$\vec{p} = m_0 \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

обеспечивает инвариантность закона сохранения импульса по отношению к преобразованиям Лоренца, здесь $d\vec{r}$ – перемещение частицы (материальной точки) в той ИСО, в которой определяется её импульс; dt – время, определяемое по часам, движущихся вместе с частицей (собственное время).

Так как,

$$\mathrm{d}t = \mathrm{d}t'\sqrt{1-(\upsilon/c)^2},$$

то

$$\vec{p} = \frac{m_0\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t'\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}$$

где

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t'} = \vec{\upsilon}.$$

Следовательно, релятивистский импульс частицы

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{\upsilon}}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}$$

Уравнение динамики

$$\vec{F} = m_0 \frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t} = m_0 \vec{a} = \frac{m_0}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}} \vec{a}$$

Энергия

Энергия покоя

$$E_0 = m_0c^2,$$

Энергия релятивистской частицы

$$E = E_0 \frac{1}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}$$

m_0 – масса покоя.

Кинетическая энергия релятивистской частицы

$$T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}} - m_0 c^2 = E - E_0$$

$$p^2 c^2 = T\left(T + 2m_0 c^2\right)$$

200

Полная энергия

$$E = c\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2} = m_0 c^2 \sqrt{1 + \left(p/m_0 c\right)^2}$$

$$E \approx m_0 c^2 + p^2 \big/ 2m_0 = m_0 c^2 + T$$

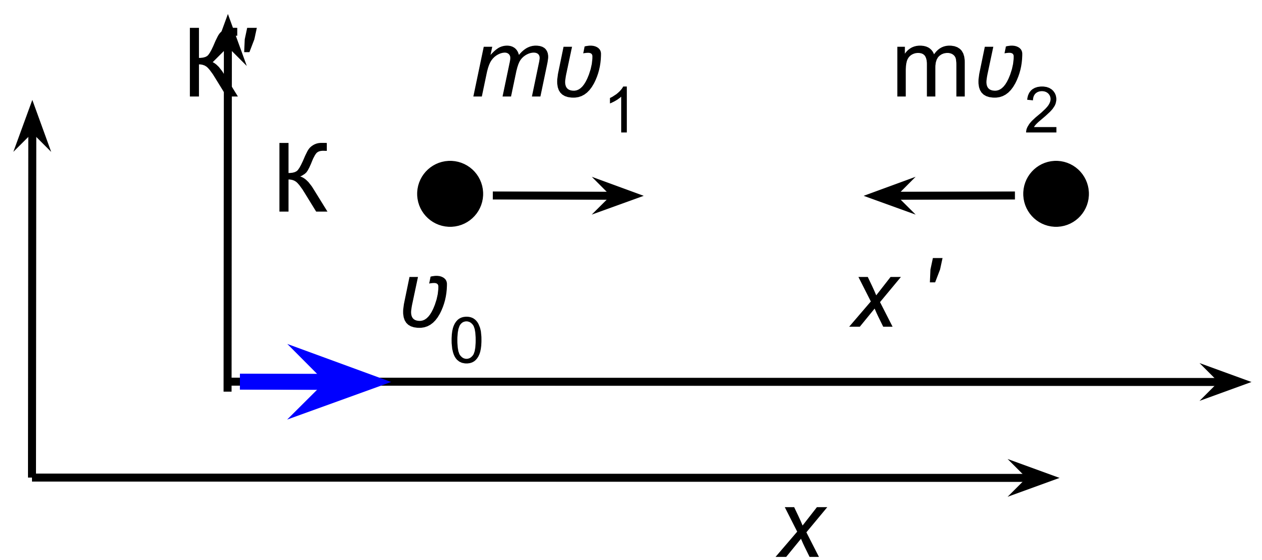
Инварианта энергии и импульса

$$E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4 = \text{inv}$$

$$\frac{E^2}{c^2} - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = m_0^2c^2 = \text{inv}$$

Величина E/c, p_x, p_y, p_z образует четырёхвектор (вектор энергии-импульса).

Рассмотрим неупругое соударение двух тел массой m каждое. Относительно системы К′ тела движутся навстречу друг другу со скоростью $\upsilon_1 = -\upsilon_2 = \upsilon_0$.



200

Система К′ движется относительно системы К со скоростью υ_0.
В системе К′

$$p_1' - p_2' = 0$$

В системе К

$$p_1 - p_2 = p_1, \quad p_2 = 0.$$

Согласно переходу

$$\upsilon_{1x} = \frac{\upsilon'_{1x'} + \upsilon_0}{1 + \frac{\upsilon_0 \upsilon'_{1x'}}{c^2}} = \frac{\upsilon_0 + \upsilon_0}{1 + \frac{\upsilon_0 \upsilon_0}{c^2}} = \frac{2\upsilon_0}{1 + \frac{\upsilon_0^2}{c^2}}$$

$$\upsilon_{2x} = \frac{-\upsilon_0 + \upsilon_0}{1 + \frac{-\upsilon_0 \upsilon_0}{c^2}} = 0$$

импульс до удара будет

$$m\upsilon_{1x} + m\upsilon_{2x} = \frac{2m\upsilon_0}{1 + \upsilon_0^2 / c^2}$$

200

Или

$$p_1 = \frac{m\upsilon_1}{\sqrt{1-(\upsilon_1/c)^2}}$$

заменяя скорость υ_1 на υ_0:

$$p_1 = \frac{m\upsilon_1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\upsilon_1}{c}\right)^2}} = \frac{2m\left(\upsilon_0 \big/ \left(1+\upsilon_0^2/c^2\right)\right)}{\sqrt{1-\dfrac{(\upsilon_0/c)^2}{1+\upsilon_0^2/c^2}}} = \frac{m\upsilon_0}{1-\left(\dfrac{\upsilon_0}{c}\right)^2}$$

Но должно быть

$$p = \frac{2m\upsilon_0}{\sqrt{1-(\upsilon_0/c)^2}}$$

Такой результат получили, так как не учли массу системы

$$M = \frac{2m}{\sqrt{1-(\upsilon_0/c)^2}}, \quad 2m = M\sqrt{1-(\upsilon_0/c)^2}.$$

Это обусловлено тем, что кинетическая энергия частиц превратилась в эквивалентное количество энергии покоя, а это в свою очередь привело к возрастанию массы на $\Delta m = \Delta E_0/c^2$. Изменение массы связано с энергией. Сама же масса является инвариантной величиной.

200

ЛЕКЦИЯ № 6

Элементы механики твёрдого тела.

ВОПРОСЫ

17. Условия равновесия твёрдого тела. Мгновенная ось вращения.

18. Кинетическая энергия вращающегося твёрдого тела. Работа момента силы.

19. Основной закон динамики вращательного движения твёрдого тела. Момент инерции, его свойства. Теорема Штейнера (теорема о параллельных осях).
20. Закон сохранения момента импульса изолированной системы. Изотропность пространства и закон сохранения момента импульса. Гироскоп.

17. Условия равновесия твёрдого тела. Мгновенная ось вращения.

В случае описания положения и/или движения материальной точки достаточно 3-х степеней свободы. Степень свободы – число независимых координат, требующихся для однозначного определения положения тела.

Для абсолютно твёрдого тела (тело, деформациями которого можно пренебречь) необходимо 6 степеней свободы: 3 – положение в пространстве, 3 – ориентация в пространстве.
Запишем уравнения твёрдого тела в векторном виде
(2 уравнения вместо 6).

Уравнение динамики движения центра масс

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t}=\vec{F}_{\text{внеш}}$$

Уравнение динамики вращательного движения

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\vec{M}_{\text{внеш}}$$

Если $F_{\text{внеш}}$ и $M_{\text{внеш}}$ равны нулю, то тело будет находиться в равновесии.

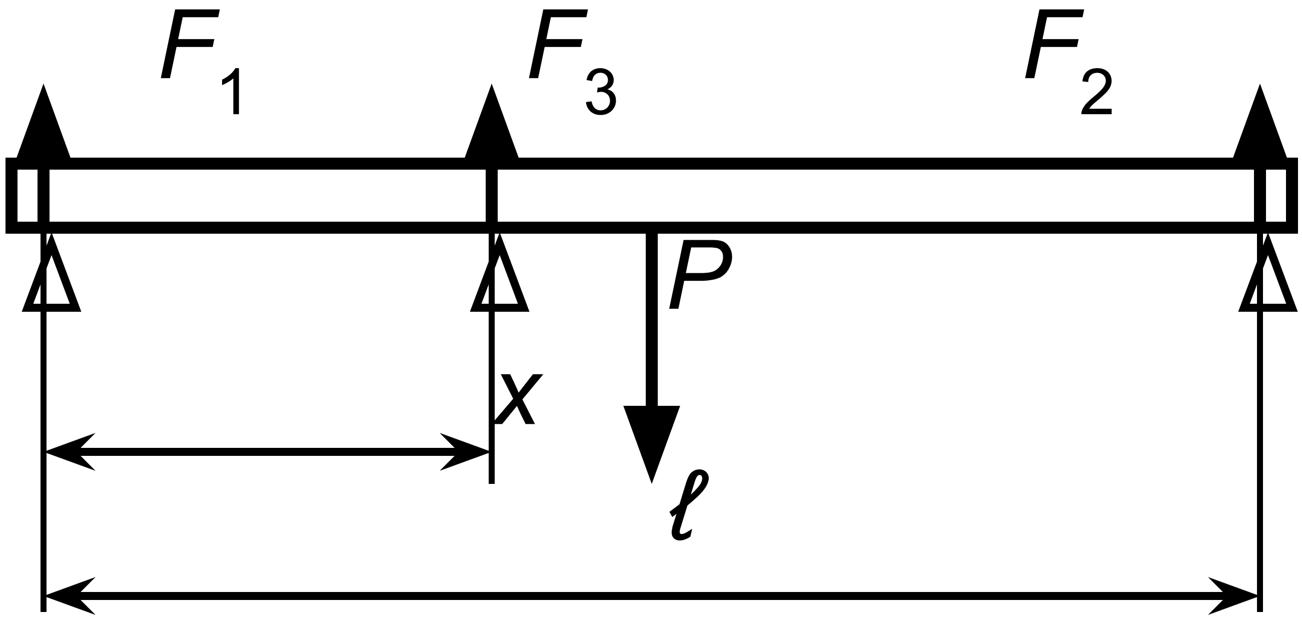
Условия равновесия твёрдого тела:

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F}_{\text{внеш}} = 0, \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{\text{внеш}} = 0.$$

Не всегда можно пользоваться моделью абсолютно твёрдого тела. Пример: рассмотрим балку на 3-х опорах. Для данной системы можно записать только два уравнения равновесия

$$F_1 + F_2 + F_3 = P,$$

$$F_2 \cdot \ell + F_3 \cdot x = P \cdot \ell \cdot 1/2.$$



Здесь два уравнения и три неизвестных: F_1, F_2, F_3 .

Данная задача оказалась неопределённой, решить её можно, если придать одной из сил произвольное значение. Механические системы, подобные данной, называются статически неопределёнными.

Физики про себя шутят: если им дать задачу о равновесии стола на 4 ножках, то они, почти сразу, выдадут ответ о столе на 1 ножке, спустя некоторое время о столе с бесконечным числом ножек, и будут бесконечно долго решать задачу о равновесии стола на 4 ножках.

Любое движение твёрдого тела может быть представлено как наложение двух типов движения: поступательного и вращательного; соответственно скорость тела можно представить в виде

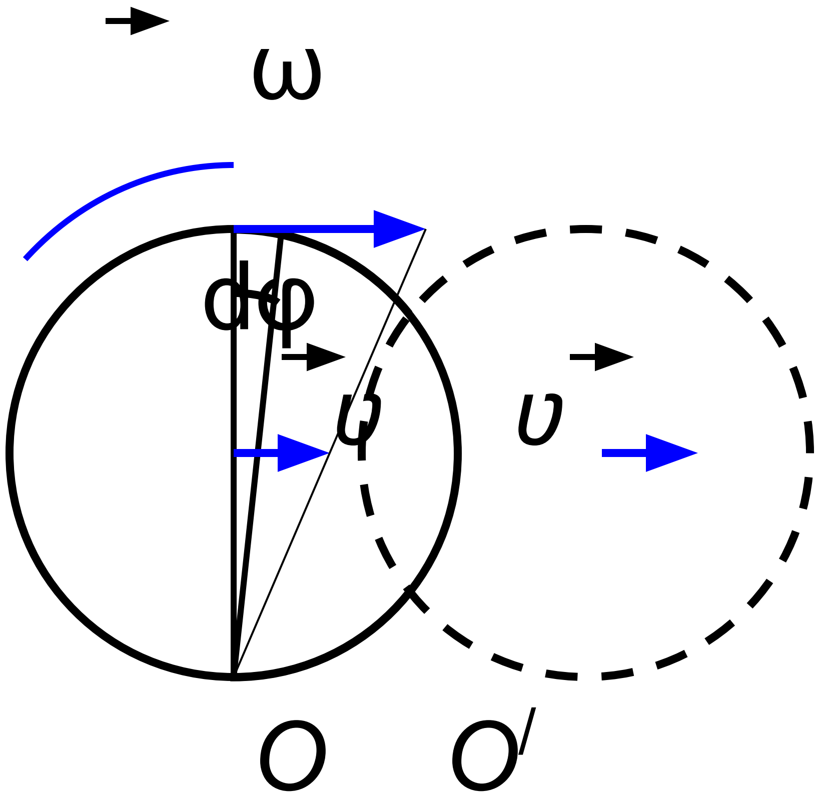
$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{\upsilon}' = \vec{\upsilon}_0 + \left[\vec{\omega} \times \vec{r}\right]$$

υ_0 – поступательная скорость, υ' – скорость, обусловленная вращением

$$\vec{\upsilon}' = \left[\vec{\omega} \times \vec{r}\right]$$

Элементарное перемещение твёрдого тела при плоском движении всегда можно представить как поворот вокруг некоторой оси, называемой мгновенной осью вращения. Мгновенная ось может находиться как в самом теле, так и вне его. Мгновенная ось меняет своё положение относительно тела и относительно неподвижной системы отсчёта.

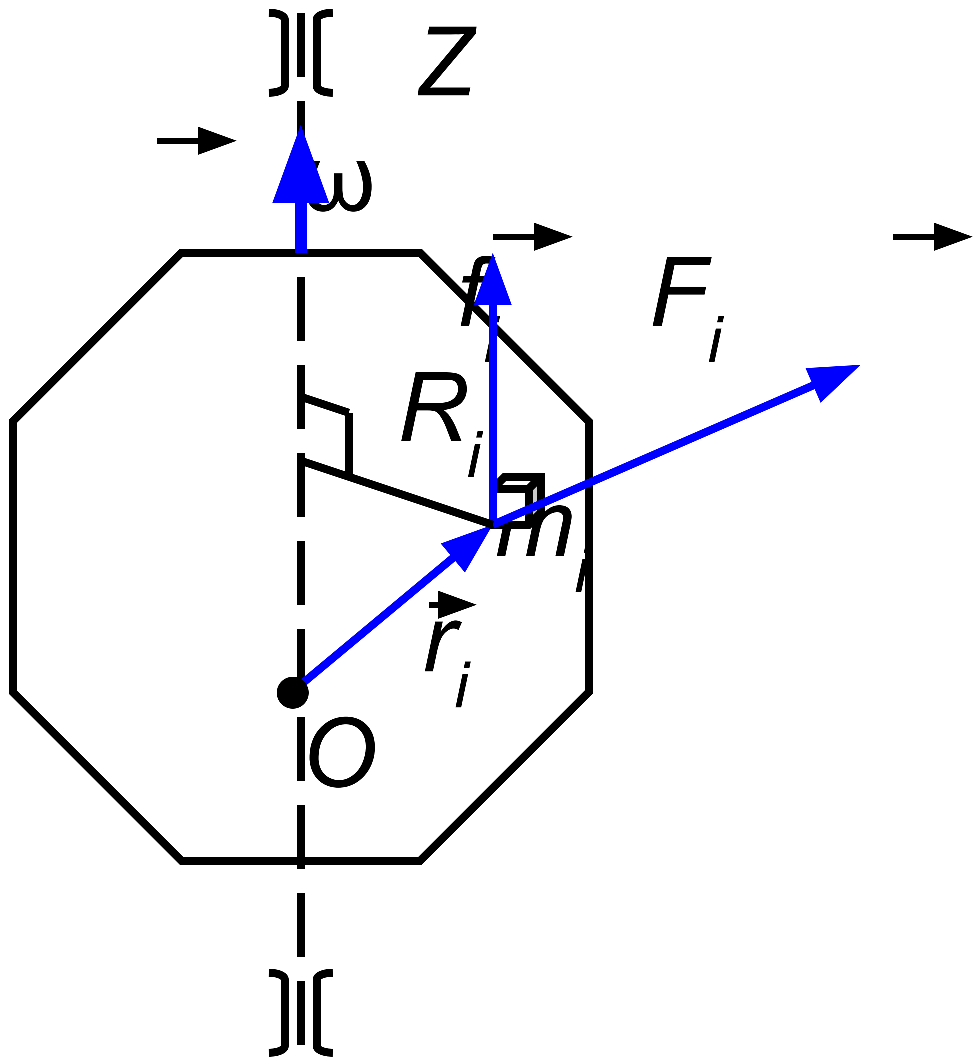
Пример: катящийся цилиндр. Плоское движение твёрдого тела можно рассматривать как ряд последовательных элементарных вращений вокруг мгновенных осей. Пример неплоского движения: пропеллер самолёта совершает вращение вокруг своей оси и поступательное движения вдоль этой оси.



ω
dφ
υ
υ
O
O/

18. Кинетическая энергия вращающегося твёрдого тела. Работа момента силы.

Получим выражение для кинетической энергии вращающегося тела. Рассмотрим вращение тела вокруг неподвижной оси Z. Линейная скорость элементарной массы m_i равна $\upsilon_i = \omega R_i$, R_i – расстояние от массы m_i до оси Z, ω – угловая скорость вращения.


Z
ω
f
F
i
R
i
m
i
r
i
O

Кинетическая энергия элементарной массы m_i:

$$E_{ki} = T_i = \frac{m_i \upsilon_i^2}{2} = \frac{1}{2} m_i \omega^2 R_i^2$$

Кинетическая энергия всего тела:

$$T = \sum T_i = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i m_i R_i^2 = \frac{1}{2} \omega^2 I = \frac{I \omega^2}{2}$$

Рассмотрим силы, действующие на элементарную массу m_i: внешние F_i, внутренние f_i (эти силы перпендикулярны оси вращения, иначе будет сдвиг вдоль оси Z). Сумма моментов внутренних сил равна нулю. Суммарный момент внешних сил приведёт к совершению работы.

$$\mathrm{d}A = \sum \left[\vec{r}\vec{F}\right]\cdot\vec{\omega}\,\mathrm{d}t = \vec{M}\vec{\omega}\,\mathrm{d}t = M_{\omega}\omega\,\mathrm{d}t = M_{\omega}\,\mathrm{d}\varphi$$

С другой стороны, работа внешних сил идёт на приращение кинетической энергии вращения:

$$\mathrm{d}A = \mathrm{d}T = \mathrm{d}\left(\frac{I\omega^2}{2}\right) = I\vec{\omega}\,\mathrm{d}\vec{\omega} =$$

$$= I\vec{\omega}\vec{\varepsilon}\,\mathrm{d}t = \vec{M}\vec{\omega}\,\mathrm{d}t$$

Так, мяч или обруч, брошенный горизонтально без вращения, раскрутится. Кинетическая энергия вращения получится за счёт действия силы трения, точнее за счёт действия пары сил: силы трения и силы инерции. Произойдёт частичный переход энергии кинетической энергии поступательного движения в кинетическую энергию вращения.

И наоборот, раскрученный обруч, опущенный на горизонтальную опору, приобретёт горизонтальную скорость за счёт работы силы трения. При движении без проскальзывания выполняется соотношение: $\upsilon = \omega R$. Если сила трения равна нулю, то в первом случае тело будет скользить без вращения, во втором – крутиться на одном месте.

Теперь вычислим кинетическую энергию, поступательную и вращательную при плоском движении.

Скорость *i*-й элементарной массы

$$\vec{\upsilon}_i = \vec{\upsilon}_0 + \left[\vec{\omega} \times \vec{r}_i\right]$$

υ0 – поступательная скорость некоторой точки О, связанной с телом, например, центра масс.

r_i – радиусвектор *i*-й элементарной массы относительно точки О.

Получим выражение для кинетической энергии твёрдого тела:

$$E_{ki} = T_i = \frac{m_i \upsilon_i^2}{2} = \frac{1}{2} m_i (\vec{\upsilon}_0 + [\vec{\omega} \times \vec{r}_i])^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m_i \left(\upsilon_0^2 + 2\vec{\upsilon}_0 [\vec{\omega} \times \vec{r}_i] + [\vec{\omega} \times \vec{r}_i]^2 \right),$$

Отметим следующее:

$$\left[\vec{\omega} \times \vec{r}_i\right] = \omega \cdot R_i$$

R_i – расстояние от точки с массой m_i до оси вращения.

$$2\vec{\upsilon}_0\left[\vec{\omega} \times \vec{r}_i\right] = 2\left[\vec{\upsilon}_0 \times \vec{\omega}\right]\vec{r}_i$$

Запишем кинетическую энергию всего тела с учётом приведённых замечаний:

здесь $\Sigma m_i = m$ – масса всего тела,

$$\sum m_i \vec{r}_i = m\vec{r}_c$$

если в качестве точки О взять центр масс, то $r_c = 0$.

Момент инерции относительно центра масс (наименьший при данной ориентации):

$$\sum m_i R_i^2 = I_0 \Rightarrow I_c$$

В итоге получили выражение кинетической энергии поступательного и вращательного движения (ось вращения проходит через центр масс):

$$E_k = T = \frac{m\upsilon_c^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2}$$

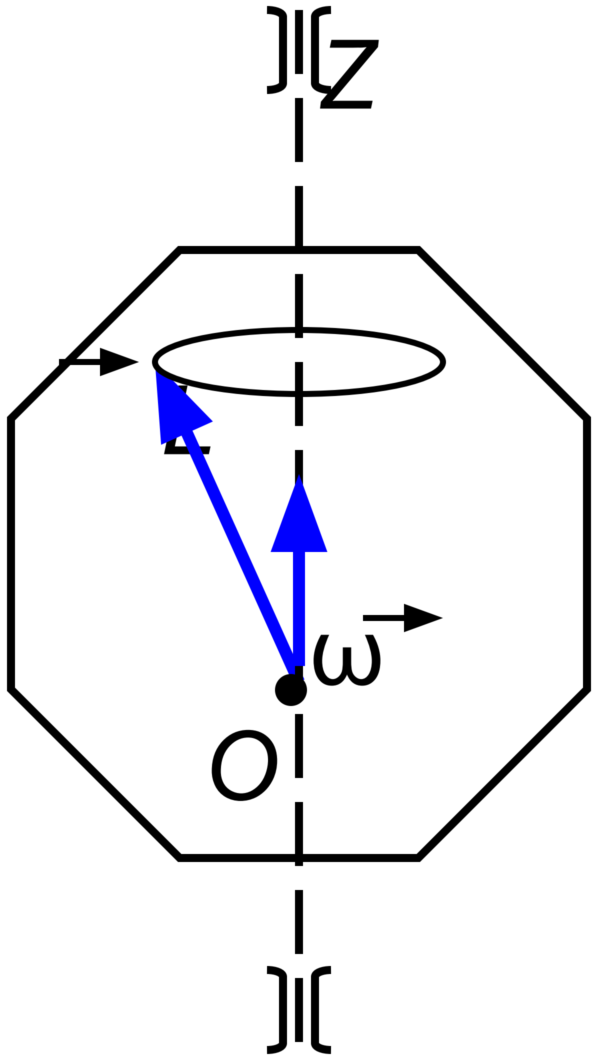
19. Основной закон динамики вращательного движения твёрдого тела. Момент инерции, его свойства. Теорема Штейнера (теорема о параллельных осях).

Рассмотрим вращение тела вокруг неподвижной оси

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{M}_{\text{внеш}}$$

$$\frac{\mathrm{d}L_Z}{\mathrm{d}t} = \sum M_{Z\text{внеш}} = I\varepsilon_Z$$

В общем случае вектор *L* не совпадает по направлению с осью вращения *Z* и поворачивается вместе с телом вокруг этой оси, описывая конус.



200

В случае однородного тела, симметричного относительного оси вращения, момент импульса относительно точки О, лежащей на оси вращения, совпадает по направлению с осью. В этом случае

$$|L| = |L_Z| = \omega I$$

случай вращения вокруг оси симметрии,

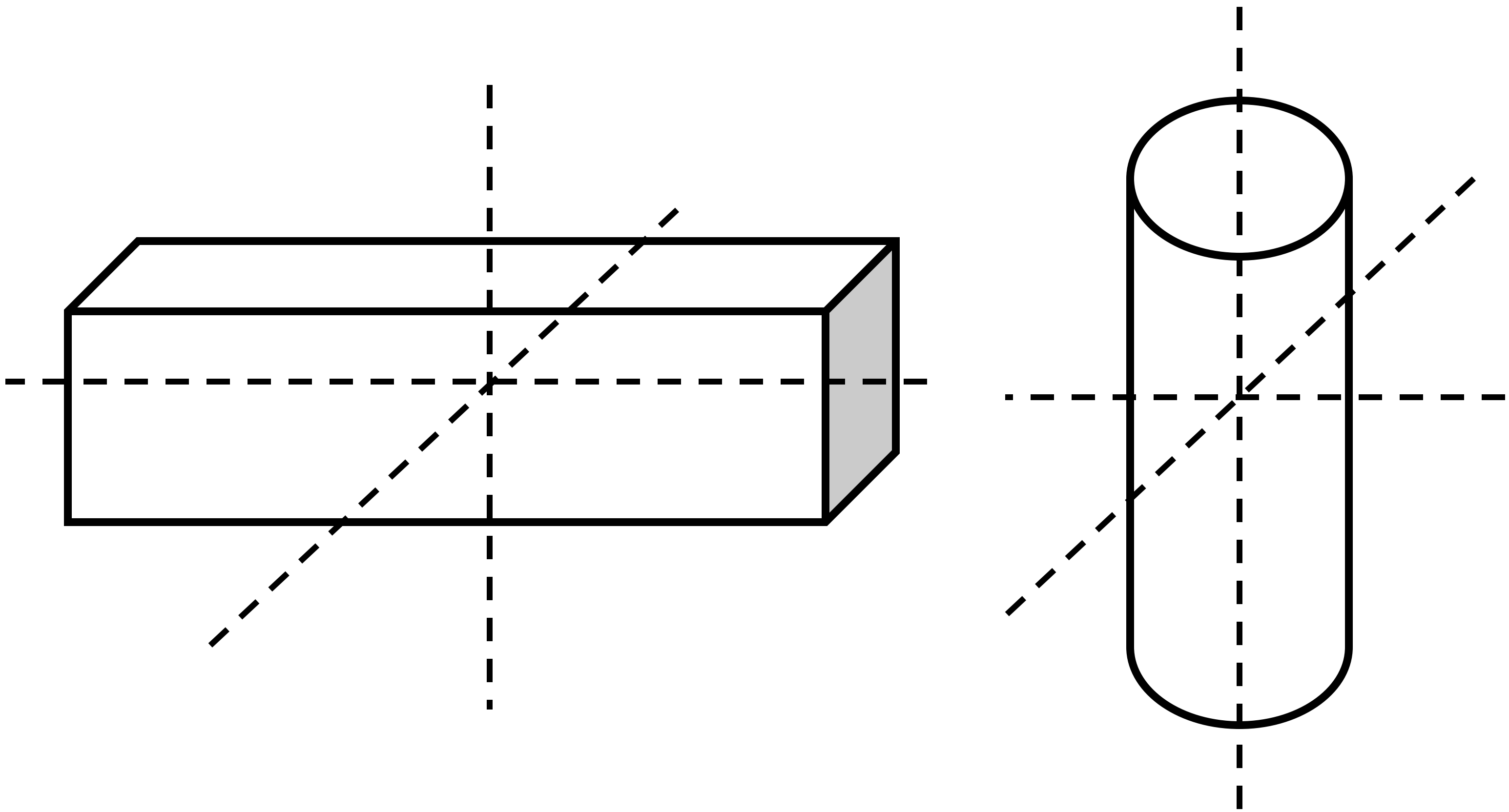
$$L_Z = \omega_Z I$$

в общем случае.

Момент инерции зависит от выбора оси.

Свободная ось – ось, положение которой в пространстве остаётся неизменным при вращении вокруг неё тела в отсутствии внешних сил.

Главные оси – для любого тела существует 3 взаимно перпендикулярных свободных оси, проходящие через центр масс.



Вычислим момент инерции однородного шара. Разобьём его на бесконечно тонкие сферические слои толщиной dr.

Масса шара m. Радиус шара R.

Масс сферического слоя

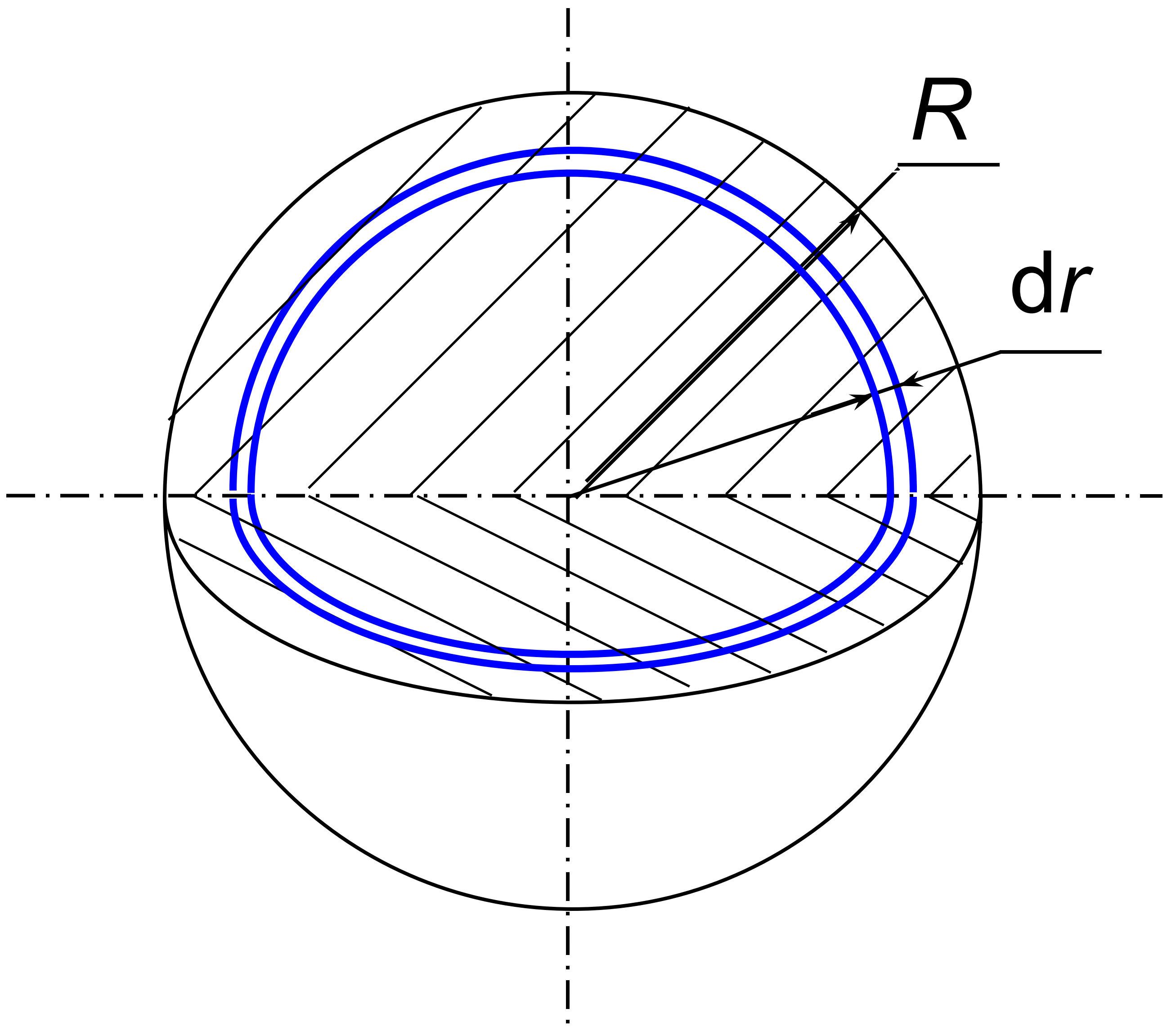
dm = m · dV/V.

Объём сферического слоя

dV = $4\pi r^2$ · dr.

Момент инерции сферического слоя

dI = 2/3 dm · r.



200

Момент инерции шара складывается из моментов инерции сферических слоёв:

$$I=\int_0^R \mathrm{d}I=\int_0^R \frac{2}{3}r^2\mathrm{d}m=\int_0^R 2m\frac{r^4}{R^3}\mathrm{d}r=$$

$$=\frac{2m}{R^3}\int_0^R r^4\mathrm{d}r=\frac{2m}{R^3}\cdot\frac{r^5}{5}\bigg|_0^R=\frac{2}{5}mR^2$$

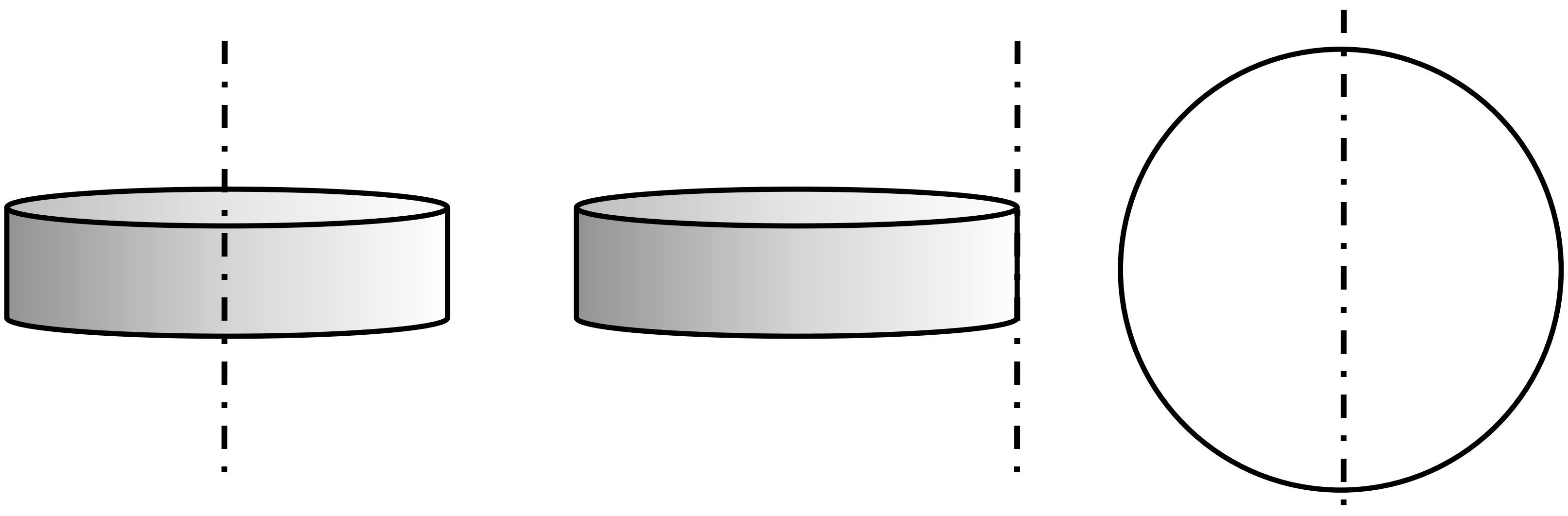
Если происходит параллельный перенос оси вращения, то момент инерции увеличивается, согласно теореме Штейнера:

$$I = I_c + ma^2$$

I_C – момент инерции тела, относительно оси, проходящей через центр масс, это минимальный момент инерции при данной ориентации, *m* – масса тела, *a* – расстояние между осями.

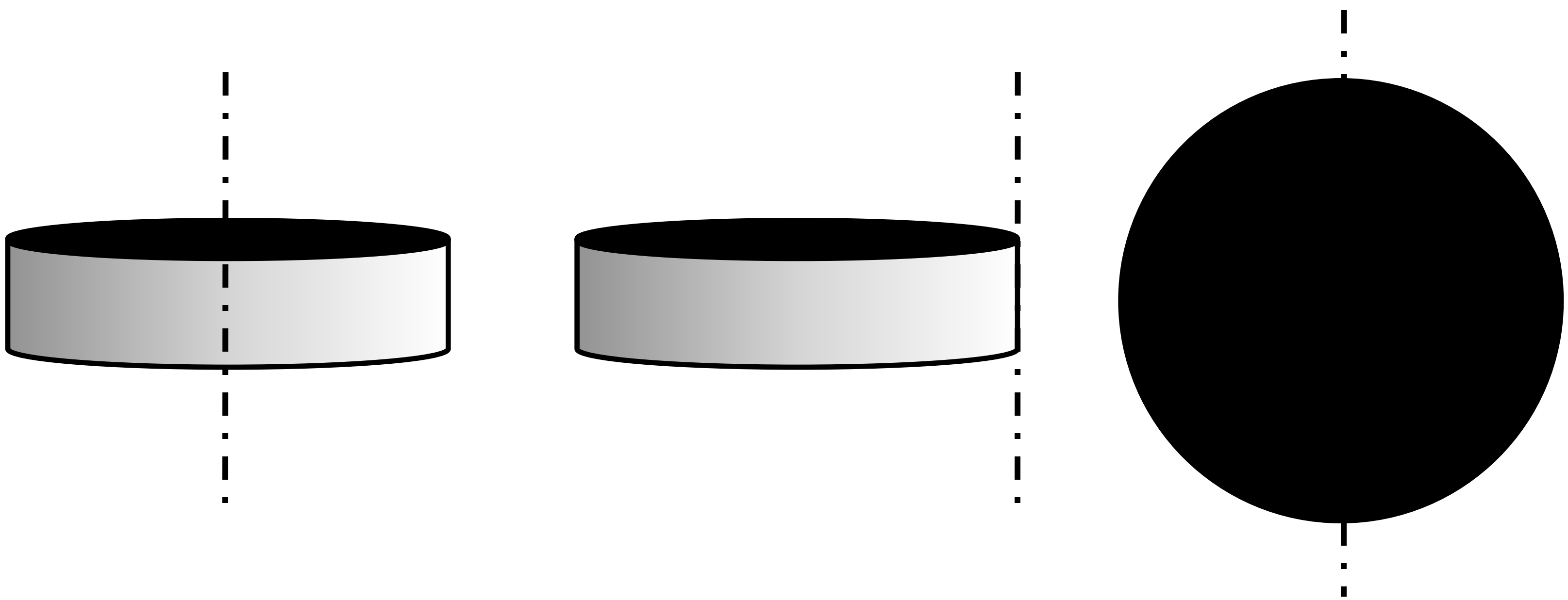
Моменты инерции:
момент инерции кольца (обруча)

$$mR^2 \qquad 2mR^2 \qquad \frac{mR^2}{2}$$



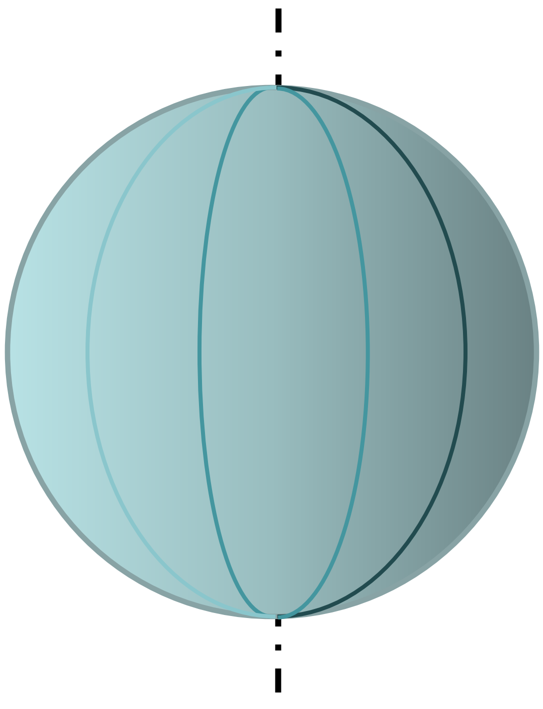
Момент инерции диска

$$\frac{mR^2}{2} \qquad \frac{3mR^2}{2} \qquad \frac{mR^2}{4}$$

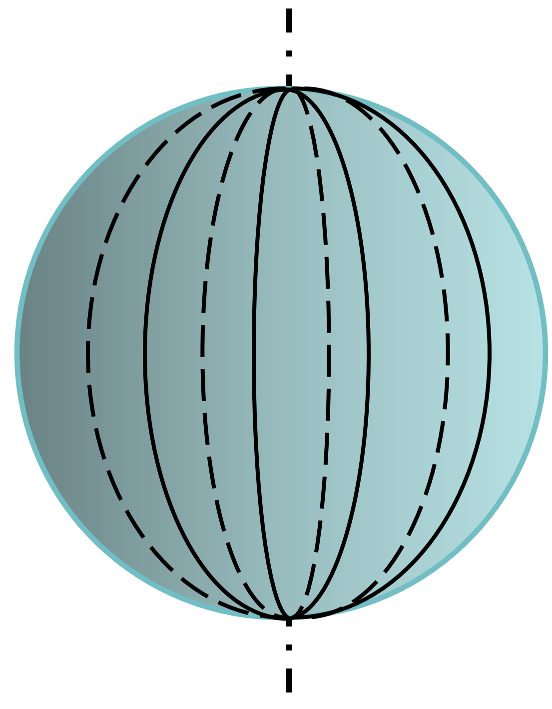


Момент инерции шара и сферы

$$\frac{2}{5}mR^2$$



$$\frac{2}{3}mR^2$$

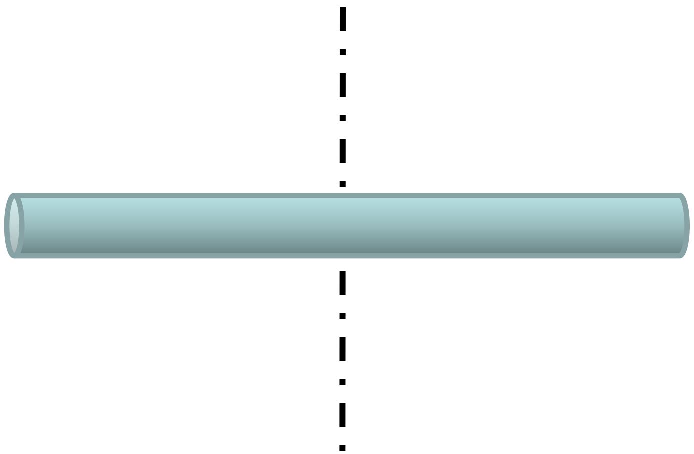


200

Момент инерции стержня

$$\frac{1}{12}mL^2$$

$$\frac{1}{3}mL^2$$



20. Закон сохранения момента импульса изолированной системы. Изотропность пространства и закон сохранения момента импульса. Гироскоп.

Из основного уравнения динамики вращательного движения

$$\dot{\vec{L}} = \vec{M}$$

Можно получить закон сохранения момента импульса (аналогично закону сохранения импульса).

В замкнутой системе (M = 0) суммарный момент импульса остаётся постоянным.

$$\vec{L} = \mathrm{const}$$

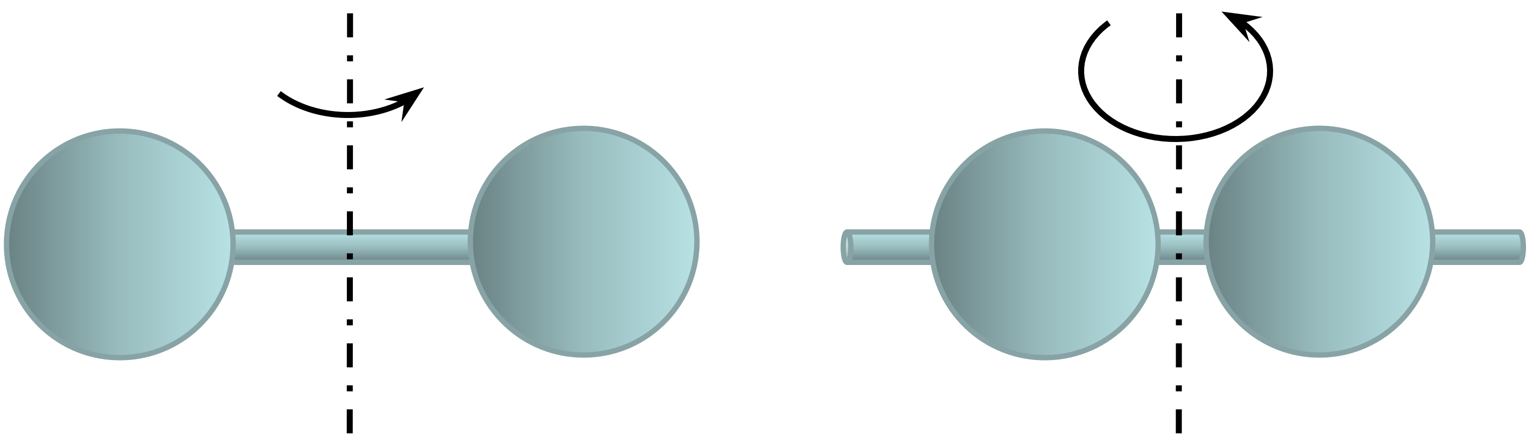
143

Пространство однородно, следовательно, параллельный перенос системы из одного места в другое не изменяет свойств системы – закон сохранения импульса нарушаться не будет.

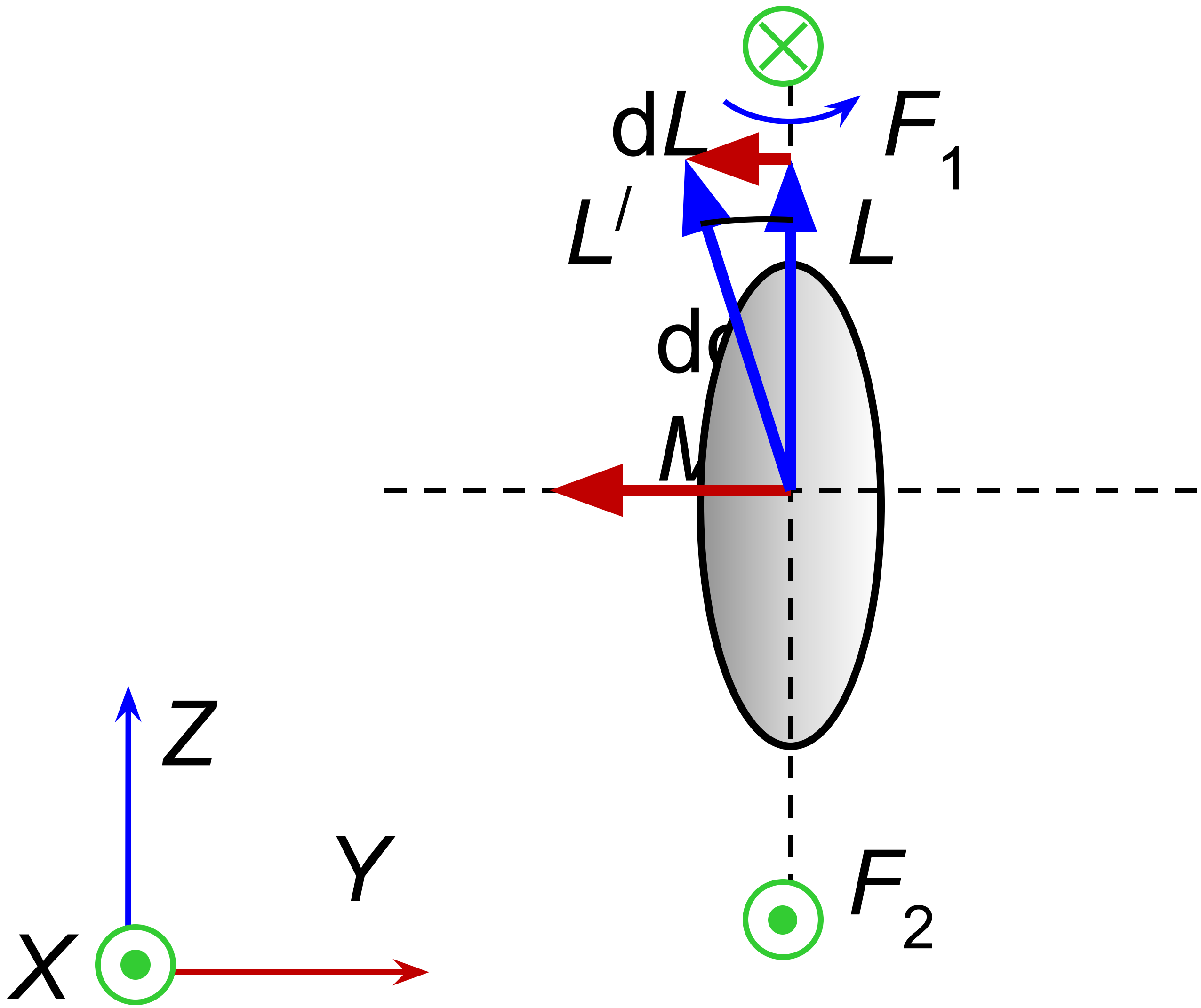
Пространство изотропно, следовательно, поворот замкнутой системы как целого не отражается на её механических свойствах – закон сохранения момента импульса нарушаться не будет.

Как правило, момент инерции не изменяется (I = const), следовательно, в силу закона сохранения импульса угловая скорость тоже остаётся постоянной ω = const.

Если же момент инерции можно изменять, то угловая скорость тоже изменяется. Например, можно увеличить скорость вращения стержня, перемещая грузы на стержне к оси вращения.



Гироскоп (волчок) – массивное симметричное тело, вращающееся с большой скоростью вокруг оси симметрии (ось гироскопа).
При попытке вызвать поворот гироскопа наблюдается гироскопический эффект: поворот вокруг оси параллельной направлению действия сил, т.е. перпендикулярно оси поворота.



200

Пара сил F_1 и F_2 ($F_1 = F_2$) перпендикулярны плоскости рисунка (ось X), пытаются повернуть тело (или придать вращение) вокруг горизонтальной оси (ось Y), момент сил M направлен влево, следовательно, приращение момента импульса dL будет также направлено влево.

Поскольку момент импульса L был направлен вертикально вверх (ось Z), а его приращение направлено влево, то получается что вектор момента импульса L, будет поворачиваться вокруг оси X против часовой стрелки (вектор L переходит в вектор L').

В самом деле

$$\mathrm{d}\vec{L} = \vec{M} \cdot \mathrm{d}t, \quad \mathrm{d}\vec{L} \uparrow\uparrow \vec{M},$$

$$\vec{L}' = \vec{L} + \mathrm{d}\vec{L}.$$

Угол поворота и угловая скорость поворота оси вращения:

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\left|\mathrm{d}L\right|}{L} = M\,\frac{\mathrm{d}t}{L}$$

$$\omega' = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{M}{L} \Rightarrow \vec{M} = \left[\vec{\omega}' \times \vec{L}\right].$$

Момент силы, вызывающий поворот оси гироскопа, угловая скорость поворота и момент инерции связаны следующим выражением

$$\vec{M} = \left[\vec{\omega}, \vec{L}\right]$$

Например, волчок, раскрученный в поле тяжести Земли будет испытывать поворот оси вращения. В поле сил тяжести ось гироскопа с неподвижной точкой поворачивается вокруг вертикальной оси, описывая конус. Такое движение называется прецессией.

ЛЕКЦИЯ № 7

Элементы динамики сплошных сред.

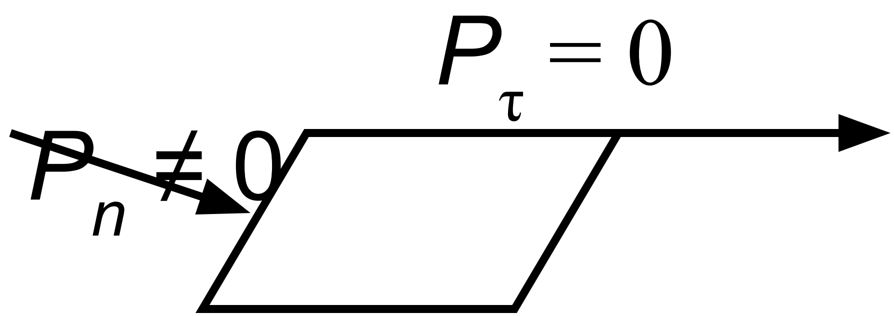
ВОПРОСЫ

21. Элементы гидродинамики. Идеальная несжимаемая жидкость. Уравнение неразрывности струи. Уравнение Бернулли. Основное уравнение гидростатики. Уравнение Эйлера.

22. Течение вязкой несжимаемой жидкости в трубе. Формула Пуазейля. Ламинарное и турбулентное течение.

Основные определения

С точки зрения механики жидкости и газы могут быть определены как такие среды, в которых при равновесии касательные напряжения существовать не могут.

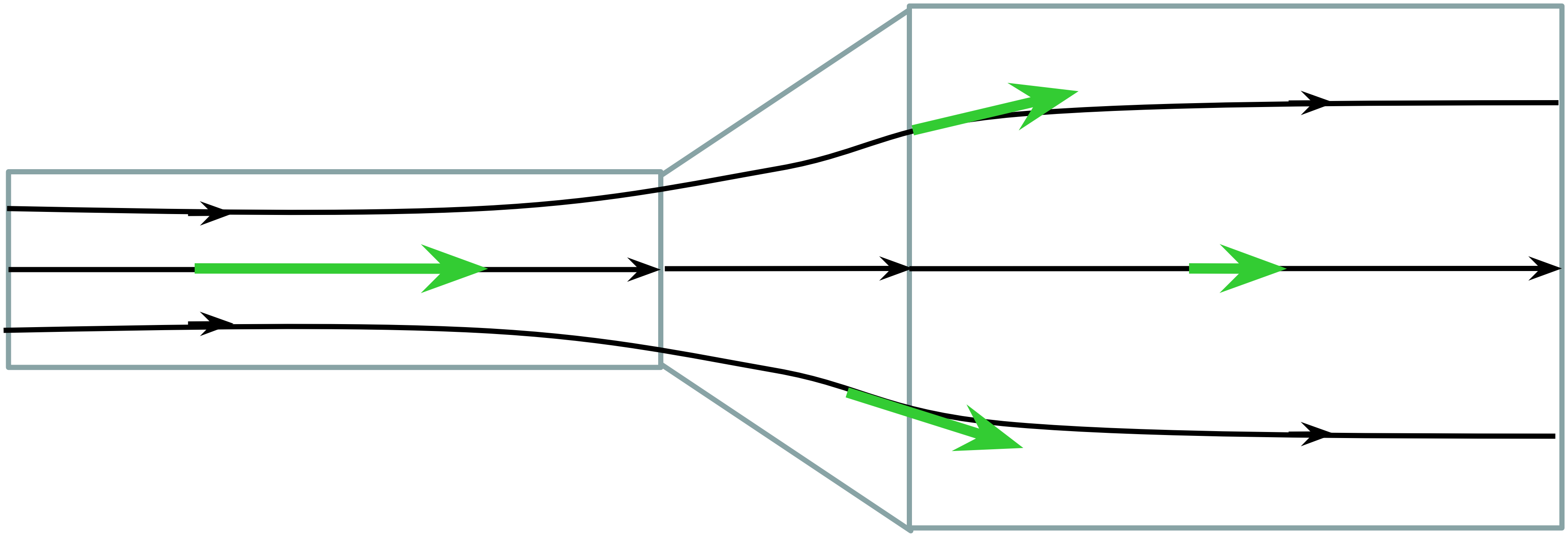


Газы занимают весь предоставленный объём. Жидкость обладает собственным объёмом, который изменяется лишь незначительно с изменением внешнего давления.

Идеальная жидкость – жидкость, в которой внутреннее трение (вязкость) полностью отсутствует.

Для описания движения жидкости указывают для каждой точки пространства вектор скорости как функцию времени.

Совокупность векторов υ, заданны для всех точек пространства, образует поле вектора скорости. Линии тока – линии, касательные к которым совпадают с векторами υ. Густота линий пропорциональна модулю скорости.
Стационарное течение – если вектор скорости в каждой точке остаётся постоянным.



Векторные поля

Градиент – вектор, направленный в сторону наибольшего изменения поля.

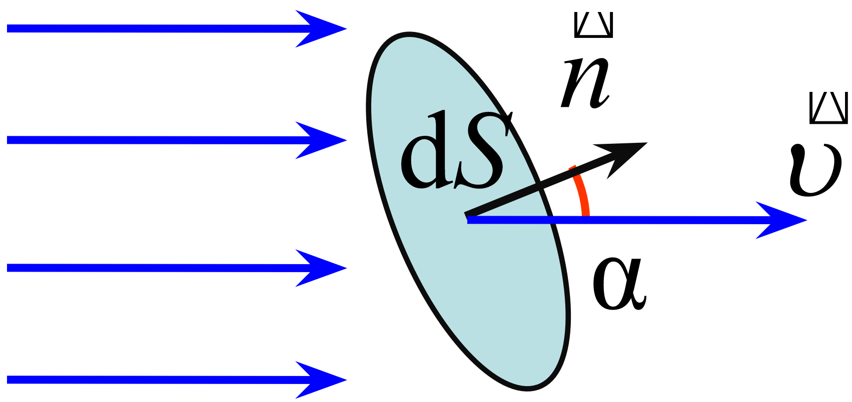
Если каждой точке *P* с координатами *x*, *y*, *z*, сопоставляется значение скалярной величины φ = φ(*x*, *y*, *z*), говорят, что задано скалярное поле φ.

$$\operatorname{grad}\varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{k} \right)$$

Поток вектора

$$\Delta\Phi = \upsilon \Delta S \cos\alpha,$$

$$\mathrm{d}\Phi = \upsilon \mathrm{d}S \cos\alpha = \vec{\upsilon}\,\mathrm{d}S\vec{n}$$



Можно сравнить с потоком жидкости:

$$\Delta\Phi = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \Delta S \cos\alpha \cdot \upsilon \cdot \Delta t \cdot \frac{1}{\Delta t}$$

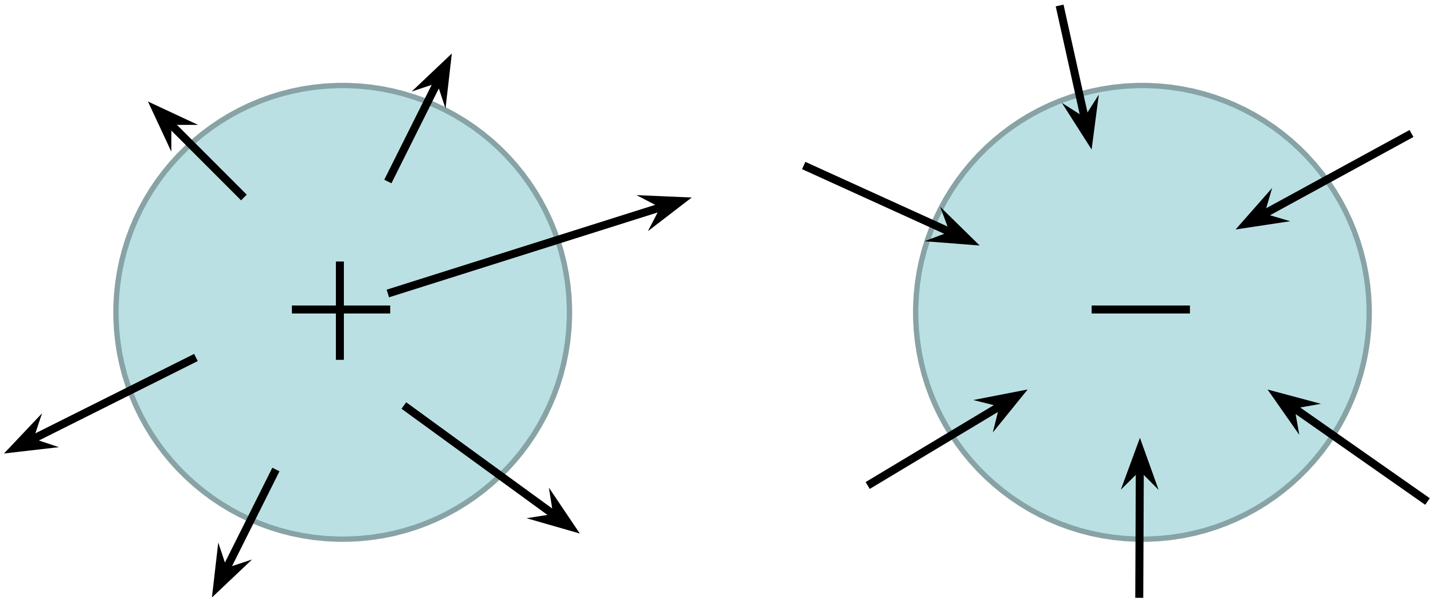
Поток вектора «*a*» через поверхность *S*

$$\Phi_a = \int_S \vec{a}\,\mathrm{d}S\vec{n} = \int_S a_n \mathrm{d}S$$

Если вектор входит в область, ограниченную поверхностью *S*, то ставят знак «+», если выходит – ставят знак «–».

200

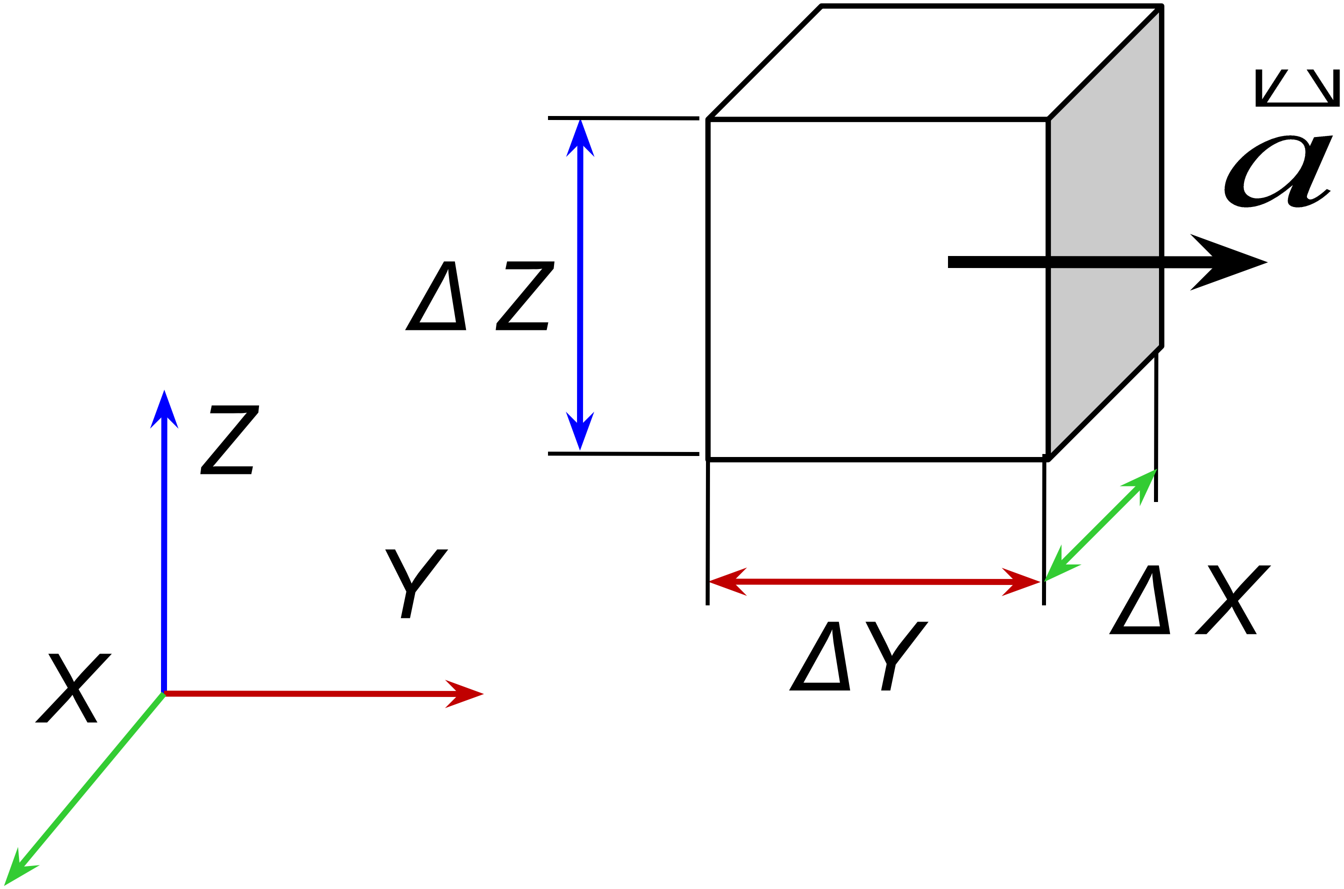
Дивергенция (divergentia (лат) - расхождение) – величина, численно равная плотности точек, в которых начинаются (+)
либо оканчиваются (–) линии поля.



$$\operatorname{div} a = \frac{\Phi_a}{V},$$

$$\operatorname{div} a = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oint_S \vec{a}\, \mathrm{d}S.$$

Рассмотрим дивергенцию некоторой точки с точки зрения трёхмерного пространства. Выделим некоторую точку, объём которой равен $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$.



200

$$\Phi_a = a_x \cdot \Delta y \Delta z + a_y \cdot \Delta x \Delta z + a_z \cdot \Delta x \Delta y =$$

$$= \left(\frac{a_x}{\Delta x} + \frac{a_y}{\Delta y} + \frac{a_z}{\Delta z} \right) \Delta V \Rightarrow$$

$$\Phi_a = \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) \Delta V$$

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\Phi_a}{\Delta V} = \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right)$$

Теорема Остроградского-Гаусса (Теорема Гаусса):

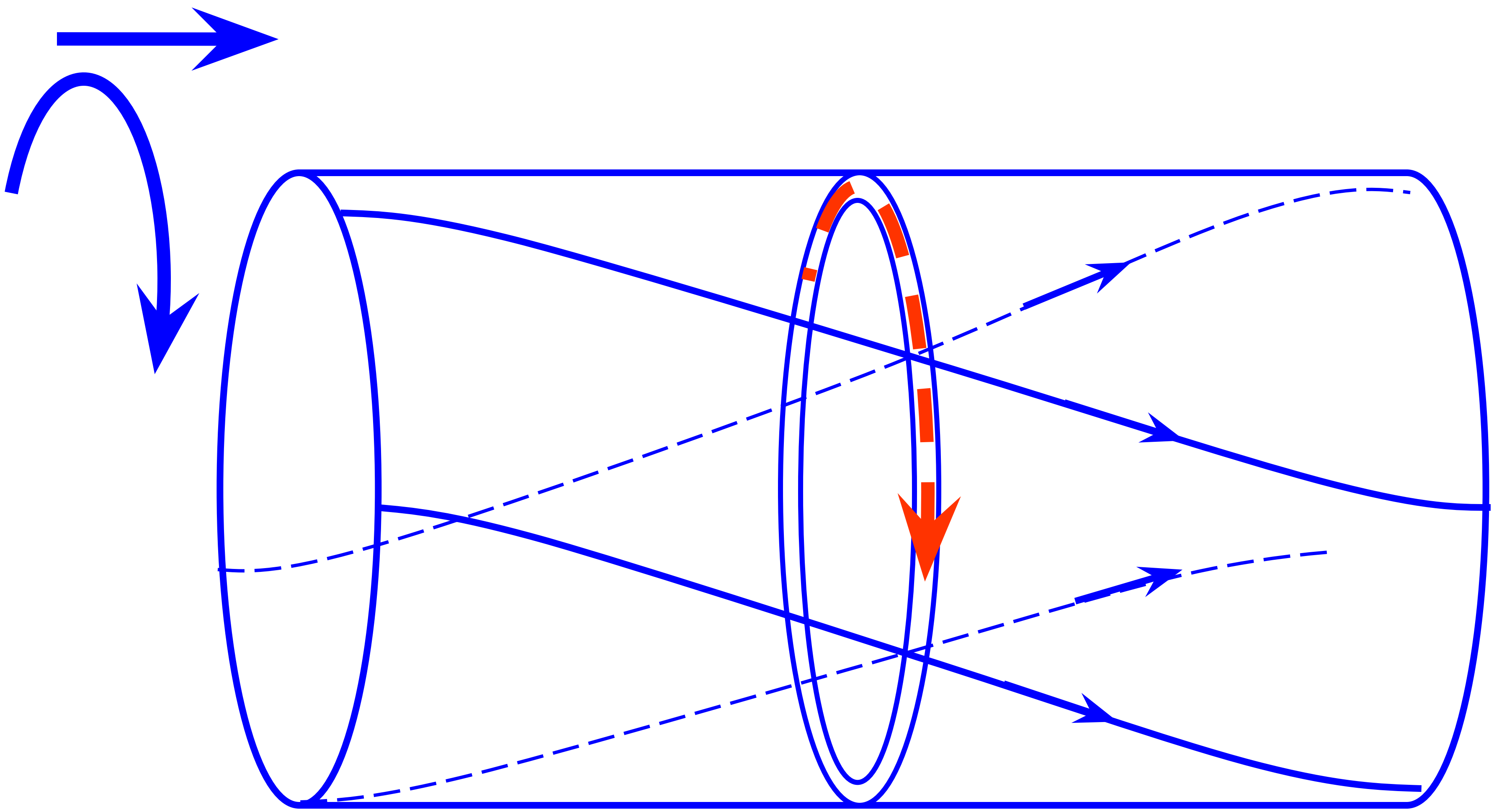
Поток вектора *a* сквозь замкнутую поверхность *S* равен алгебраической сумме источников поля (дивергенция вектора *a*) заключённых внутри этой поверхности в объёме *V*.

Дивергенция – мощность источников поля, отнесённая е единице объёма.

Циркуляция

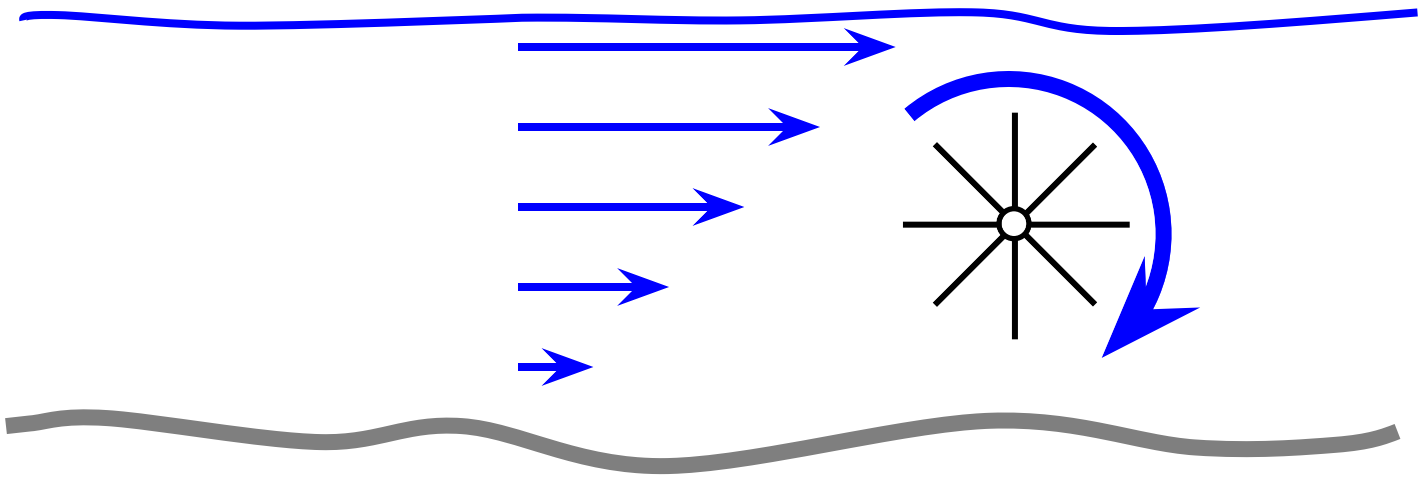
Рассмотрим какой-нибудь канал в потоке. Если весь поток заморозить, оставить только этот канал, то в нём может сохраниться движение. Циркуляция – это произведение скорости жидкости на длину контура.

$$\oint\limits_L \vec{a}\,\mathrm{d}\vec{l} = \oint\limits_L a_l\,\mathrm{d}l$$



200

Примеры: поворот стрелы вокруг своей оси при полёте, вертушка в ручье.



Ротор – плотность порождения циркуляции.

$$\left(\mathrm{rot}\vec{a}\right)_n = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_L \vec{a}\,\mathrm{d}\vec{l}$$

$$(\mathrm{rot}\,\vec{a})_x = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z},$$

$$(\mathrm{rot}\,\vec{a})_y = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x},$$

$$(\mathrm{rot}\,\vec{a})_z = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}.$$

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

200

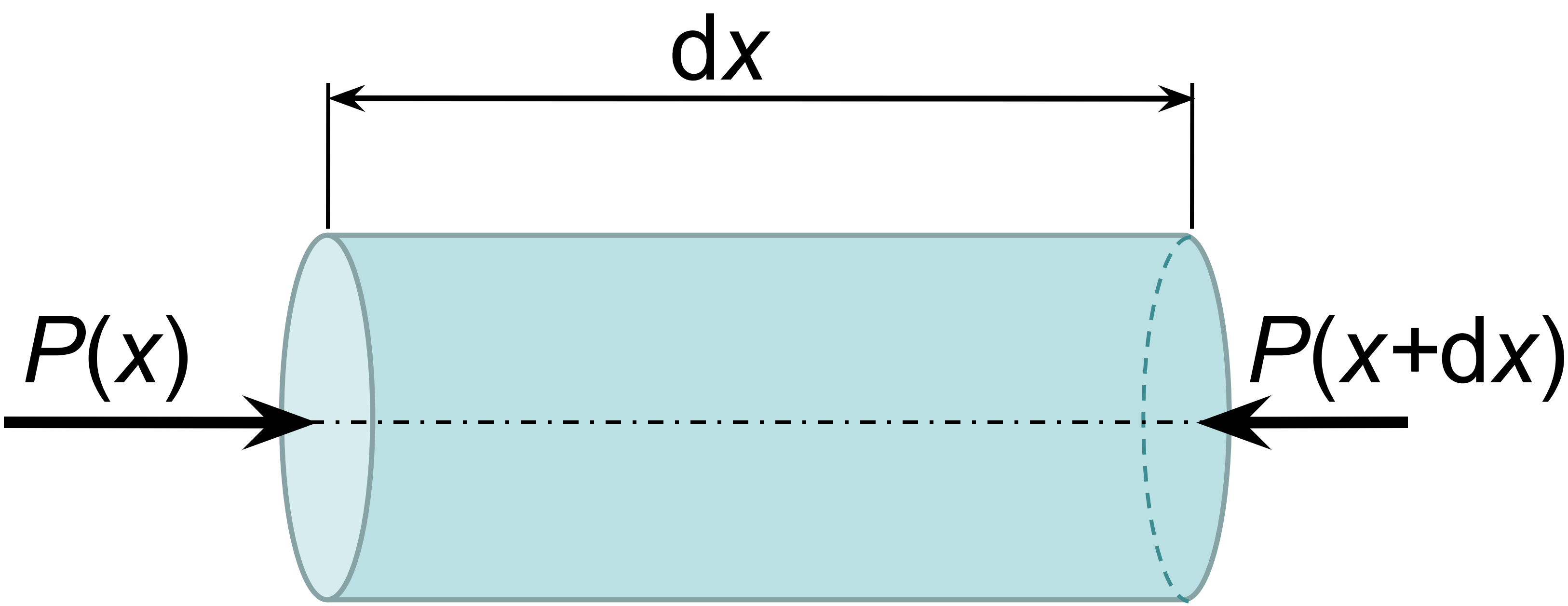
Теорема Стокса:
Циркуляция вектора *a* по произвольному контуру *L* равна потоку вектора rot*a* через произвольную поверхность *S*, ограниченную данным контуром.

$$\oint_L \vec{a}\,\mathrm{d}\vec{l} = \int \mathrm{rot}\vec{a}\,\mathrm{d}S\vec{n}$$

21. Элементы гидродинамики. Идеальная несжимаемая жидкость. Уравнение неразрывности струи. Уравнение Бернулли. Основное уравнение гидростатики. Уравнение Эйлера.

Рассмотрим идеальную жидкость (жидкость, в которой внутреннее трение (вязкость) полностью отсутствует). Также, будем считать, что жидкость несжимаемая.

Рассмотрим бесконечно малый объём жидкости в виде цилиндра, ось цилиндра II оси *X*.



Силы давления на боковую поверхность не учитываем, так как их проекция на ось X равна нулю. Остаётся давление, действующее на основания, вычислим суммарную силу давления

$$[P(x) - P(x+\mathrm{d}x)]\mathrm{d}S.$$

Разность в скобках можно заменить дифференциалом:

$$\left[P(x) - P(x + \mathrm{d}x)\right]\mathrm{d}S = -\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\mathrm{d}S = -\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}V$$

$\dfrac{\partial P}{\partial x}$ – частная производная (y, z, t = const).

Таким образом, на единицу объёма будут действовать сила *F*:

$$F_x = -\frac{\partial P}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial P}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial P}{\partial z}$$

или

$$\vec{F} = -\mathrm{grad}P.$$

В состоянии равновесия сила F (сила давления) должна уравновешиваться силой f

(сила f – объёмная плотность массовых сил, то есть зависит от массы, пример $f = \rho g$ – сила тяжести).

200

Основное уравнение гидростатики:

$$\vec{f} = \mathrm{grad}P$$

Уравнение Эйлера:

$$\rho \frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t} = \vec{f} - \mathrm{grad}P$$

200

Основное уравнение гидростатики

$$\mathrm{grad}\,p = \vec{f},$$

здесь p – давление жидкости, f – объёмная плотность массовых сил.

Пример – сила тяжести

$$f = \frac{F_{\text{т}}}{V} = \frac{mg}{V} = \rho g$$

здесь V – объём, m – масса, g – ускорение свободного падения,

ρ – плотность жидкости.

Уравнение Эйлера

$$\rho\frac{\mathrm{d}\vec{V}}{\mathrm{d}t}=\vec{f}-\mathrm{grad}p$$

здесь d*V* – дифференциал скорости потока жидкости, d*V*/d*t* – ускорение жидкости в данной точке пространства.

Для равновесия жидкости необходимо, чтобы силовое поле, в котором она находится, было консервативным.

Условие неразрывности жидкости

Рассмотрим стационарный поток идеальной несжимаемой жидкости, рассмотрим некоторую трубку тока, ограниченную линиями тока, например, трубу с переменным сечением.

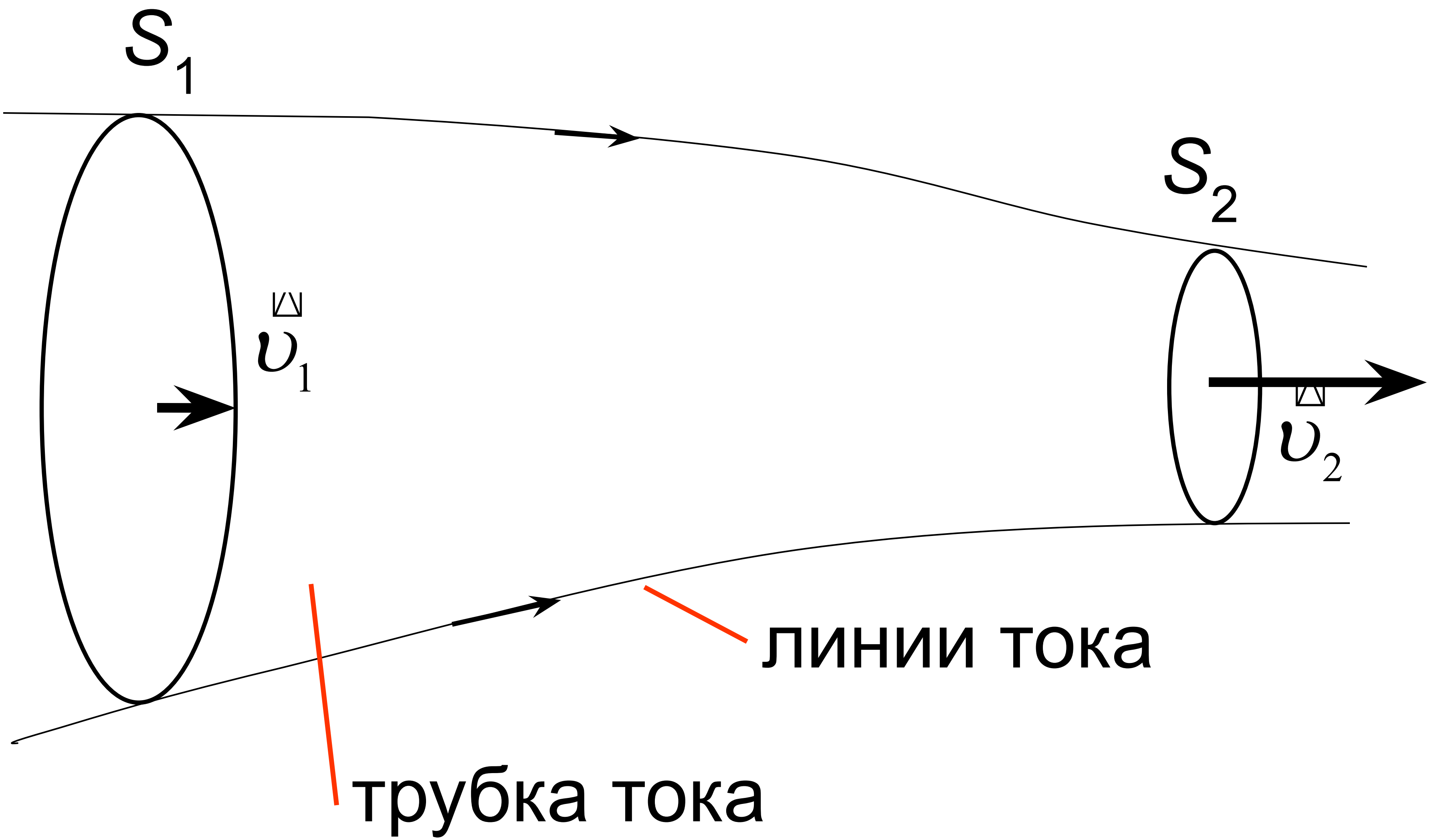
Поскольку жидкость несжимаема, объём входящий равен объёму выходящему, но поперечное сечение изменяется, это приводит к изменению скорости:

$$V_1 = V_2,$$

$$S_1 \cdot \upsilon_1 \cdot t = S_2 \cdot \upsilon_2 \cdot t = \text{const},$$

$$S \cdot \upsilon = \text{const}.$$

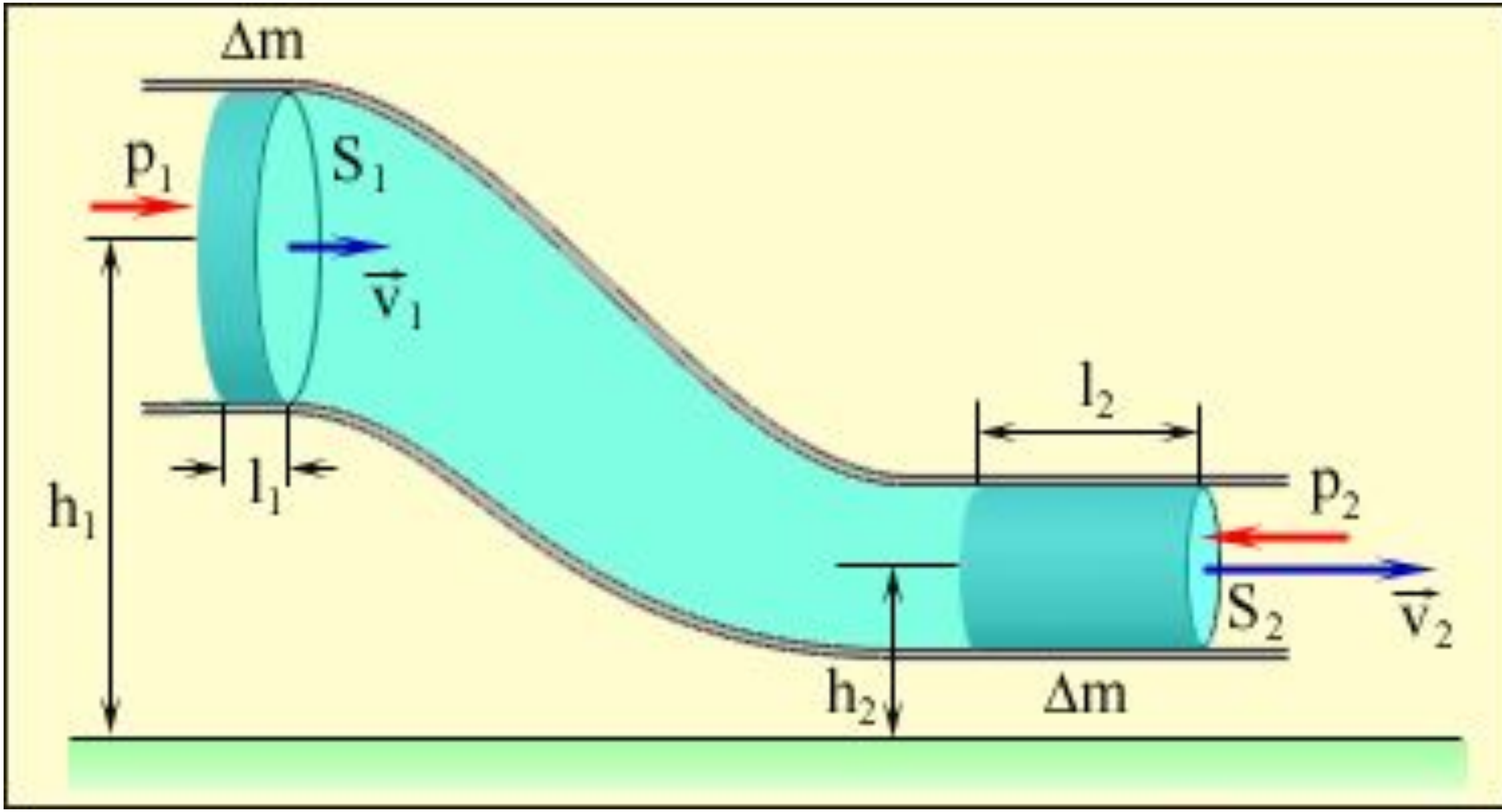
Это и есть условие неразрывности жидкости.



200

Уравнение Бернулли

Ещё раз рассмотрим некоторую трубку тока.
В силу неразрывности
$\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$.



200

Так как нет сил трения, то приращение энергии выделенного объёма равно:

$$\Delta E = \left(\frac{\rho \Delta V \upsilon_1^2}{2} + \rho \Delta V g h_1 \right) - \left(\frac{\rho \Delta V \upsilon_2^2}{2} + \rho \Delta V g h_2 \right)$$

и работа сил давления на площадки S_1 и S_2

$$A = p_1 S_1 \Delta \ell_1 - p_2 S_2 \Delta \ell_2 = \left(p_1 - p_2 \right) \Delta V$$

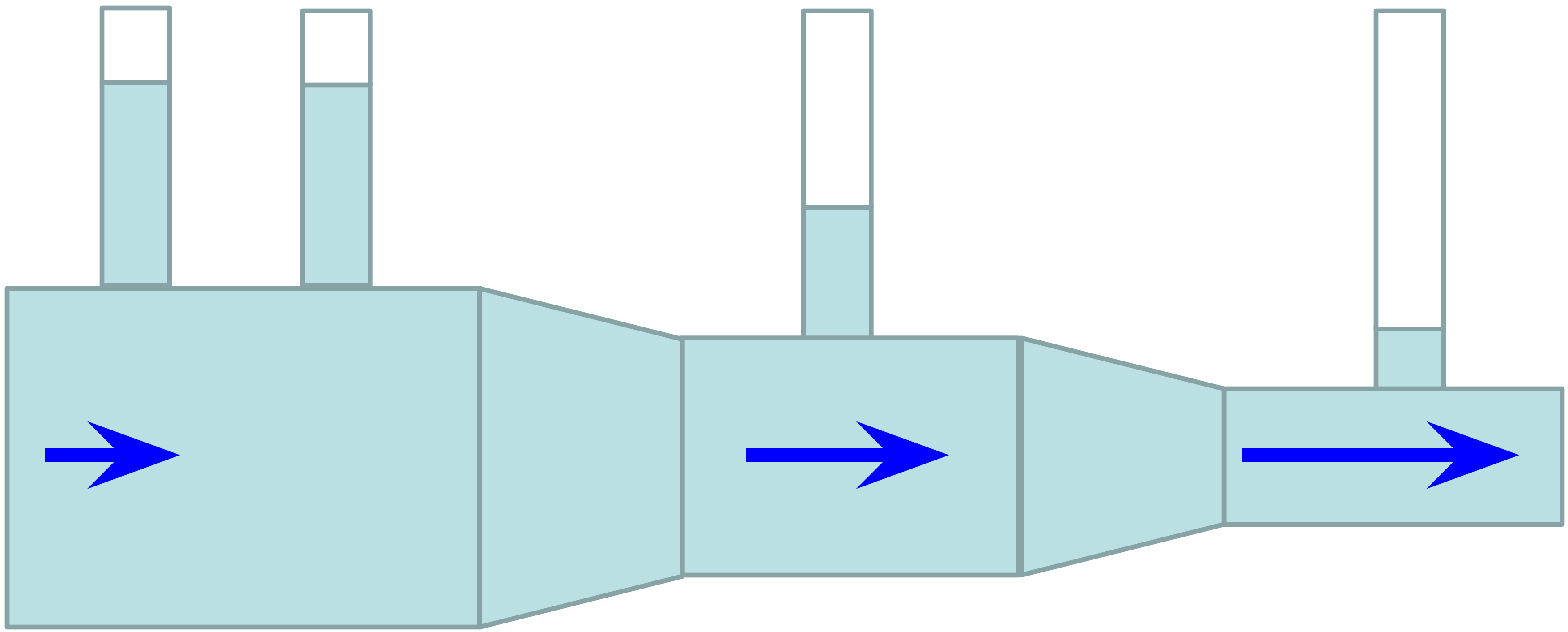
равна изменению энергии.

Приравниваем ΔE и A, делим на ΔV, получаем уравнение Бернулли:

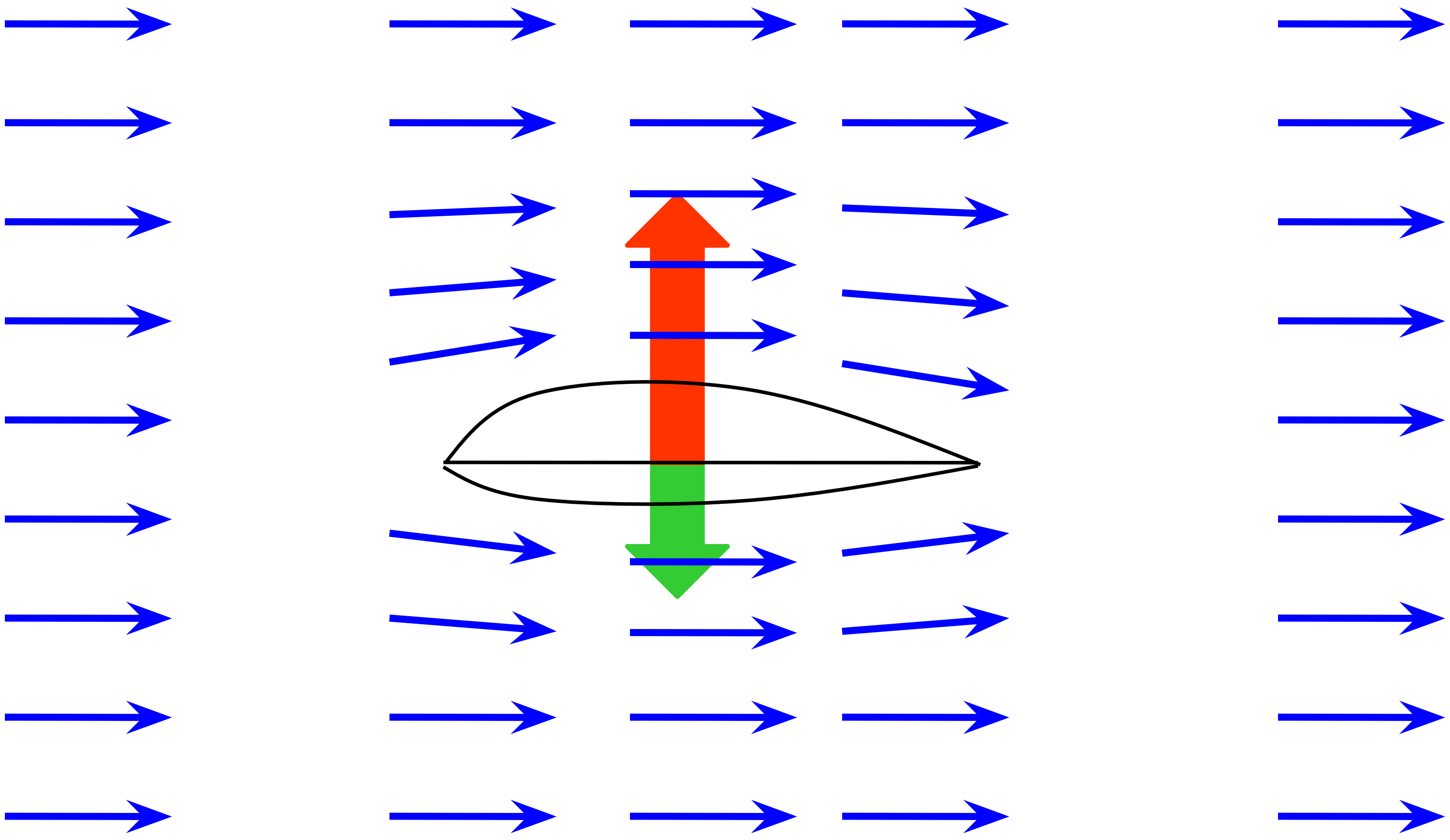
$$\frac{\rho \upsilon_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho \upsilon_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2 = \mathrm{const}$$

200

Уравнение Бернулли объясняет разность давления в трубке тока с переменным сечением.



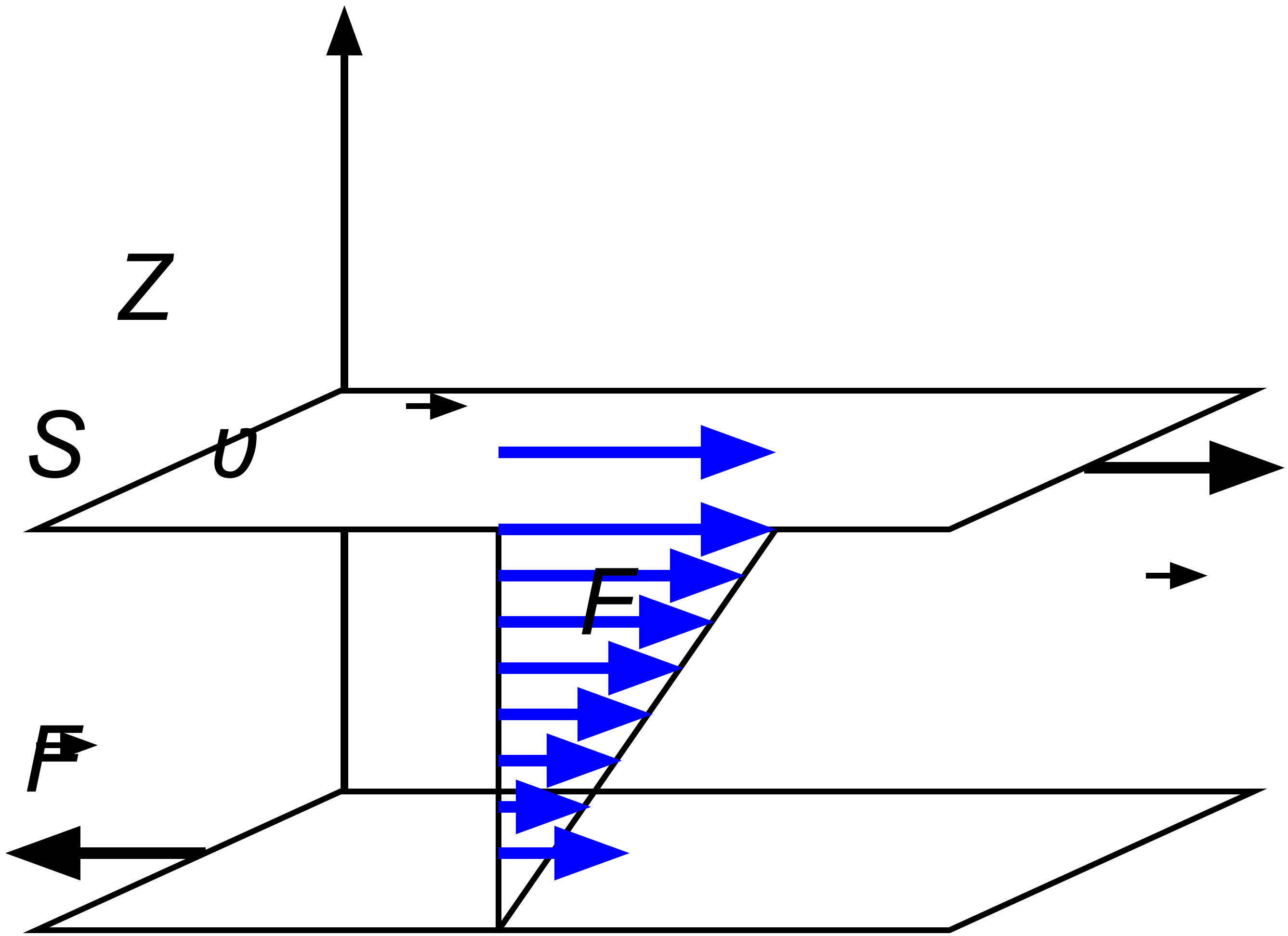
200



200

22. Течение вязкой несжимаемой жидкости в трубе. Формула Пуазейля. Ламинарное и турбулентное течение.

Рассмотрим две плоские пластины, *S* – площадь пластинок, *ℓ* – длина пластинок, *d* – расстояние между пластинами. Одна движется со скорость *υ* под действием некоторой силы *F*. Динамометр у нижней пластины, неподвижной, спустя некоторое время покажет усилие, действующие на неподвижную пластину, равное *F*.


Z
S
υ
F
F

Сила передаётся за счёт трения между слоями жидкости (вязкое трение)

$$F = \eta \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}z} S$$

η – коэффициент вязкости или внутреннего трения (динамическая вязкость),

размерность – Па·с (СИ),

Пуаз (СГС),

1 Па·с = 10 П.

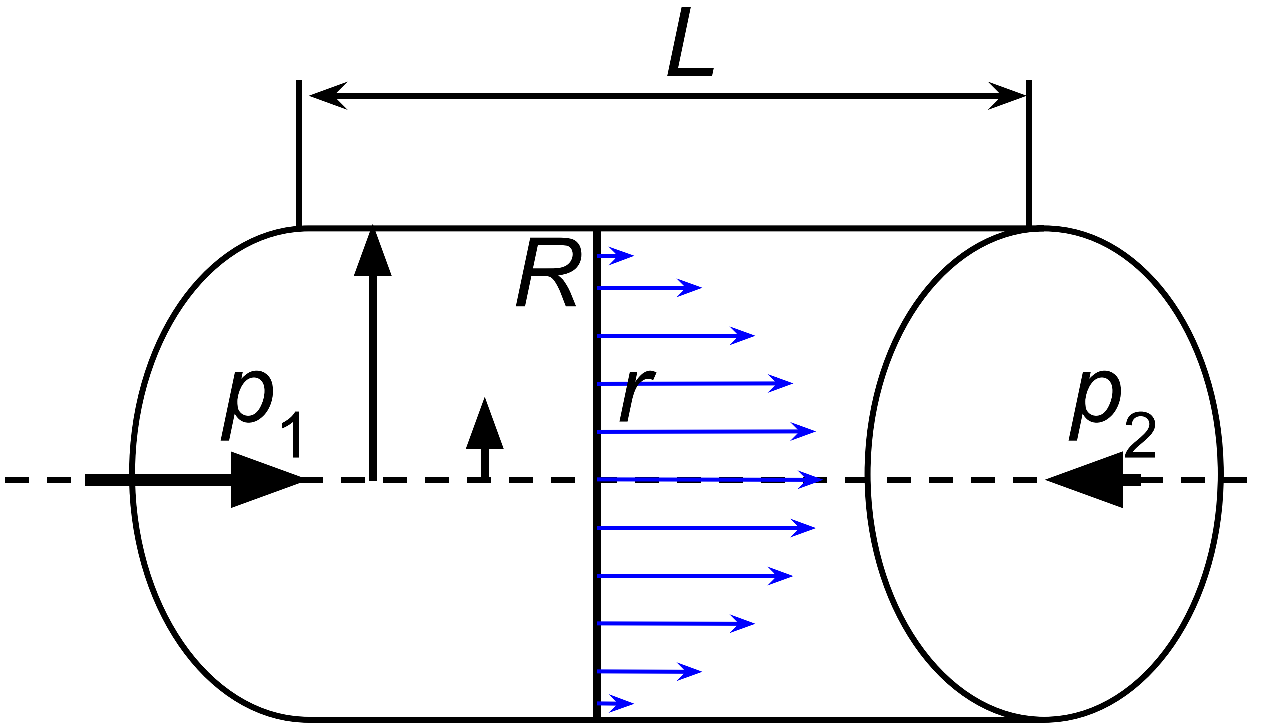
Стационарное течение вязкой жидкости

Ламинарное течение – течение жидкости как бы отдельными слоями, которые не перемешиваются. Турбулентное течение – течение, при котором происходит энергичное перемешивание слоёв жидкости.

При течении в трубе (радиус трубы R) в центре трубы ($r = 0$) скорость максимальна υ_{max}. На стенке трубы скорость равна нулю ($r = R$). Зависимость скорости вязкой жидкости от радиуса r (расстояние от оси трубы):

$$\upsilon = \frac{p_1 - p_2}{4\eta L}\left(R^2 - r^2\right)$$

здесь p_1 и p_2 – давление на входе и выходе трубы, η – коэффициент вязкости, L – длина трубы, ρ – плотность жидкости.



200

Поток жидкости через трубу за одну секунду (формула Пуазейля)

$$Q = \pi \frac{p_1 - p_2}{8 \eta L} R^4$$

Формула Пуазейля справедлива для ламинарного течения. Если число Рейнольдса меньше определённого значения, то течение жидкости считают ламинарным, если значение больше, то течение турбулентное.

Число Рейнольдса:

$$Re = \frac{\rho \square \upsilon_0}{\eta} = \frac{\square \upsilon_0}{\nu}$$

$\nu = \eta/\rho$ – кинематическая вязкость.