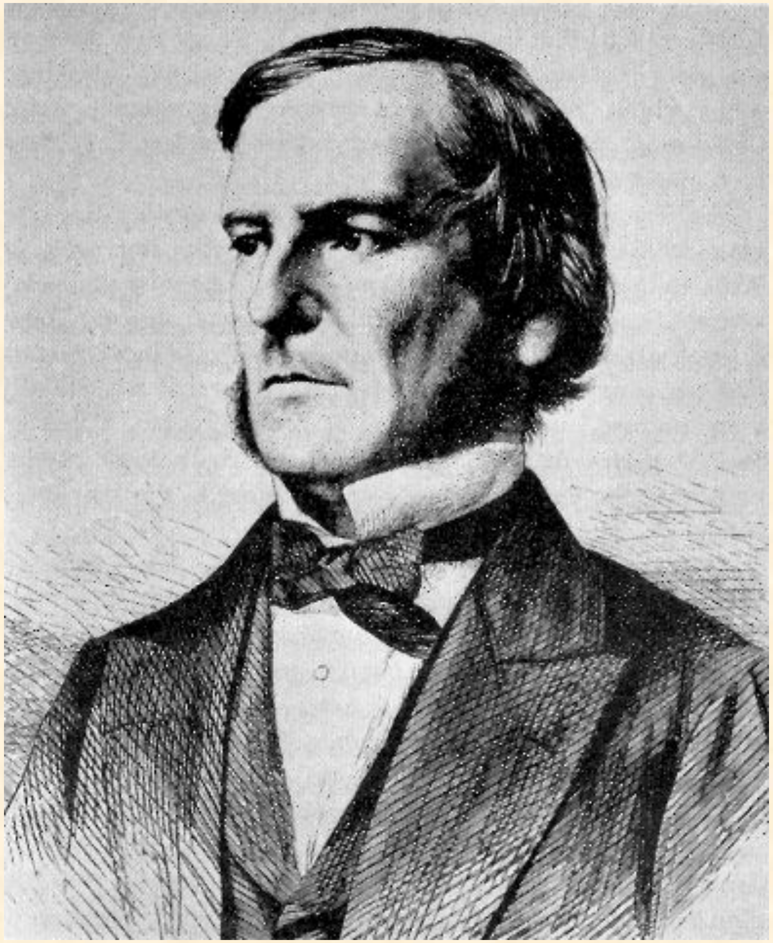
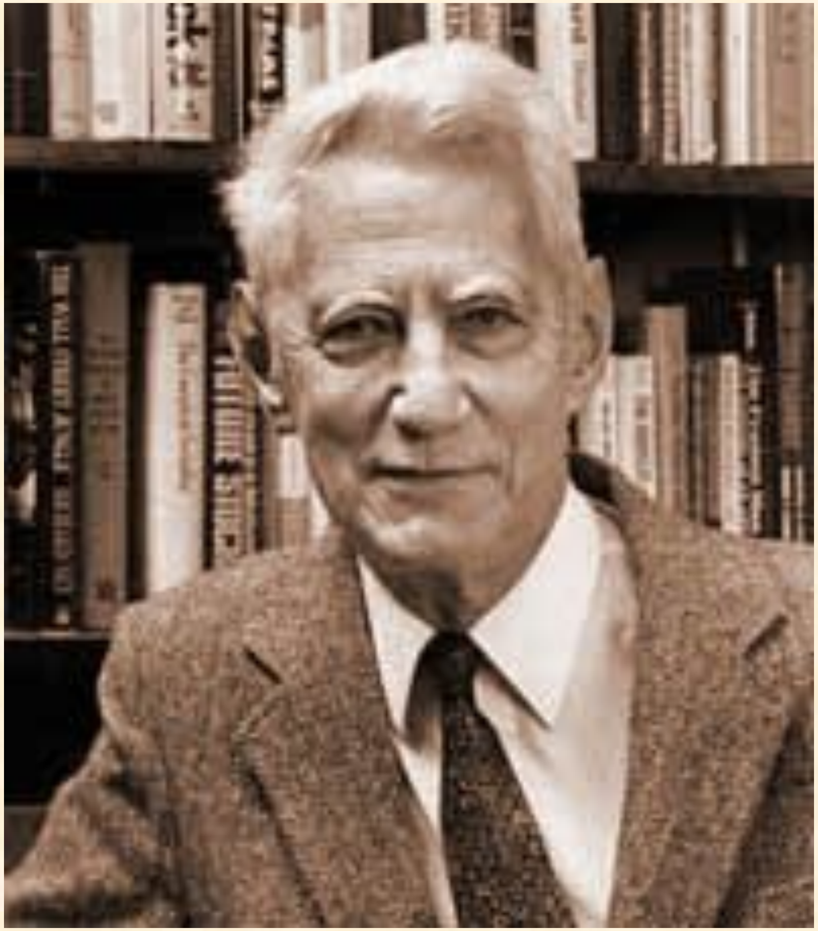
Приложение булевой алгебры к синтезу комбинационных схем

Теоретическим фундаментом современных ЭВМ является алгебра логики, основы которой разработал Дж. Буль. В 1847 году вышла его работа с характерным названием – “Математический анализ логики, являющийся опытом исчисления дедуктивного рассуждения”. Дж. Буль ввел три основные операции: И, ИЛИ, НЕ. Эти действия бинарны по своей сути, т.е. они оперируют с двумя состояниями: “истина” – “ложь”. Добрых семьдесят лет после публикации его труд считался не более чем изящной, но чисто умозрительной конструкцией, пока Клод Шеннон не создал на основе булевой логики современную информатику.

Клода Шеннона считают отцом теории





Джордж Буль (англ. George Boole) (2.11.1815- 8.12.1864) английский логик, математик и философ	Клод Шеннон (англ. Claude Shannon) (30.04.1916 - 24.02.2001) американский инженер и математик

Элементы булевой алгебры

Основными элементами булевой алгебры являются:

- логические константы;
- переменные;
- операции;
- выражения;
- функции;
- законы.

Логические константы

В булевой алгебре определены две логические константы: логический ноль (0) и логическая единица (1), которые отождествляются с понятиями “истина” и ”ложь” алгебры логики.

Переменные

Булевы (логические, двоичные) переменные - переменные, принимающие значения из множества {0,1}.

Операции

Основными операциями булевой алгебры являются:

- отрицание (инверсия);
- конъюнкция (логическое умножение);
- дизъюнкция (логическое сложение).

Операция отрицания является унарной, а конъюнкция и дизъюнкция – n-арными.

Операции обозначаются следующим образом:

Отрицание $\rceil a,\ \overline{a}$;

Конъюнкция $a \& b,\ a \cdot b,\ a * b,\ ab,\ a \wedge b$;

Дизъюнкция $a \vee b$.

Выражения

Логическим* (*булевым*) *выражением называется совокупность булевых переменных, соединенных знаками булевых операций при возможном наличии скобок для изменения порядка выполнения операций. При отсутствии скобок порядок выполнения операций определяется их приоритетом (значимостью). Для булевых операций порядок убывания приоритета следующий: $\rceil$, &, $\vee$.

Примеры логических выражений:

$$a \vee b \cdot \overline{c}, \quad (a \vee b) \cdot \overline{c}.$$

Функции

Булевой (логической) функцией называется функция, аргументами которой являются булевы переменные, а сама функция принимает значение из множества {0,1}.

Областью определения булевой функции является совокупность 2^n двоичных наборов ее аргументов. Набор аргументов можно рассматривать как n-компонентный двоичный вектор.

Булеву функцию можно задать с помощью следующих форм:

- аналитической;
- табличной;
- графической;
- таблично-графической;
- числовой;
- символической.

Аналитическая форма – булева функция задается логическим выражением, например:

$$y_1 = (\bar{x}_1 \vee x_2)\bar{x}_3;$$

$$y_2 = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3$$

Табличная форма – булева функция задается таблицей истинности.

Переход от аналитической формы к табличной однозначен. Обратный переход однозначным не является.

В качестве примера составим таблицу истинности для функции y_1:

$$y_1 = (\overline{x}_1 \vee x_2)\overline{x}_3;$$

x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_1 \vee x_2$	y
0	0	0	1	1
0	0	1	1	0
0	1	0	1	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	1	0

Остальные формы задания булевой функции рассматриваются в следующих разделах.

Основные законы булевой алгебры

К основным законам булевой алгебры относятся:

1. Коммутативные (переместительные) законы:

$$a \vee b = b \vee a; \quad a \cdot b = b \cdot a$$

2. Ассоциативные (сочетательные) законы:

$$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c; \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

3. Дистрибутивные (распределительные) законы:

$$a \vee (b \cdot c) = (a \vee b) \cdot (a \vee c); \quad a \cdot (b \vee c) = a \cdot b \vee a \cdot c$$

4. Закон двойного отрицания: $\overline{\overline{a}} = a$

5. Законы тавтологии (идемпотентности):

$$a \vee a = a; a \cdot a = a$$

6. Законы нулевого элемента:

$$a \vee 0 = a; \quad a \cdot 0 = 0$$

7. Законы единичного элемента:

$$a \vee 1 = 1; \quad a \cdot 1 = a$$

8. Законы дополнительного элемента. В булевой алгебре дополнительным элементом по отношению к *а* является отрицание $\overline{a}$

$$a \vee \overline{a} = 1; \quad a \cdot \overline{a} = 0$$

9. Законы двойственности (де Моргана):

$$\overline{a \cdot b} = \overline{a} \vee \overline{b}; \quad \overline{a \vee b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$$

Следствия:

$$a \cdot b = \overline{\overline{a} \vee \overline{b}}; \quad a \vee b = \overline{\overline{a} \cdot \overline{b}}$$

10. Законы поглощения:

$$a \vee a \cdot b = a; \quad a \cdot (a \vee b) = a$$

11. Правила сокращения:

$$a \vee \overline{a} \cdot b = a \vee b; \quad a \cdot (\overline{a} \vee b) = a \cdot b$$

12. Правила склеивания:

$$a \cdot b \vee a \cdot \overline{b} = a; (a \vee b) \cdot (a \vee \overline{b}) = a$$

Большинство законов задается парой соотношений (дуальность законов булевой алгебры).

Некоторые законы можно распространять на

В любом законе любую букву можно заменить на произвольное логическое выражение.

Законы применяются для упрощения булевых функций.

Разнообразие булевых функций

Булевы функции от одной переменной

Обозначение аргумента и функции	Значения аргумента и функции		Наименование функции
x	0	1	
f_0^1	0	0	Логический ноль
f_1^1	0	1	Повторение x
f_2^1	1	0	Инверсия x
f_3^1	1	1	Логическая единица

Булева функция от n аргументов $f^n(X)$ называется ***вырожденной по аргументу x_i***, если ее значение не зависит от этого аргумента, то есть для всех наборов аргументов имеет место равенство:

$f(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots,x_n) = f(x_1,x_2,x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots,x_n)$.

Среди функций от одной переменной содержатся две вырожденные: логический ноль и логическая единица.

Невырожденные функции **от двух переменных** с добавлением функции отрицания принято называть ***базовыми функциями*** булевой алгебры.

С учетом обращаемости некоторых базовых функций по отношению к своим аргументам, их общее количество равно девяти.

Аргументы и функции (в символической форме)	Значения аргументов и функций				Обозначение функций	Наименование	Вырожденность	Представление функции в булевом базисе
x_1	0	0	1	1				
x_2	0	1	0	1				
f_0^2	0	0	0	0	0	Логический ноль	+	-
f_1^2	0	0	0	1	$x_1 \& x_2$	Конъюнкция	-	$x_1 \cdot x_2$
f_2^2	0	0	1	0	$x_1 \Delta x_2$	Запрет x_1 по x_2	-	$x_1 \cdot \bar{x}_2$
f_3^2	0	0	1	1	x_1	Повторение x_1	+	-
f_4^2	0	1	0	0	$x_2 \Delta x_1$	Запрет x_2 по x_1	-	$\bar{x}_1 \cdot x_2$
f_5^2	0	1	0	1	x_2	Повторение x_2	+	-
f_6^2	0	1	1	0	$x_1 \oplus x_2$	Сумма по модулю 2, неравнозначность, исключительное ИЛИ	-	$\bar{x}_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot \bar{x}_2$
f_7^2	0	1	1	1	$x_1 \vee x_2$	Дизъюнкция	-	$x_1 \vee x_2$
f_8^2	1	0	0	0	$x_1 \downarrow x_2$	Функция Вебба, стрелка Пирса	-	$\overline{x_1 \vee x_2}$
f_9^2	1	0	0	1	$x_1 \sim x_2$ $(x_1 \equiv x_2)$	Равнозначность, эквивалентность	-	$x_1 \cdot x_2 \vee \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2$
f_{10}^2	1	0	1	0	$\bar{x}_2$	Отрицание x_2	+	$\bar{x}_2$
f_{11}^2	1	0	1	1	$x_2 \rightarrow x_1$	Импликация от x_2 к x_1	-	$x_1 \vee \bar{x}_2$
f_{12}^2	1	1	0	0	$\bar{x}_1$	Отрицание x_1	+	$\bar{x}_1$
f_{13}^2	1	1	0	1	$x_1 \rightarrow x_2$	Импликация от x_1 к x_2	-	$\bar{x}_1 \vee x_2$
f_{14}^2	1	1	1	0	$x_1 \mid x_2$	Штрих Шеффера	-	$\overline{x_1 \cdot x_2}$
f_{15}^2	1	1	1	1	1	Логическая единица	+	-

Некоторые функции от трех переменных

Значение аргументов			Значение функций		
			Сумма по модулю 2	Исключающее ИЛИ	Функция мажоритарности
x_1	x_2	x_3	$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$	$XOR(x_1, x_2, x_3)$	$x_1 \# x_2 \# x_3$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	0	1

Замечание. Функции сумма по модулю 2 и исключающее ИЛИ для трех аргументов являются неэквивалентными.

Утверждение. Общее число разнообразных булевых функций, в том числе и вырожденных, от *n* аргументов равно 2^{2^n}

Нормальные формы булевых функций

Нормальные формы - это особый класс аналитических выражений, используемых при решении задачи минимизации булевых функций и для перехода от табличной формы задания к аналитической. Нормальные формы строятся на основании операций конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, причем отрицание только единственной переменной.

Элементарной конъюнкцией (дизъюнкцией) называется конъюнкция (дизъюнкция) конечного числа попарно различимых переменных или их отрицаний.

Элементарную конъюнкцию (дизъюнкцию) называют также ***конъюнктивным (дизъюнктивным) термом***.

В частном случае терм, как конъюнктивный, так и

Под буквой будем понимать аргумент булевой функции или его отрицание.

Примерами термов являются: $x_1, x_2, x_1\bar{x}_3, x_2 \vee \bar{x}_4 \vee x_5$

Выражения типа: $x_1\bar{x}_3, \quad x_1\bar{x}_1 x_3$ термами не являются, так как в первом случае знак отрицания стоит над конъюнкцией переменных, а во втором случае переменная x_1 находится в выражении с отрицанием и без него.

Рангом терма называется количество букв входя-щих в него.

Дизъюнктивной (конъюнктивной) нормальной формой булевой функции называется дизъюнкция (конъюнкция) конечного числа попарно различи-мых

конституентой единицы (нуля) называется конъюнктивный (дизъюнктивный) терм макси-мального ранга, т.е. для булевой функции от *n* переменных конституента включает в себя *n* букв.

Свойство конституенты. Конституента единицы (нуля) принимает значение единицы (нуля) на одном и только одном наборе аргументов.

Пример. При *n* = 4 конъюнктивный терм $x_1 \overline{x}_2 x_3 \overline{x}_4$ принимает значение равное единице на наборе 1010, а дизъюнктивный терм $\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3 \vee \overline{x}_4$ принимает значение равное нулю на наборе 1101.

Определение. Дизъюнктивная (конъюнктивная) нормальная форма называется ***канонической***, если все ее конъюнктивные (дизъюнктивные) термы представляют собой конституенты единицы (нуля). Канонические формы называют также ***совершенными***.

Замечания:

1. С помощью канонических форм наиболее просто осуществляется переход от табличной формы задания булевой функции к аналитической.

2. С помощью канонических форм любую булеву функцию можно представить в булевом базисе

3. Любая булева функция, за исключением логического нуля и логической единицы, имеет единственные КДНФ и ККНФ. Логическую единицу можно представить в виде КДНФ, а логический ноль - в виде ККНФ.

4. Правило перехода от табличной формы задания булевой функции к аналитической:

а) в таблице истинности выделяются все наборы аргументов, при которых функция равна единице (нулю);

б) для каждого из этих наборов составляют конституенты единицы (нуля);

в) объединением конституенты единицы (нуля) знаками дизъюнкции (конъюнкции) получается аналитическая форма в виде КДНФ (ККНФ).

Пояснение. При составлении конституент единицы (нуля) используют следующее правило:

Если некоторый аргумент принимает на наборе значение равное нулю, то в конституенту единицы он входит с отрицанием, а в конституенту нуля без него.

Пример. Получить канонические формы для функции $\boldsymbol{y = x_1 \oplus x_2}$.

Составим таблицу истинности заданной функции:

x_1	x_2	y	Конституенты единицы	Конституенты нуля
0	0	0	-	$x_1 \vee x_2$
0	1	1	$\bar{x}_1 \cdot x_2$	-
1	0	1	$x_1 \cdot \bar{x}_2$	-
1	1	0	-	$\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$

КДНФ - каноническая дизъюнктивная нормальная форма: $y = \bar{x}_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot \bar{x}_2;$

ККНФ - каноническая конъюнктивная нормальная форма: $y = (x_1 \vee x_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2).$

КДНФ и ККНФ представляют собой две различные, но эквивалентные аналитические формы булевой функции. Это означает, что из одной формы можно получить другую, используя законы булевой алгебры.

$$y = (x_1 \vee x_2)\cdot(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) = x_1 \cdot \bar{x}_1 \vee x_1 \cdot \bar{x}_2 \vee x_2 \cdot \bar{x}_1 \vee x_2 \cdot \bar{x}_2 =$$

$$= x_1 \cdot \bar{x}_2 \vee x_2 \cdot \bar{x}_1 = x_1 \cdot \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \cdot x_2 \quad (\text{КДНФ})$$

Существует другой способ получения ККНФ:

а) составляется КДНФ, но не для самой булевой функции, а для ее отрицания;

б) берется отрицание над полученной КДНФ, которое снимается с применением закона двойственности.

$$\bar{y} = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \vee x_1 \cdot x_2$$

$$\bar{\bar{y}} = y = \overline{\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \vee x_1 \cdot x_2} = \overline{\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2} \cdot \overline{x_1 \cdot x_2} =$$

$$= (x_1 \vee x_2) \cdot (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2).$$

Числовая и символическая формы представления булевых функций

Для любой булевой функции можно предложить две числовые формы, основанные на перечислении десятичных эквивалентов наборов аргументов, на которых функция принимает значение единицы (нуля).

Пример. Функция от трех переменных задана в числовой форме:

$$f^3(X) = \underset{f=1}{\vee}(0, 2, 6, 7).$$

От числовой формы легко перейти к КДНФ путем замены каждого из наборов в перечислении конституентой единицы.

$$f^3(X) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3$$

Аналогично можно перейти к ККНФ:

$$f^3(X) = \underset{f=0}{\&}(1, 3, 4, 5).$$

$$f^3(X) = (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)\cdot(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)\cdot(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)\cdot(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3).$$

В самом компактном виде любую булеву функцию можно представить в следующей ***символической форме***: f_N^n, где *n*-количество аргументов, а *N*-десятичный эквивалент двоичного набора значений функции на упорядоченном множестве аргументов..

Пример. $f^3(X)=x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$

x_1	x_2	x_3	$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

$(01101001)_2 = 64 + 32 + 8 + 1 = 105$

$f^3(X)=x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 = \quad f^3_{105}$ - символическая форма булевой функции.

Преобразование произвольной аналити-ческой формы булевой функции в нормальную

В булевой алгебре в виде теоремы доказывается следующее утверждение: *существует единый конструктивный подход, позволяющий преобра-зовать аналитическое выражение булевой функции, заданное в произвольной форме, к нормальной форме*.

Пример. Преобразовать аналитическое выраже-ние заданной булевой функции к нормальной форме:

$$f^4(X) = (x_1x_2 \vee \bar{x}_2x_3)\cdot(\bar{x}_1 \mid x_4) = (x_1x_2 \vee \bar{x}_2x_3)\cdot(\overline{\bar{x}_1x_4}) =$$

$$= (x_1x_2 \vee \bar{x}_2x_3)\cdot(x_1 \vee \bar{x}_4) = x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_2x_3\bar{x}_4 =$$

$$= x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_2x_3\bar{x}_4 = \qquad \text{(ДНФ 1)}$$

$$= x_1(x_2 \vee \bar{x}_2x_3) \vee \bar{x}_2x_3\bar{x}_4 = x_1(x_2 \vee x_3) \vee \bar{x}_2x_3\bar{x}_4 = \qquad (*)$$

$$= x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee \bar{x}_2x_3\bar{x}_4 \qquad \text{(ДНФ 2)}$$

1. В общем случае любая булева функция может иметь несколько ДНФ, отличающихся либо количеством термов, либо количеством букв в этих термах.

2. При построении комбинационной схемы, реализующей данную функцию по ее нормальной форме предпочтительней схема, которая обладает наименьшим числом термов и наименьшим количеством букв в этих термах.

3. По сравнению со схемой, построенной по ДНФ, схема, построенная по скобочной форме (*), является предпочтительной т.к. при одном и том же числе логических элементов (И, ИЛИ) содержит меньшее число входов (9 вместо 10).

Задачу преобразования нормальной формы булевой функции в скобочную форму называют ***задачей факторизации.***

4. Сущность конструктивного подхода при получении ДНФ состоит в следующем:

а) преобразование операций небулевого базиса к операциям булевого базиса;

б) снятие отрицаний над выражениями с примене-нием законов двойственности;

в) раскрытие скобок с применением дистрибу-тивного закона;

г) упрощение выражения с применением законов поглощения, склеивания, сокращения и тавто-логии.

Приведенные рассуждения справедливы и для КНФ.

Приведение произвольных нормальных форм булевой функции к каноническим

. Для приведения произвольной ДНФ к КДНФ необходимо использовать правило дизъюнк-тивного развертывания применительно к каждому из неполных конъюнктивных термов.

$$P = P(x_i \vee \bar{x}_i) = P \cdot x_i \vee P \cdot \bar{x}_i,$$

где *P* - неполный конъюнктивный терм (ранг этого терма меньше *n*), а x_i - недостающий в терме аргумент.

Пример. Привести ДНФ заданной функции к КДНФ:

$$y = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 x_3 = (\text{ДНФ})$$

$$= \bar{x}_1(x_2 \vee \bar{x}_2)(x_3 \vee \bar{x}_3) \vee \bar{x}_2 x_3 (x_1 \vee \bar{x}_1) =$$

$$= \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \underline{\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3} \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \underline{\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3} =$$

$$= \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \quad (\text{КДНФ})$$

Замечание. После раскрытия скобок могут получиться одинаковые термы, из которых нужно оставить только один.

$y = f^3(X) = \underset{f=1}{\vee}(0,1,2,3,5)$ - числовая форма функции.

Преобразование КНФ к ККНФ реализуется путем применения правила конъюнктивного разверты-вания к каждому неполному дизъюнктивному терму

$$P = P \vee x_i \bar{x}_i = (P \vee x_i)(P \vee \bar{x}_i)$$

Пример. Привести ДНФ заданной функции к ККНФ:

$$y = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 x_3 = \qquad (\text{ДНФ})$$

$$= (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee x_3) = \qquad (\text{КНФ})$$

$$= (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3\bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_3 \vee x_2\bar{x}_2) =$$

$$= (\underline{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3})(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\underline{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3}) =$$

$$= (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \qquad (\text{ККНФ})$$

$$y = f^3(X) = \underset{f=0}{\&}(4,6,7)$$ - числовая форма функции.

Разнообразие двоичных алгебр

В связи с тем, что любую сколь угодно сложную булеву функцию можно представить в канонических формах, то есть записать ее с помощью операций отрицания, конъюнкции и дизъюнкции эта система булевых операций обладает свойством функциональной полноты, т. е. образует так называемый базис.

Естественно предположить, что система булевых операций является не единственной, с помощью которой можно образовать некоторый базис.

В принципе любую из базовых функций можно отождествить с соответствующей операцией и на основе совокупности этих операций построить двоичные алгебры, отличные от

К наиболее распространенным двоичным алгебрам относятся:

- алгебра Жегалкина ($\oplus$, &);
- алгебра Вебба (Пирса) ($\downarrow$);
- алгебра Шеффера (|).

В каждой из этих алгебр действуют собственные законы. Естественно существуют взаимно однозначные переходы от операций одного базиса к операциям другого.

Кубическое представление булевых функций

В кубическом представлении булевой функции от n переменных все множество из 2^n наборов ее аргументов рассматривается как множество координат вершин n-мерного куба с длиной ребра, равной 1. В соответствии с этим наборы аргументов, на которых булева функция принимает значение, равное 1, принято называть ***существенными вершинами***.

Существенные вершины образуют так называемые ***ноль-кубы*** (***0-кубы***). Между 0-кубами существует ***отношение соседства*** и определена ***операция склеивания***. Два 0-куба называются ***соседними***, если они отличаются только по одной координате и, соответственно, могут вступать в операцию склеивания, в результате которой получается ***1-куб***.

Пример. Для функции $f^{4}(X)$ определить, являются ли ее 0-кубы (0101) и (0001) соседними и, если являются, то выполнить операцию их склеивания.

Заданные кубы являются соседними, так как они различаются только по одной координате. Результатом их склеивания является 1-куб (0X01).

Координата, отмечаемая символом X, называется ***свободной*** (***независимой, несвязанной***), а остальные (числовые), координаты называются ***зависимыми*** (***связанными***).

Аналогичное отношение соседства существует между 1-кубами, в результате склеивания которых получается 2-куб.

Пример. Для функции $f^4(X)$ определить, являются ли ее 1-кубы (0X01) и (0X11) соседними и, если являются, то выполнить операцию их склеивания.

Заданные кубы являются соседними, так как они различаются только по одной координате. Результатом их склеивания является 2-куб (0XX1).

В порядке обобщения: два r-куба называются соседними, если они отличаются только по одной (естественно, зависимой) координате. Каждый r-куб содержит r независимых и $(n–r)$ зависимых координат. В результате склеивания двух соседних r-кубов образуется $(r+1)$-куб содержащий $(r+1)$ независимую координату.

Замечания.

1. Размерность куба определяется количеством свободных координат.
2. В соседних r-кубах ($r > 0$) все свободные координаты являются одноименными.
3. Операция склеивания над кубами различной размерности соответствует применению закона склеивания к конъюнктивным термам, отождествляемым с этими кубами.

Так, для примера 0-кубу (0101) соответствует терм $\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$, а 0-кубу (0001) – терм $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4$. Эти термы склеиваются по переменной x_2. Результат склеивания:

$$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 = \bar{x}_1 \bar{x}_3 x_4$$

, в котором отсутствует переменная x_2, отождествляется с 1-кубом (0X01).

Аналогично, для другого примера 1-кубу (0X01) соответствует терм $\bar{x}_1\bar{x}_3x_4$, а 1-кубу (0X11) – терм $\bar{x}_1x_3x_4$.

Эти термы склеиваются по переменной x_3. Результат склеивания: $\bar{x}_1\bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_1x_3x_4 = \bar{x}_1x_4$, отождествляется с 2-кубом (0XX1).

Кубическим комплексом K ^{0}***(f)*** булевой функции *f* называется множество 0-кубов этой функции. В общем случае, ***кубическим комплексом K(f)*** булевой функции *f* называется объединение множеств кубов всех размерностей этой функции

$$K(f) = \bigcup_{r=0}^{m} K^{r}(f),$$

m - максимальная размерность кубов функции *f*.

Пример. Получить кубический комплекс функции

$$y = f^3(X) = \vee_{f=1}(1,2,3,6,7).$$

Для получения кубического комплекса *K*(*f*) необ-ходимо провести всевозможные операции склеи-вания над 0-кубами, 1-кубами и т.д. до тех пор, пока при склеивании *r*-кубов не получится $K^{r+1}(f) = \varnothing$.

$$K^0(f) = \left\{\begin{matrix} 001 \\ 010 \\ 011 \\ 110 \\ 111 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \end{matrix} \quad K^1(f) = \left\{\begin{matrix} 0X1 \\ 01X \\ X10 \\ X11 \\ 11X \end{matrix}\right\} \begin{matrix} (1-3)\,(1) \\ (2-3)\,(2) \\ (2-4)\,(3) \\ (3-5)\,(4) \\ (4-5)\,(5) \end{matrix} \quad K^2(f) = \left\{\begin{matrix} X1X \\ \underline{X1X} \end{matrix}\right\} \begin{matrix} (2-5) \\ (3-4) \end{matrix}$$

$K^3(f) = \varnothing$ (пустое множество).

$K(f) = K^0(f) \cup K^1(f) \cup K^2(f)$. Естественно, что в комплексе $K^2(f)$ останется только один куб

Пояснения. Получение 1-кубов осуществляется на основе попарного сравнения 0-кубов с целью выявления всевозможных пар соседних 0-кубов и образование 1-кубов из каждой пары.

Для сокращения числа попарных сравнений мож-но учесть следующий факт: соседними могут являться только такие два 0-куба, в которых число единичных координат отличается ровно на единицу.

В связи с этим целесообразно разделить 0-кубы на группы, различающиеся числом единичных коор-динат, и проводить попарные сравнения только для 0-кубов, принадлежащих соседним группам.

Замечания.

. Для данного примера в записи 0-кубов в кубическом комплексе $K^0(f)$ в порядке возрастания их десятичных эквивалентов уже присутствует их упорядочение и разделение на группы.

2. При полном попарном сравнении пяти 0-кубов потре-бовалось бы выполнить 4!=24 операции сравнения, а при целенаправленном (сравниваются только кубы из двух соседних групп) – число операций сравнения равно шести.
3. Подобный принцип рационального сравнения кубов можно распространить и на кубы большей размерности. При этом добавляется еще одно условие: два *r*-куба могут быть соседними, если все *r* их независимых координат являются одноименными.

При склеивании 1-кубов 2-кубы представлены в двух экземплярах как результаты склеивания двух различных пар 1-кубов. Распространяя этот принцип на кубы большей размерности, можно утверждать, что *r*-кубы как результат склеивания (*r*-1)-кубов получаются в *r*-кратном количестве экземпляров.

Куб, входящий в состав кубического комплекса *K*(*f*), называется ***максимальным***, если он не вступает ни в одну операцию склеивания.

Множество максимальных кубов функции *f* обозначается *Z*(*f*). Это множество является окончательным результатом операции склеивания кубов. Из кубов этого множества (и только из них) строится минимальное покрытие булевой функции.

В примере максимальными кубами являются кубы $Z(f)=\left\{\begin{matrix} X1X \\ 0X1 \end{matrix}\right\}$

Графическое представление булевых функций. Геометрическая интерпретация кубов малой размерности

Графическое представление булевых функций носит ограниченный характер и, как правило, является наглядным для булевых функций от двух ("плоский" вариант) и трех переменных ("пространственный" вариант).

При использовании графического способа задания булевой функции от n переменных каждый из 2^n наборов ее аргументов отождествляется с точкой n-мерного пространства с соответствующими координатами, которые могут принимать

Таким образом, множество наборов аргументов булевой функции, представляющих область ее определения, можно отождествить с множеством вершин *n*-мерного куба с длиной ребра, равной 1.

Для представления значений функции (0 или 1) обычно выделяются вершины куба, соответствующие наборам аргументов, на которых функция равна единице. На рисунке показано графическое представление функции из примера: $f^3(X) = \bigvee_{f=1}(1, 2, 3, 6, 7)$.

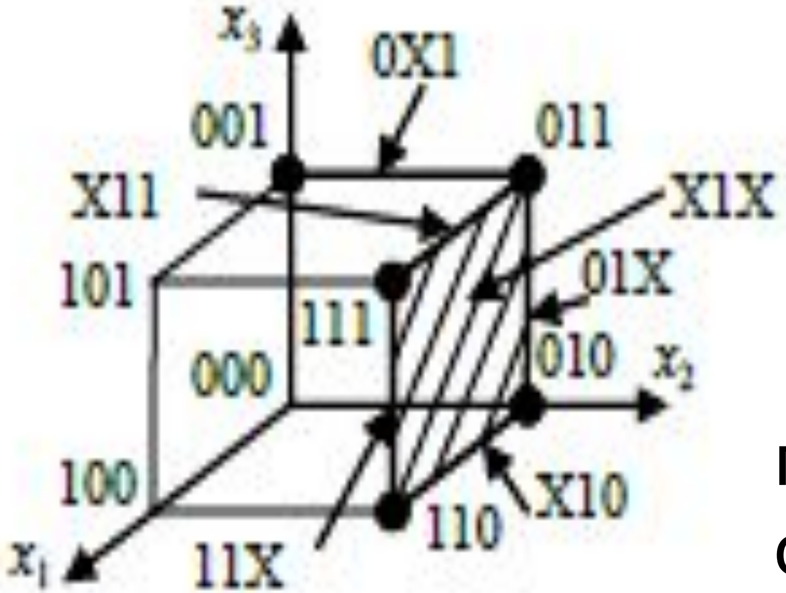
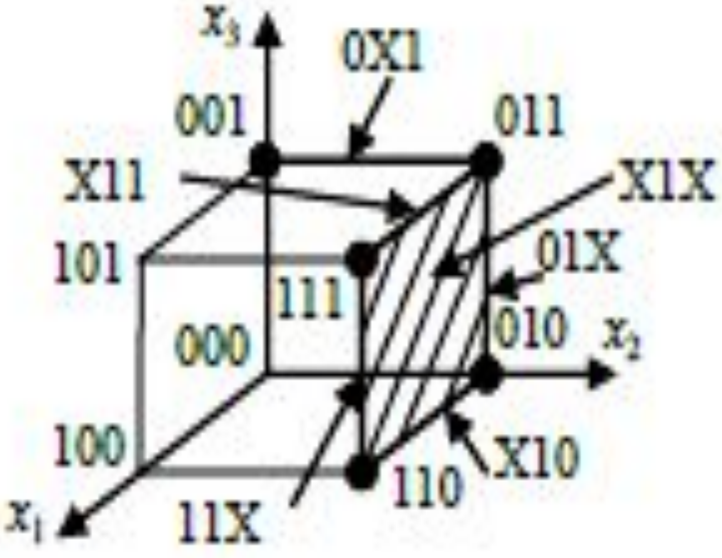


Рис. Графическое представление функции от трех переменных

Единичные значения функции выделены “жирными” точками в соответствующих вершинах куба. Выделенные вершины будем называть ***существенными.*** Существенные вершины соответствуют 0-кубам функции. Таким образом, геометрической интерпретацией 0-куба является точка, представляющая существенную вершину



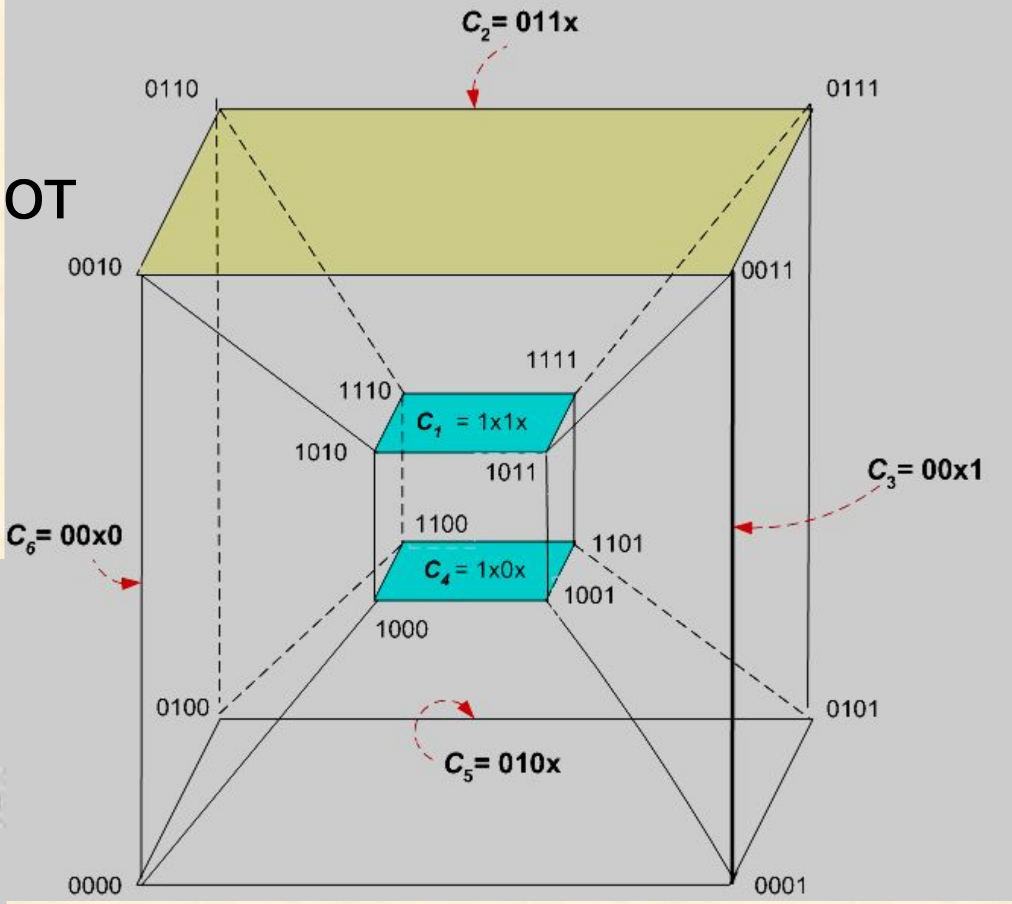
ются концами какого-либо ребра, в связи с чем, геометрической интерпретацией 1-куба является ребро, замыкаемое склеивающимися 0-кубами. На рисунке выделены пять ребер, соответствую-щих 1-кубам кубического комплекса $K^1(f)$ из примера. Два параллельных ребра, образующих грань, являются обра-зами склеивающихся 1-кубов. В соответствии с этим геометрической интерпретацией 2-куба является грань, образуемая парой параллельных ребер.

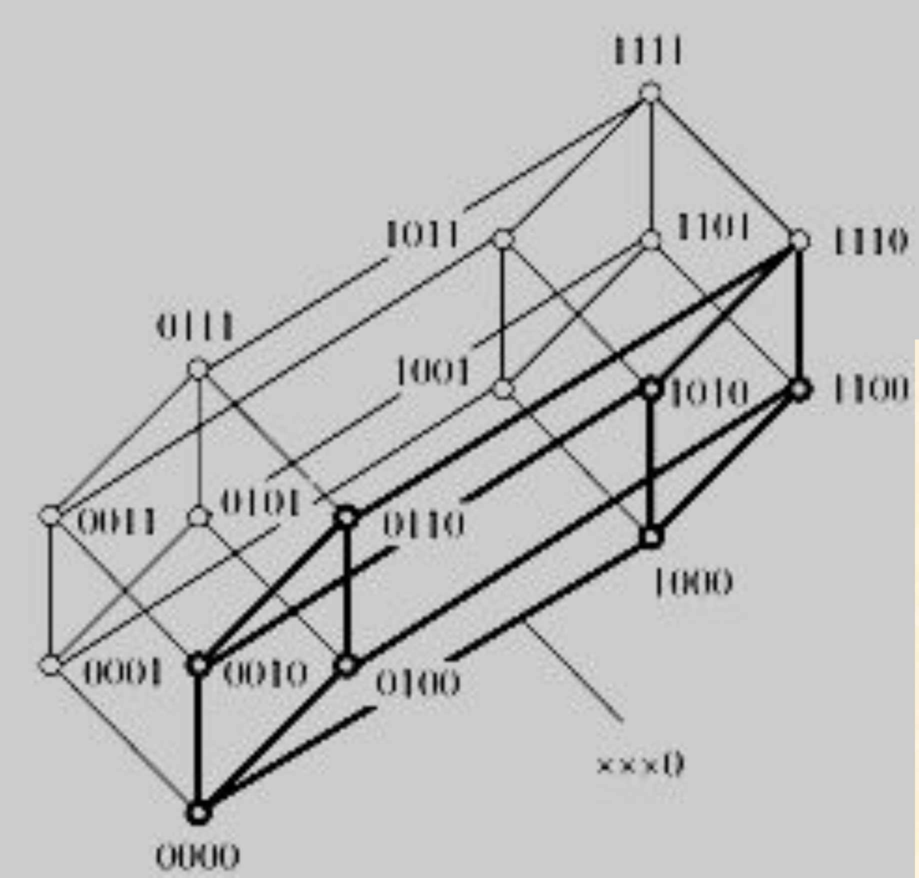
Так как любую грань можно определить одной из пар параллельных ребер, 2-куб может быть получен как результат склеивания двух различных пар 1-кубов, то есть при всевозможных склеиваниях представляется в двух экземплярах. На рисунке штриховкой выделена грань, соответствующая 2-кубу (X1X) из примера.

Геометрическим образом 3-куба можно считать весь трехмерный куб. Так как он может быть образован тремя способами как пара параллельных граней, то при склеивании он получается в трех экземплярах.

На рисунке приведены возможные графические представления функции от четырех переменных в виде гиперкуба (тессеракта).

Графические представления функции от четырех переменных





Задача минимизации булевых функций и методы ее решения

Аналитические выражения булевых функций являются математическими моделями, на основании которых строятся логические схемы.

Проектируемые схемы должны быть оптимальными в смысле минимума используемого оборудования при выполнении ограничений снизу на быстродействие схемы, которое определяется временем распространения сигналов от входов схемы к ее выходам.

Количество оборудования, используемого в схеме, принято характеризовать ***ценой схемы***.

Если в схеме используются элементы k типов с ценами s_1, s_2, ..., s_k и в количестве n_1, n_2, ..., n_k, то цена схемы S определяется суммарной ценой элементов:

$$S = \sum_{i=1}^{k} s_i n_i .$$

Методика проектирования логических схем, оптимальных в смысле минимума цены S крайне затруднительна. В связи с этим в практике проек-тирования используются методы, основанные на ряде допущений, которые позволяют упростить решение задачи проектирования и синтезировать схемы, близкие к оптимальным.

Канонический метод проектирования комбина-ционных схем состоит в следующем.

Закон функционирования проектируемой схемы, в общем случае, задается системой булевых функций, в частном случае, одной булевой функцией. Аналитические выражения булевых функций путем эквивалентного преобразования приводятся к виду, позволяющему строить экономичные схемы.

При использовании многовходовых логических элементов И, ИЛИ и одновходового элемента НЕ схема может быть построена по ДНФ или КНФ функции.

парафазными входами (на входы схемы подаются как прямые, так и инверсные значения входных переменных, соответствующих аргументам булевых функций или их инверсиям) входные инверторы (элементы НЕ) не нужны. Входные инверторы используются в схемах с ***однофазными входами*** (на входы схемы подаются только прямые значения входных переменных).

При упрощенной оценке затрат оборудования на реализацию логической схемы цена схемы определяется суммарным числом входов в логические элементы и называется ***ценой схемы по Квайну*** - S_Q.

Использование S_Q в качестве критерия оптималь-ности синтезируемой схемы предполагает, что схема должна строится по аналитическому выражению булевой функции в нормальной форме (ДНФ или КНФ), содержащему минималь-ное количество литер. Задача получения нормальных форм булевых функций, содержащих минимальное количество букв, называется ***канонической задачей минимизации***, а сами нор-мальные формы (ДНФ или КНФ) булевых функций, получаемые в результате решения задачи минимизации, называются ***минимальными*** и обозначаются **МДНФ** или **МКНФ.**

Методы минимизации булевых функций

Методы решения задачи минимизации булевых функций можно разделить на две группы: ***графические*** и ***аналитические***.

Графический метод минимизации основан на использовании ***минимизирующих карт***, назы-ваемых ***картами Карно*** ***(диаграммами Вейча).***

Карта Карно для функции от ***n*** аргументов представляет собой прямоугольник, квадрат или совокупность квадратов, разделенных на $\mathbf{2}^{n}$ клеток, каждая из которых соответствует определенному набору аргументов булевой функции. В клетках карты фиксируются значения функции.

Решение задачи минимизации сводится к нахождению минимального покрытия булевой функции.

Основными достоинствами графического метода минимизации булевых функций являются его наглядность и относительная простота реализации, что позволяет применять его на практике при “ручной” минимизации.

В то же время, существенным ограничением на использование карт Карно для решения задачи минимизации является относительно небольшая размерность задачи (число аргументов минимизируемой функции не более шести).

Большим недостатком графического метода мини-мизации является также отсутствие формализо-ванного подхода к решению задачи (метод явля-ется во многом интуитивным), что ставит в зависи-мость получение оптимального решения от квали-фикации и практических навыков специалиста.

Аналитические методы минимизации булевых функций связаны с преобразованием анали-тического выражения булевой функции таким образом, чтобы в результате получилось выражение, содержащее минимальное число литер и термов.

Наиболее известные аналитические методы минимизации описаны в пособии.

Покрытия булевых функций
Построение покрытий булевых функций из кубов различной размерности. Соответствие между покрытием и ДНФ булевой функции

Между кубами различной размерности, входящими в кубический комплекс *K*(*f*), существует ***отношение включения*** или ***покрытия***. При этом принято говорить, что куб ***А*** меньшей размерности покрывается кубом ***В*** большей размерности. Куб ***А*** включается в куб ***В***, если при образовании куба ***В*** хотя бы в одном склеивании участвует куб ***А***.

Отношение включения (покрытия) между кубами обозначается: ***А*** ⊂ ***в***. Для примера отношения включения имеют место между следующими кубами: 001⊂0Х1; 011⊂Х11⊂Х1Х.

Любой 1-куб покрывает два 0-куба, 2-куб - четыре 0-куба и четыре 1-куба, 3-куб покрывает восемь 0-кубов, двенадцать 1-кубов и шесть 2-кубов (см. рис.).

Замечание. Для кубов большей размерности студентам предлагается определить количество покрываемых кубов самостоятельно. Представляется целесообразным вывести общую формулу для - числа ***k***-кубов, покрываемых одним ***m***-кубом (***m>k***), используя элементы комбинаторики.

Покрытием булевой функции f называется такое подмножество кубов из кубического комплекса $K(f)$, которое покрывает все существенные вершины функции. В связи с тем, что любому кубу комплекса $K(f)$ можно поставить в соответствие конъюнктивный терм, для произвольного покрытия $C(f)$ можно составить ДНФ булевой функции. Частным случаем покрытия булевой функции является кубический комплекс $K^0(f)$ $(C_0(f)=K^0(f))$. Этому покрытию соответствует КДНФ.

Для примера покрытием является также комплекс $K^1(f)$:

$$C_1(f) = K^1(f) = \left\{ \begin{matrix} 0X1 \\ 01X \\ X10 \\ X11 \\ 11X \end{matrix} \right\}$$

Этому покрытию соответствует ДНФ вида:

$$f(X) = \bar{x}_1 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee x_2 \bar{x}_3 \vee x_2 x_3 \vee x_1 x_2,$$

которая ***не является*** минимальной. В качестве еще одного варианта покрытия можно использовать множество максимальных кубов.

$$C_2(f) = Z(f) = \begin{Bmatrix} 0X1 \\ X1X \end{Bmatrix}$$

Действительно, кубы, входящие в Z(*f*), покрывают все существенные вершины: 0X1$\supset$(001, 011), X1X$\supset$(010, 011, 110, 111).

<u>*Замечание.*</u> Множество максимальных кубов булевой функции всегда является ее покрытием.

Покрытию C_2(*f*) соответствует ДНФ вида:

$$f(X) = \bar{x}_1 x_3 \vee x_2.$$

Эта ДНФ ***является*** минимальной

Покрытие булевой функции, которое соответствует минимальной ДНФ, называется ***минимальным покрытием*** и обозначается $C_{min}(f)$.

Замечание: Минимальное покрытие должно сос-тоять только из максимальных кубов.

Множество максимальных кубов булевой функции лишь в частном случае может являться минималь-ным покрытием. Это справедливо для рассмотрен-ного выше примера. В общем случае, множество максимальных кубов является избыточным и для получения минимального покрытия достаточно выделить некоторое его подмножество.

Рассмотрим подобный случай на примере.

Пример. Минимизируемая булева функция задана в числовой форме: $f^3(X) = \underset{f=1}{\vee}(0,1,4,6,7).$

Найти ее минимальное покрытие и МДНФ.

По числовой форме булевой функции составим ее кубический комплекс $K^0(f)$:

$$K^0(f) = \left\{\begin{matrix} 000 \\ 001 \\ 100 \\ 110 \\ 111 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \end{matrix}$$

$$K^1(f) = \left\{\begin{matrix} 00X \\ X00 \\ 1X0 \\ 11X \end{matrix}\right\} \begin{matrix} (1-2) \\ (1-3) \\ (3-4) \\ (4-5) \end{matrix}$$

Произведя всевозможные операции склеивания между 0-кубами, получим кубический комплекс $K^1(f)$.

Все 0-кубы функции вступили хотя бы в одну операцию склеивания и, следовательно, среди них нет максимальных. Кроме того, среди 1-кубов функции нет соседних ($K^2(f)= \varnothing$). Следовательно, для данного примера множество максимальных кубов совпадает с кубическим комплексом

$K^1(f)$: $Z(f)= K^1(f)$.

Множеству максимальных кубов, образующих покрытия булевой функции, соответствует ДНФ, которая называется ***сокращенной*** (СДНФ).

Для рассматриваемого примера СДНФ:

$$f(X)=\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_3 \vee x_1x_2.$$

Из анализа покрытия существенных вершин максимальными кубами из комплекса $K^1(f)$ следует:

1. Куб (00Х) должен обязательно включаться в покрытие, так как он и только он покрывает существенную вершину (001), аналогично, только куб (11Х) покрывает существенную вершину (111). Множество максимальных кубов, без которых не может быть образовано покрытие булевой функции, называется ***ядром покрытия*** и обозначается

$$T(f): T(f)=\{00X, 11X\}.$$

2. Так как ядром покрытия, кроме существенных вершин (001) и (111), покрываются также существенные вершины (000) и (110), то не покрытой ядром остается только существенная вершина (100).

Для ее покрытия достаточно взять любой из оставшихся максимальных кубов: (X00) или (1X0).

Таким образом, для рассматриваемого примера получены два минимальных покрытия:

$$C^1_{\min}(f) = \begin{Bmatrix} 00\mathrm{X} \\ 11\mathrm{X} \\ \mathrm{X}00 \end{Bmatrix} \quad C^2_{\min}(f) = \begin{Bmatrix} 00\mathrm{X} \\ 11\mathrm{X} \\ 1\mathrm{X}0 \end{Bmatrix},$$

которым соответствуют МДНФ:

$$f_1(X) = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3$$

$$f_2(X) = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_3.$$

Выводы:

1. Задача получения минимальной ДНФ сводится к задаче получения минимального покрытия булевой функции.

2. В общем случае: получение минимального покрытия осуществляется в следующем порядке:

а) находится множество максимальных кубов;

б) выделяется ядро покрытия;

в) из множества максимальных кубов, не вошедших в ядро, выбирается такое минимальное подмножество, которое покрывает существенные вершины, не покрытые ядром.

3. Частными случаями могут являться:

- $C_{min}(f) = K^0(f)$. Минимальное покрытие совпадает с кубическим комплексом $K^0(f)$. При этом МДНФ совпадает с КДНФ;
- $C_{min}(f) = Z(f)$. Минимальное покрытие совпадает с множеством максимальных кубов $Z(f)$. При этом МДНФ совпадает с СДНФ;
- $C_{min}(f) \subset Z(f)$. Минимальное покрытие представляет собой некоторое подмножество множества максимальных кубов. При этом могут иметь место следующие случаи:

а) $C_{min}(f) = T(f)$. Минимальное покрытие совпадает с ядром.

б) $T(f) \subset C_{min}(f)$. Минимальное покрытие включает в себя ядро, как обязательную часть, и дополняется минимальным числом максимальных кубами, не принадлежащими ядру и покрывающих существенные вершины, которые не покрыты ядром.

в) $T(f) = \varnothing$. Ядро покрытия отсутствует. Покрытие формируется из минимального числа максимальных кубов. Данный случай является наиболее сложным для получения минимального покрытия.

Цена покрытия

Цена покрытия используется при решении задачи минимизации булевых функций как коли-чественная оценка качества покрытия в смысле его минимальности. Эта оценка базируется на понятии ***цены кубов***, составляющих покрытие.

Цена r-куба (S_r) представляет собой количество несвязанных координат: $S_r = n - r$.

Принято использовать два вида цены покрытия: S^a и S^b.

$$S^a = \sum_{r=0}^{m} S_r N_r ,$$

где N_r - количество r-кубов, входящих в покрытие, m - максимальная размерность кубов, входящих в покрытие. Цена S^a представляет собой сумму цен кубов, входящих в покрытие.

$$S^b = S^a + k,$$

где k – общее количество кубов, входящих в покрытие.

$$S^a = \sum_{r=0}^{m} (n-r)N_r; \qquad S^b = \sum_{r=0}^{m} (n-r+1)N_r.$$

Минимальным покрытием булевой функции называется покрытие, обладающее ***минимальной ценой S^a*** по сравнению с любым другим покрытием этой функции.

Можно показать, что покрытие, обладающее минимальной ценой S^a, обладает также и минимальной ценой S^b.

Пример. Определить цены покрытий функции

$$f^3(X) = \underset{f=1}{\vee}(0,1,4,6,7)$$

$$K^0(f) = \left\{\begin{matrix} 000 \\ 001 \\ 100 \\ 110 \\ 111 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \end{matrix}$$

$$K^1(f) = \left\{\begin{matrix} 00X \\ X00 \\ 1X0 \\ 11X \end{matrix}\right\} \begin{matrix} (1-2) \\ (1-3) \\ (3-4) \\ (4-5) \end{matrix}$$

$$C^1_{\min}(f) = \left\{\begin{matrix} 00X \\ 11X \\ X00 \end{matrix}\right\}$$

$C_0(f)=K^0(f)$: $S^a=5 \cdot 3=15$; $S^b=S^a+5=20$;

$C_1(f)=K^1(f)$: $S^a=4 \cdot 2=8$; $S^b=S^a+4=12$;

$C_2(f)=C_{min}(f)$: $S^a=3 \cdot 2=6$; $S^b=9$.

Цены покрытия S^a и S^b связаны с ДНФ, соответствующей этому покрытию, следующим образом:

- цена покрытия S^a представляет собой количество букв, входящих в ДНФ;

- цена S^b представляет сумму количества букв и количества термов, образующих ДНФ.

Цена покрытия хорошо согласуется с ценой схемы, построенной по нормальной форме функции, соответствующей этому покрытию.

Пример. Построить логическую схему, реализующую булеву функцию по МДНФ из примера. Определить цену схемы по Квайну и сравнить ее значение с ценами покрытия S^a и S^b.

В качестве исходного аналитического выражения для построения схемы возьмем МДНФ функции $f_2(X)$:

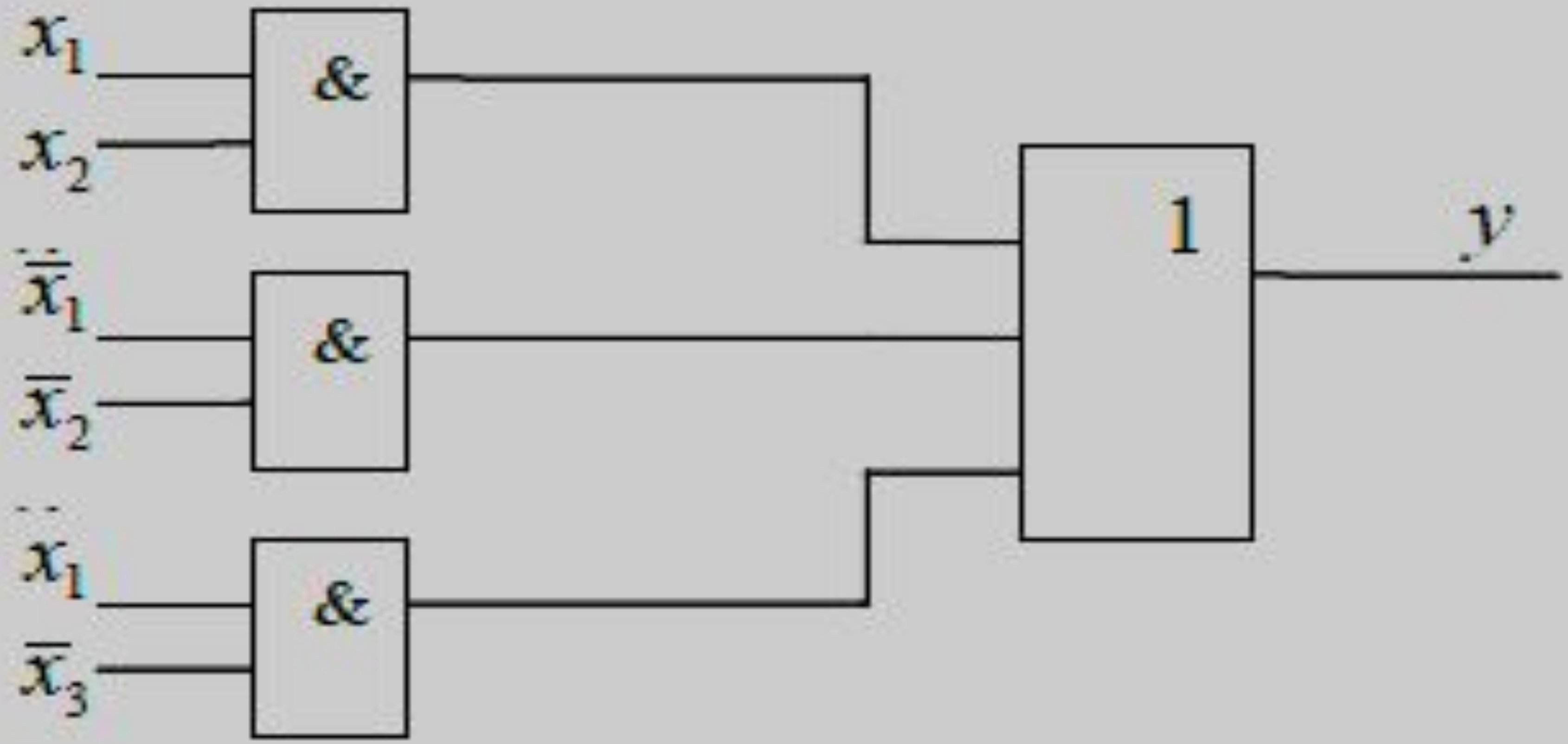
$$y = \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_3.$$

В качестве системы логических элементов используем элементы булева базиса {И, ИЛИ, НЕ}. Будем строить схему с парафазными входами, в следствии чего элементы НЕ (инверторы) не понадобятся.

Для интерпретации выражения для МДНФ в схему представим его в следующем виде:

$$y = \underbrace{\underbrace{\bar{x}_1\bar{x}_2}_{\text{И(2)}} \vee \underbrace{x_1x_2}_{\text{И(2)}} \vee \underbrace{x_1\bar{x}_3}_{\text{И(2)}}}_{\text{ИЛИ(3)}},$$

где показано соответствие термов функции и логических элементов схемы. Значения аргументов булевой функции и их инверсий интерпретируется в схеме в виде входных сигналов, а значение самой функции интерпретируется в виде выходного сигнала y.



Логическая схема, построенная по покрытию C_2

Цена схемы по Квайну, определяемая суммарным числом входов во все логические элементы схемы: S_Q=2*3 (входы в элементы И) + 1*3 (входы в элемент ИЛИ) = 9.

В свою очередь, цены покрытия по МДНФ, по которой строилась схема, $S^a = 6$, $S^b = 9$. Таким образом, $\boldsymbol{S^a < S_Q = S^b}$

<u>*Замечание.*</u> В принципе, между ценой схемы S_Q и ценами покрытия S^a и S^b существует соотношение: $\boldsymbol{S^a \leq S_Q \leq S^b}$, которое выполняется при следующих допущениях:

1. Схема строится по нормальной форме (ДНФ или КНФ).
2. Схема строится на элементах булевого базиса (И, ИЛИ).
3. На входы схемы подаются как прямые, так и инверсные значения аргументов булевой функции (схема с парафазными входами).

Нулевое покрытие булевой функции и получение МКНФ

Выше было рассмотрено покрытие булевой функции на наборах аргументов, для которых функция равна единице. Такие покрытия можно назвать ***единичными***. Наряду с единичными покрытиями существуют и ***нулевые***, покрывающие наборы аргументов, на которых функция равна нулю, то есть покрытие строится для существенных вершин, но не самой функции, а ее отрицания (инверсии).

Принципы построения нулевого покрытия такие же, как и для единичного.

Пример. Для булевой функции

$$f^3(X) = \bigvee_{f=1}(0,1,4,6,7).$$

найти минимальное нулевое покрытие и составить МКНФ.

Альтернативное числовое представление булевой функции по нулевым значениям имеет вид:

$$f^3(X) = \mathop{\&}_{f=0}(2,3,5).$$

Определим множество максимальных кубов нулевого покрытия. Над 0-кубами кубического комплекса выполним операцию склеивания

$$K^0(\overline{f}) = \begin{Bmatrix} 010 \\ 011 \\ 101 \end{Bmatrix}$$

S^a=9
S^b=12;

в результате чего получим кубический комплекс

$$K^1(\overline{f}) = \{01X\}.$$

Поскольку 0-куб (101) не склеивался с другими 0-кубами, а 1-куб – единственный ($K^2(\overline{f}) = \varnothing$), то множество максимальных кубов:

$$Z(\overline{f}) = \begin{Bmatrix} 01X \\ 101 \end{Bmatrix}$$

S^a=5
S^b=7.

Минимальное нулевое покрытие совпадает с множеством максимальных кубов:

$$C_{\min}(\overline{f}) = Z(\overline{f}).$$

Замечания.

. Для того, чтобы отличать нулевое покрытие от единичного в обозначениях кубических комплексов различной размерности, а также покрытий используется знак инверсии над функцией.

2. Цена минимального нулевого покрытия оказалась меньше цены минимального единичного покрытия.

Так как предсказать какое из минимальных пок-рытий данной функции, единичное или нулевое, будет иметь меньшую цену заранее невозможно, то для построения схемы, обладающей минималь-ной ценой по Квайну, целесообразно решать задачу минимизации в отношении обоих покрытий.

Минимизация булевых функций на картах Карно

Одним из способов графического представления булевых функций от небольшого числа переменных являются карты Карно

x_1 \ x_2x_3	00	01	11	10
0		1	1	1
1			1	1

x_1 \ x_2x_3	00	01	11	10
0	1	1		
1	1		1	1

Карты Карно функций от трех переменных

В связи с тем, что в основе формирования кубов различной размерности *k* (*k*>0) положены отношения соседства и операции склеивания, порядок проставления координат (x_2 x_3) в столбцах карты {(00), (01), (11), (10)} принят таким, чтобы соседние 0-кубы размещались в геометрически соседних клетках карты.

Пример карты Карно для булевой функции от четырех переменных, заданной в числовой форме:

$$f^4(X) = \bigvee_{f=1}(0,\ 4, 10, 13, 14).$$

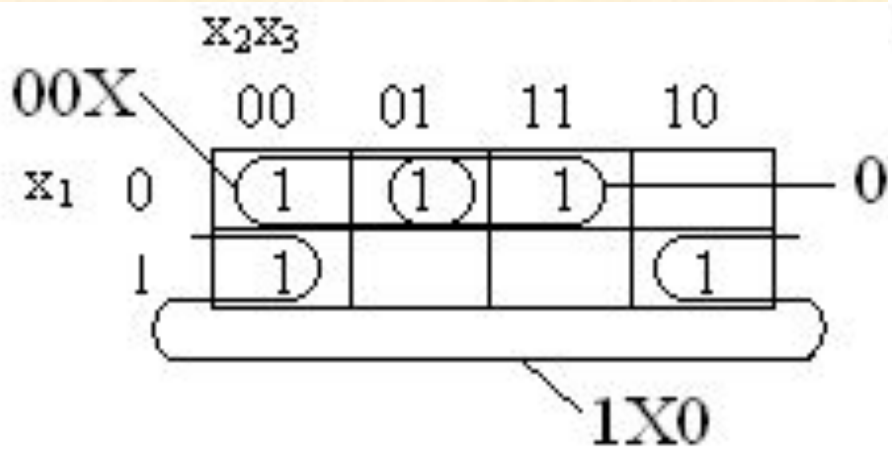
x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	1			
01	1			
11		1		1
10				1

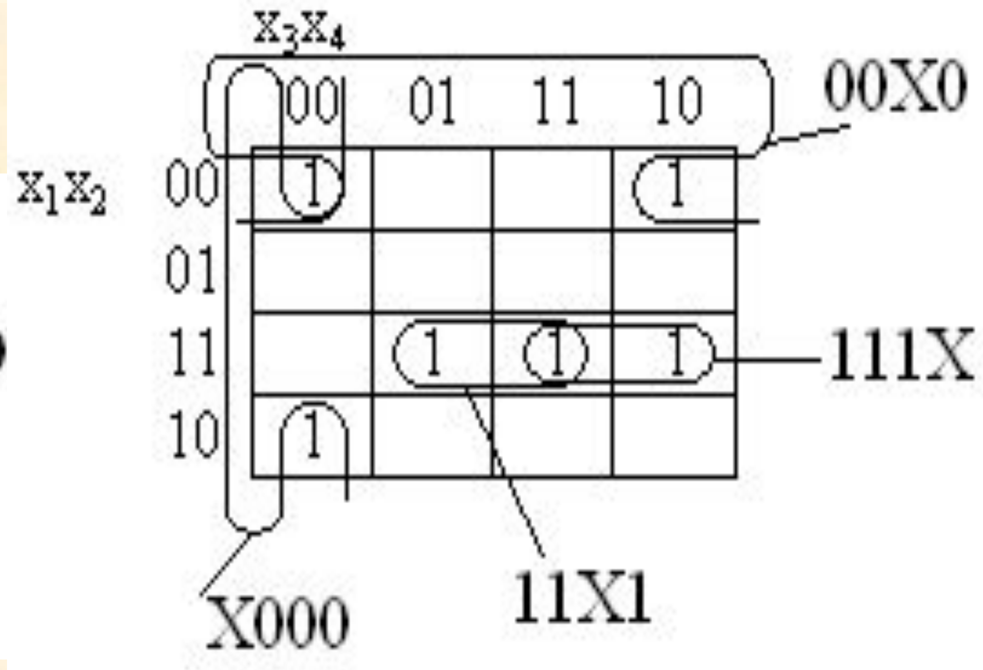
С использованием карт Карно находится минимальное покрытие функции, по которому строится ее минимальная ДНФ (КНФ).

Образование кубов на картах Карно

Две соседние клетки образуют 1-куб. При этом имеется в виду, что клетки, лежащие на границах карты, также являются соседними по отношению друг к другу.

Примеры образования 1-кубов приведены на рисунках:





Карты позволяют для функций f_1 и f_2, заданных комплексами $K^0(f_1)$ и $K^0(f_2)$

$$K^0(f_1) = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{Bmatrix}; \quad K^0(f_2) = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{Bmatrix}$$

с ценами $S^a(f_1) = 15$, $S^b(f_1) = 20$ и $S^a(f_2) = 24$, $S^b(f_2)=30$ определить покрытия

$$C(f_1) = \begin{Bmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & X & 1 \\ 1 & X & 0 \end{Bmatrix}; \quad C(f_2) = \begin{Bmatrix} X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X & 0 \\ 1 & 1 & X & 1 \\ 1 & 1 & 1 & X \end{Bmatrix}$$

с ценами $S^a(f_1) = 6$, $S^b(f_1) = 9$, $S^a(f_2) = 12$, $S^b(f_1) = 16$.

Эти покрытия являются минимальными и им соответствуют минимальные ДНФ:

$$f_1 = \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee x_1\bar{x}_3 \quad \text{и} \quad f_2 = \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4 \vee x_1x_2x_4 \vee x_1x_2x_3.$$

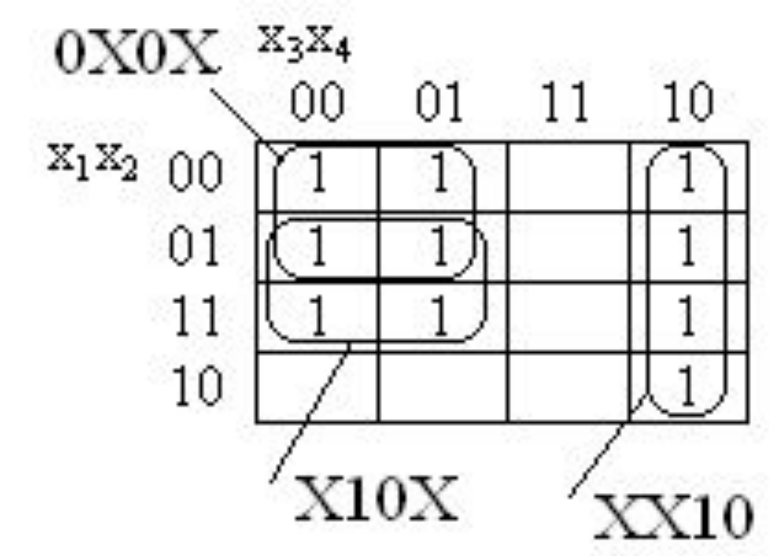
Четыре клетки карты могут объединяться, образуя 2-куб, содержащий две независимые координаты.

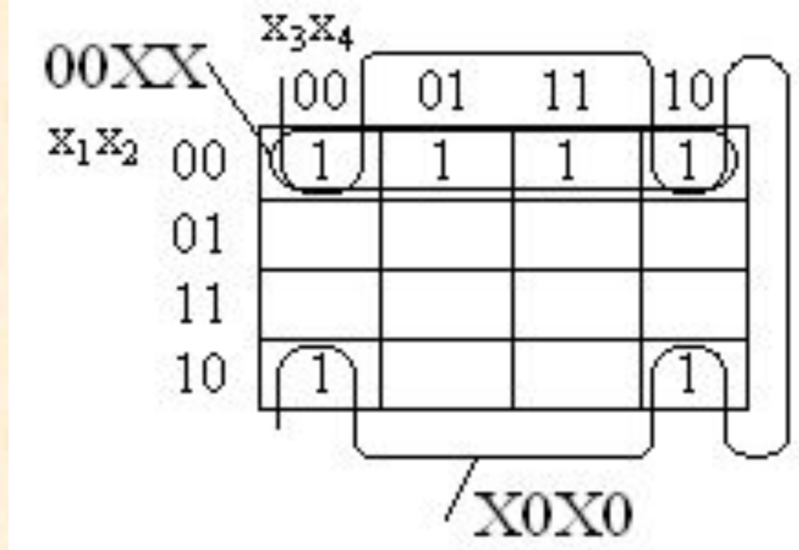
Карты построены для функций f_1, f_2 и f_3, заданных в числовой форме:

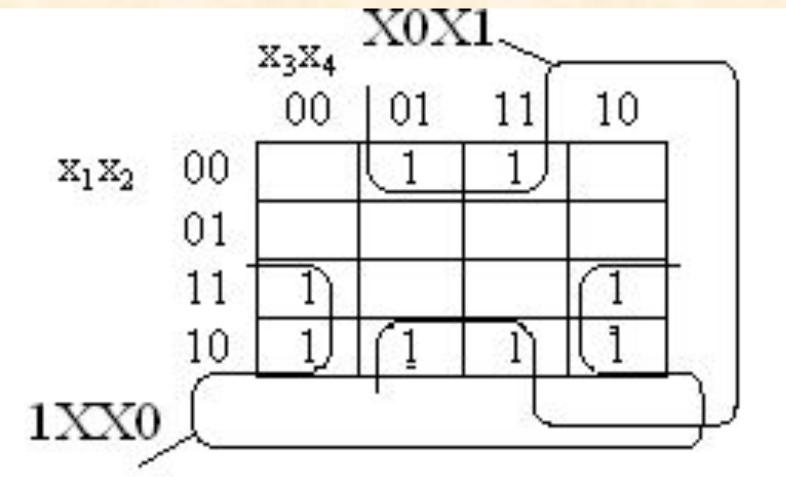
$$f_1^4(X) = \bigvee_{f=1}(0,1,2,4,5,6,10,12,13,14),$$

$$f_2^4(X) = \bigvee_{f=1}(0,1,2,3,8,10),$$

$$f_3^4(X) = \bigvee_{f=1}(1,3,8,9,10,11,12,14).$$







На картах определены покрытия:

$$C(f_1)=\begin{Bmatrix} 0 & X & 0 & X \\ X & 1 & 0 & X \\ X & X & 1 & 0 \end{Bmatrix};\quad C(f_2)=\begin{Bmatrix} 0 & 0 & X & X \\ X & 0 & X & 0 \end{Bmatrix};\quad C(f_3)=\begin{Bmatrix} 1 & X & X & 0 \\ X & 0 & X & 1 \end{Bmatrix}$$

имеющие цены $S^a(f_1) = 6$, $S^b(f_1) = 9$, $S^a(f_2) = 4$, $S^b(f_2) = 6$, $S^a(f_3) = 4$, $S^b(f_3) = 6$.

Покрытия являются минимальными.

Составленные по ним МДНФ имеют вид:

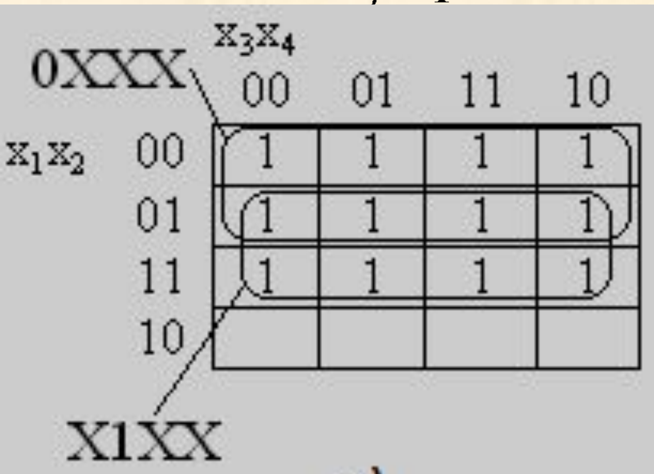
$$f_1 = \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_2\bar{x}_3 \vee x_3\bar{x}_4, \quad f_2 = x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2\bar{x}_4, \quad f_3 = x_1\bar{x}_4 \vee \bar{x}_2 x_4.$$

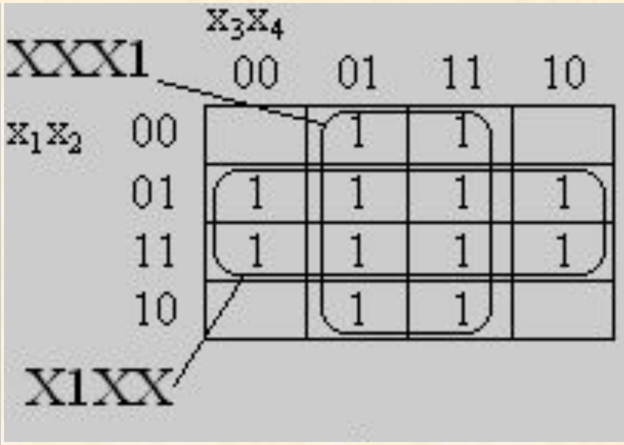
Объединение восьми клеток карты приводит к образованию 3-куба. Примеры образования 3-кубов для функций от четырех переменных f_1, f_2, f_3, заданных в числовой форме:

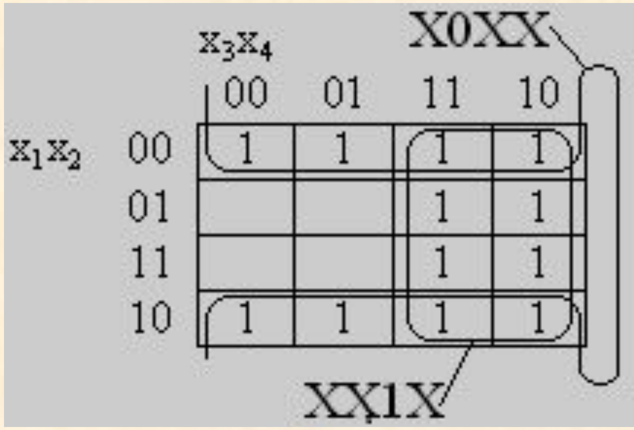
$$f_1^4(X) = \underset{f=1}{\vee}(0,1,2,3,4,5,6,7,12,13,14,15),$$

$$f_2^4(X) = \underset{f=1}{\vee}(1,3,4,5,6,7,9,11,12,13,14,15),$$

$$f_3^4(X) = \underset{f=1}{\vee}(0,1,2,3,6,7,8,9,10,11,14,15)$$







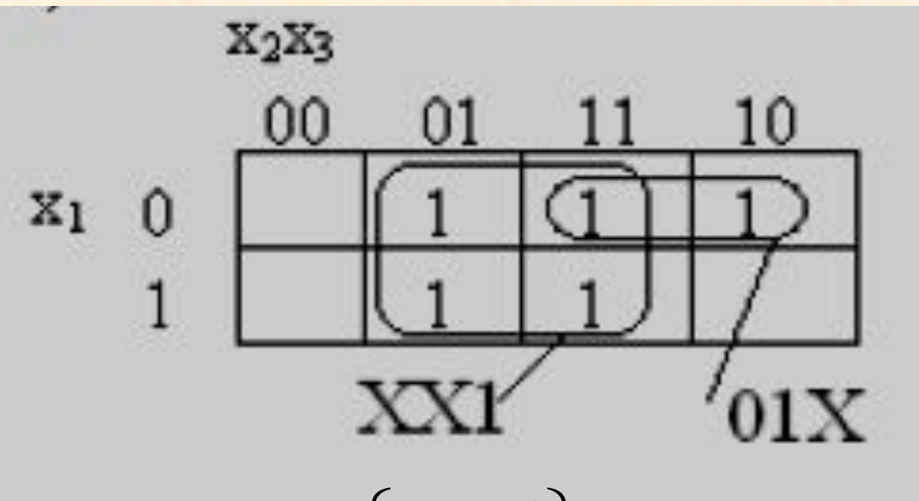
Функциям f_1, f_2, f_3 соответствуют покрытия с одинаковыми ценами $S^a = 2$, $S^b = 4$.

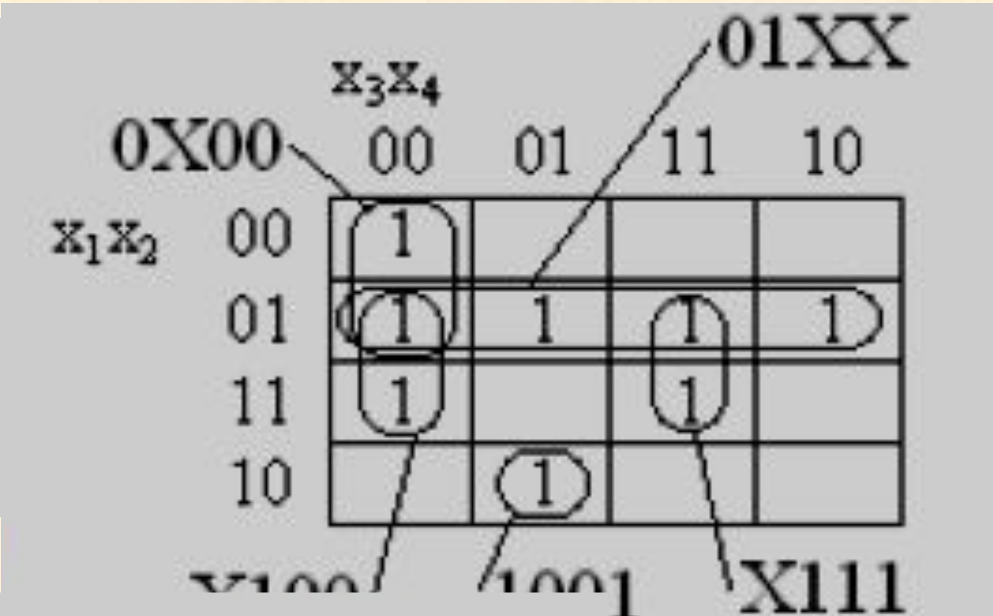
$$C(f_1) = \begin{Bmatrix} 0 & X & X & X \\ X & 1 & X & X \end{Bmatrix}; \quad C(f_2) = \begin{Bmatrix} X & X & X & 1 \\ X & 1 & X & X \end{Bmatrix}; \quad C(f_3) = \begin{Bmatrix} X & 0 & X & X \\ X & X & 1 & X \end{Bmatrix}.$$

МДНФ

Для получения минимальной ДНФ функции с использованием карты Карно определяется покрытие функции, имеющее минимальную цену S^a. Минимальное покрытие выбирается интуитивным путем на основе анализа различных вариантов покрытий минимизируемой функции. Покрытие с минимальной ценой формируется, если каждая существенная вершина функции будет покрыта кубом максимальной размерности (с наибольшим числом независимых координат) и для покрытия всех существенных вершин будет использовано наименьшее число кубов.

$$f_1^3(X) = \underset{f=1}{\vee}(1,2,3,5,6,), \quad f_2^4(X) = \underset{f=1}{\vee}(0,4,5,6,7,9,12,15).$$





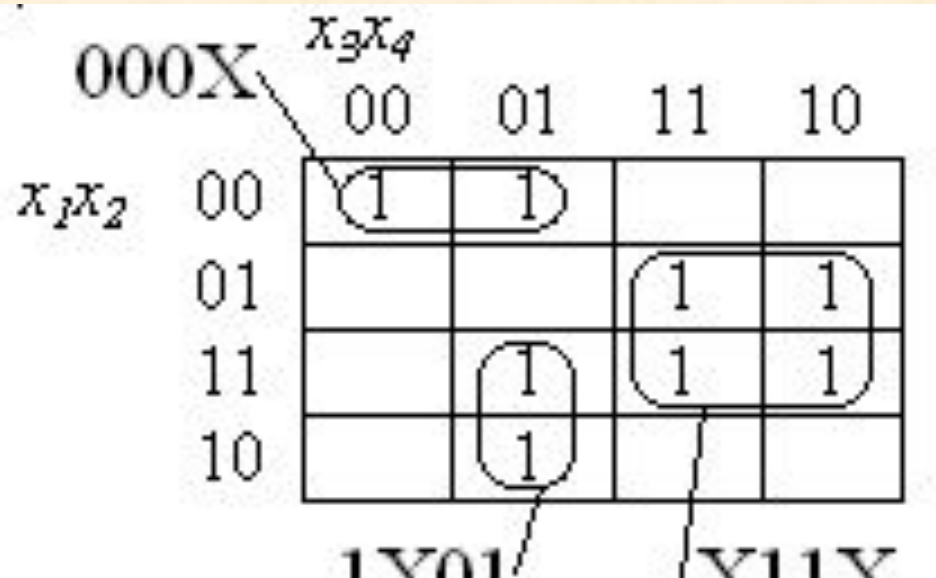
$$C_{\min}(f_1) = \begin{Bmatrix} XX1 \\ 01X \end{Bmatrix} \quad S^a = 3, \quad S^b = 5,$$

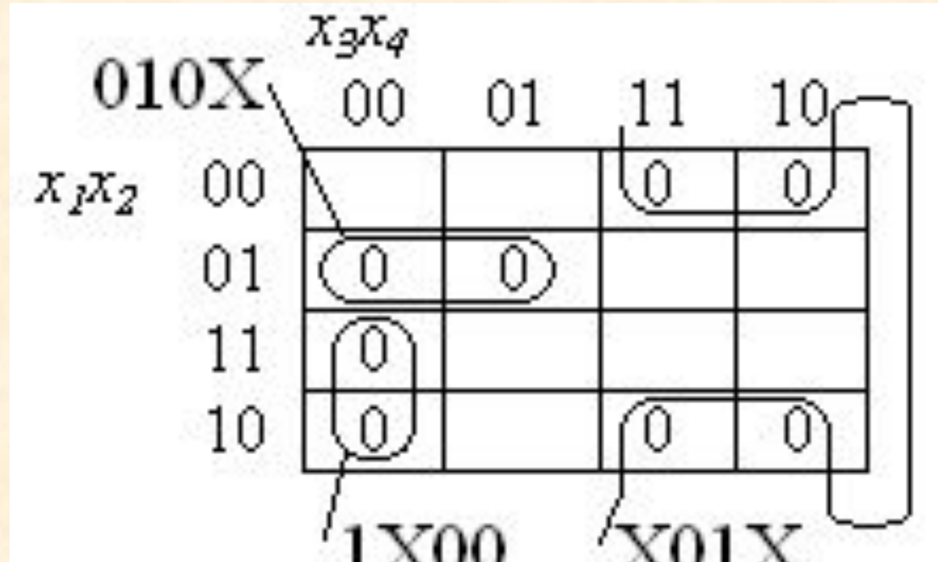
$$f_1 = x_3 \vee \bar{x}_1 x_2.$$

$$C_{min}(f_2) = \begin{Bmatrix} 1001 \\ 0X00 \\ X100 \\ X111 \\ 01XX \end{Bmatrix} \quad S^a = 15, \quad S^b = 20$$

$$f_2 = x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_2x_3x_4 \vee \bar{x}_1x_2.$$

Пример. Определить минимальные ДНФ и КНФ функции с использованием карт Карно.





Данной функции соответствует минимальная ДНФ:

$$f = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_3x_4 \vee x_2x_3.$$ $S^a = 8$, $S^b = 11$

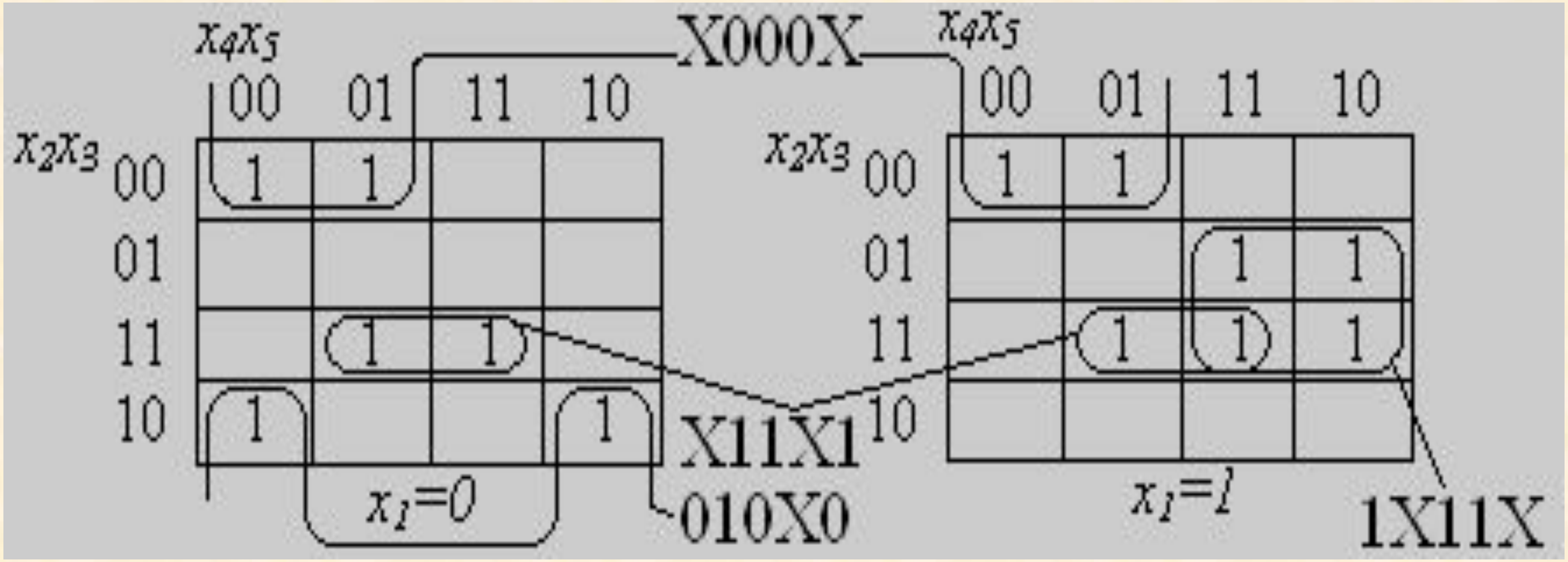
Минимальная КНФ: $S^a = 8$, $S^b = 11$

$$f = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_3 \vee x_4)(x_2 \vee \bar{x}_3).$$

Для минимизации функций от пяти и шести переменных используются соответственно две и четыре четырехмерные карты Карно.

Пример минимизации функции пяти переменных

$$f^5(X) = \bigvee_{f=1}(0,1,8,10,13,15,16,17,22,23,29,30,31).$$



Минимальное покрытие функции:

$$C_{\min}(f)=\begin{Bmatrix} X & 0 & 0 & 0 & X \\ X & 1 & 1 & X & 1 \\ 0 & 1 & 0 & X & 0 \\ 1 & X & 1 & 1 & X \end{Bmatrix}.$$

имеет цены $S^a = 13$, $S^b = 17$. Ему соответствует МДНФ:

$$f=\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_2x_3x_5 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_5 \vee x_1x_3x_4.$$

Разделение четырехмерных карт Карно произво-дится по значению аргумента x_1: для левой карты x_1=0, для правой - x_1=1. Каждая клетка Карно для функции от пяти переменных имеет пять соседних, четыре из которых размещаются в пределах своей в соседней карте и имеет в ней одинаковые с исходной клеткой координаты x_2, x_3, x_4, x_5, отличаясь только по координате x_1.

Кубы, используемые в покрытии функции, могут располагаться:

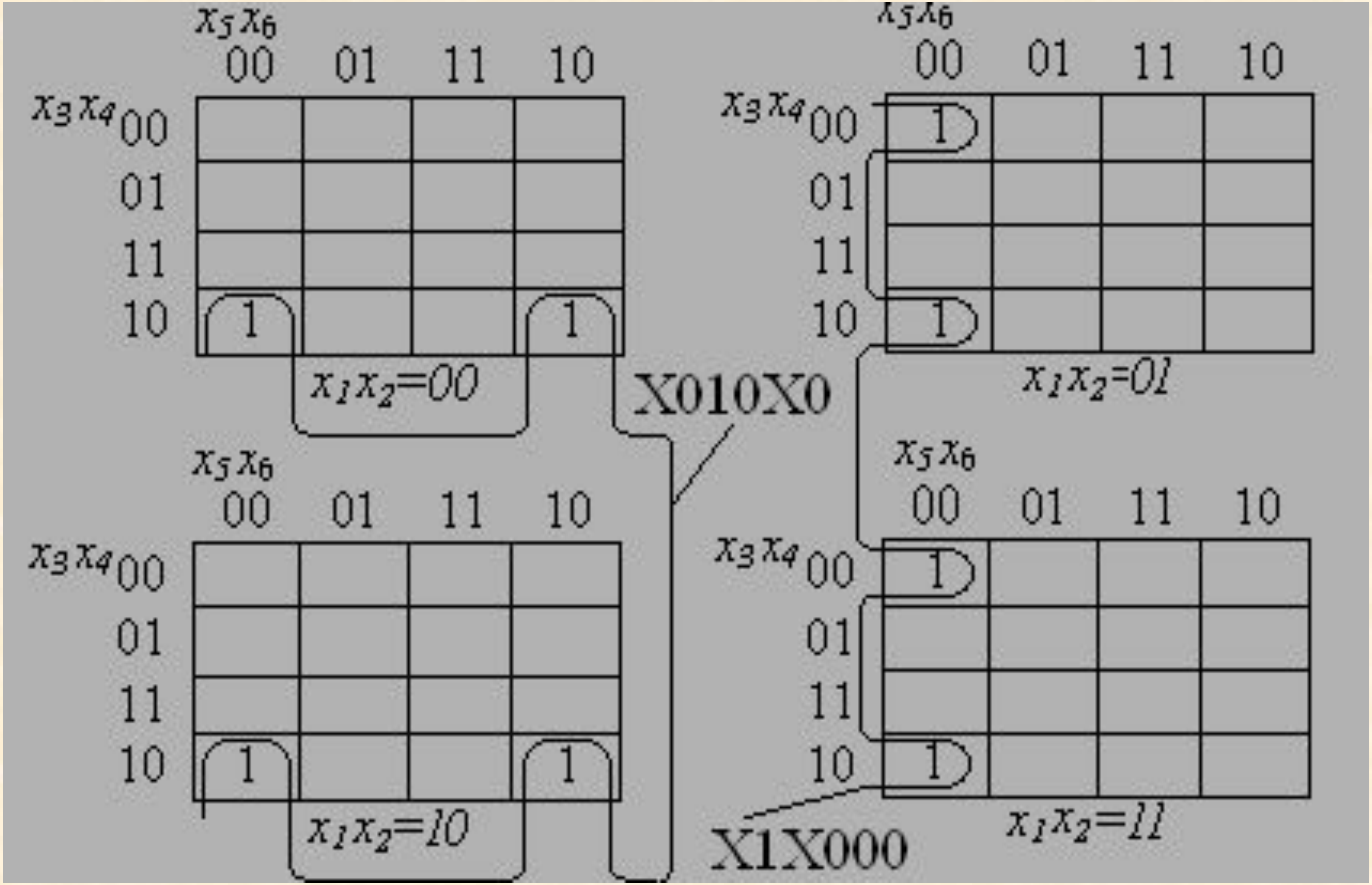
а) целиком в одной из четырехместных карт (при x_1=0 - в левой, при x_1=1 – в правой);

б) в обеих четырехместных картах (при этом координата x_1 - независимая: x_1=X).

Рассмотрим принцип размещения карт для представления функций шести переменных

Функция от шести переменных задана комплексом с ценой $S^a = 48$:

$$K^0 = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$



Минимальное покрытие этой функции имеет цену $S^a = 8$.

При минимизации функций от большого числа переменных карты Карно неудобны, в этом случае для решения задач минимизации используются алгебраические методы. Минимальным ДНФ и КНФ функций соответствуют минимальные двухуровневые логические схемы.

Минимизация частично определенных булевых функций

При минимизации частично определенных булевых функций в клетки карты Карно, соответствующие наборам аргументов, на которых функция не определена, ставится символ ***d*** (*don’t care*).

Пример. Пусть задана интервальная формула, вычисляющая значение некоторой переменной *r* от значения переменной *x*,

$$r = \begin{cases} FR1, & \text{при} \quad x < k_1; \\ FR2, & \text{при} \quad k_1 \le x \le k_2; \\ FR3, & \text{при} \quad x > k_2, \end{cases}$$

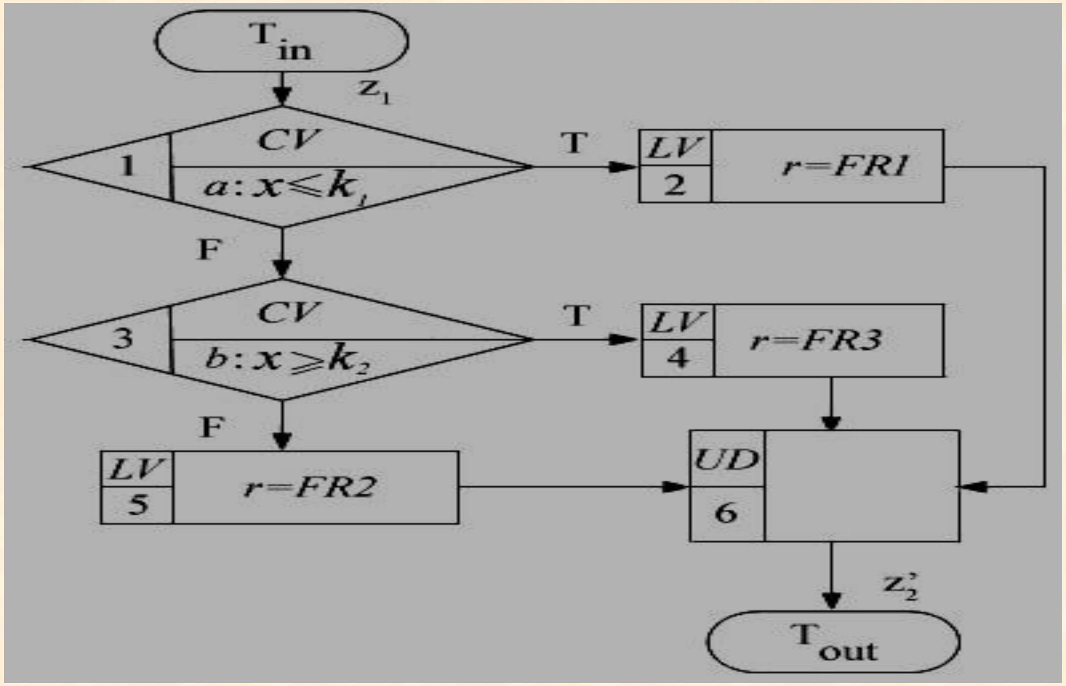
где *FR*1, *FR*2 и *FR*3 - линейные формулы, k_1 и k_2 - некоторые константы: $k_1 \neq k_2$ и $k_1 < k_2$.

Введем булевы переменные: *a* : $x<k_1$, , *b* : $x>k_2$.

Построим схемы алгоритмов для вычисления *r*.

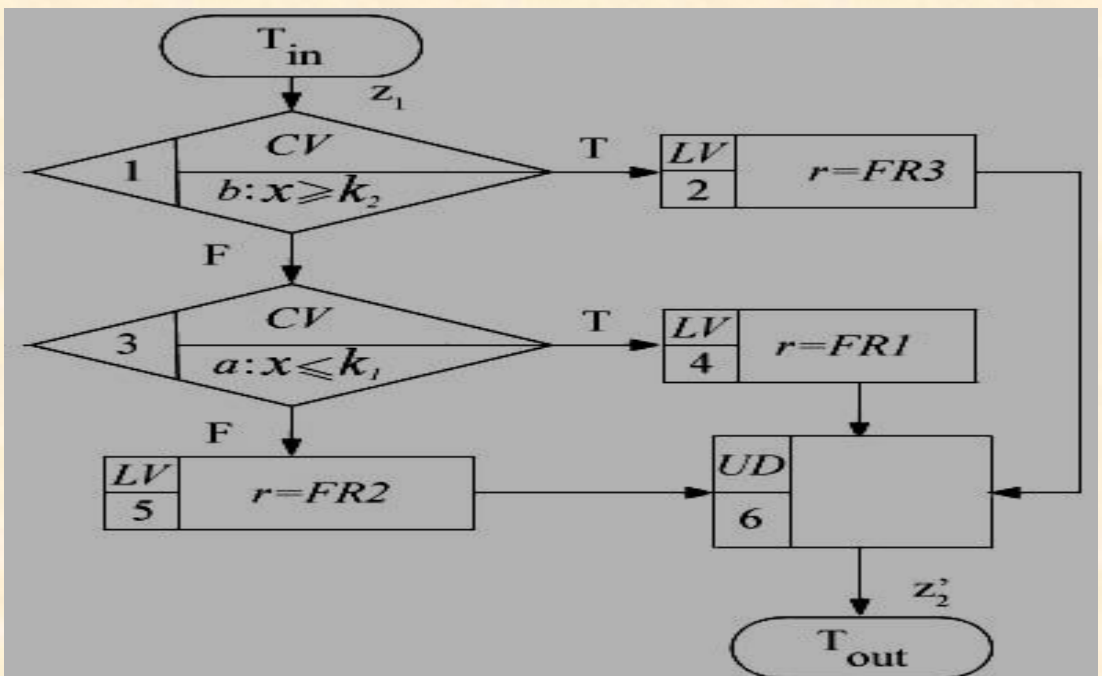
Для первого алгоритма сначала проверим условие *a,* а затем *b*.

Для второго – сначала условие *b,* а затем *a*.



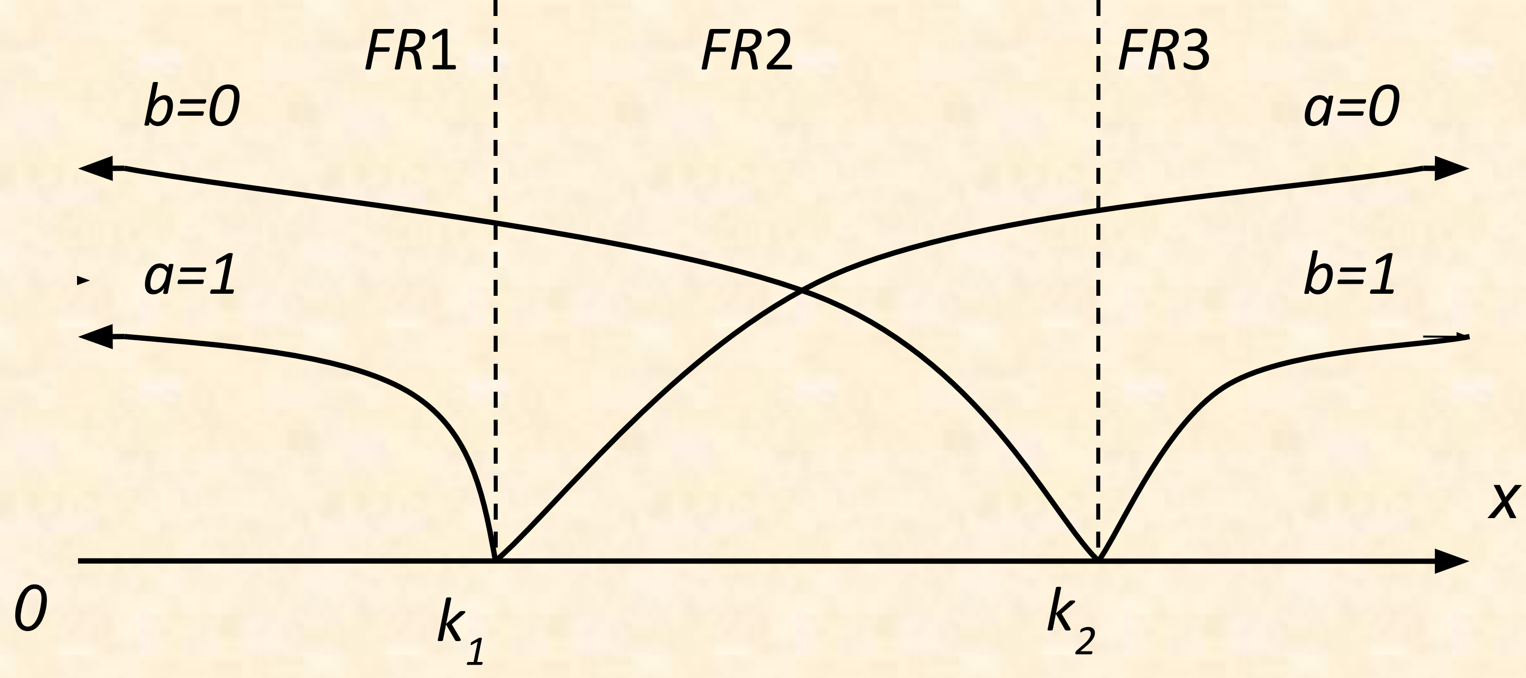
ab	00	01	11	10
	FR2	FR3	**FR1**	FR1

$$C_1(r)=\left\{\begin{array}{cc|c} a & b & r \\ \hline 1 & \times & /FR1/ \\ 0 & 1 & /FR3/ \\ 0 & 0 & /FR2/ \end{array}\right.$$



ab	00	01	11	10
	FR2	FR3	**FR3**	FR1

$$C_2(r)=\left\{\begin{array}{cc|c} a & b & r \\ \hline \times & 1 & /FR3/ \\ 1 & 0 & /FR1/ \\ 0 & 0 & /FR2/ \end{array}\right.$$



$$a : x<k_1 , \quad b : x>k_2$$

Действительно, переменная *x*, входящая в *a* и *b*, не может одновременно принадлежать как диапазону $A=\{x \mid x<k_1\}$, так и диапазону $B=\{x \mid x> k_2\}$, при $k_1 \neq k_2$ и $k_1 < k_2$.

Пример. Найти минимальную ДНФ функции, используемых для построения комбинационной схемы, в которой выполняется операция суммирования двоичных кодов по *mod* 3:

$$y_1y_2 = (a_1a_2 + b_1b_2)_{mod\,3}.$$

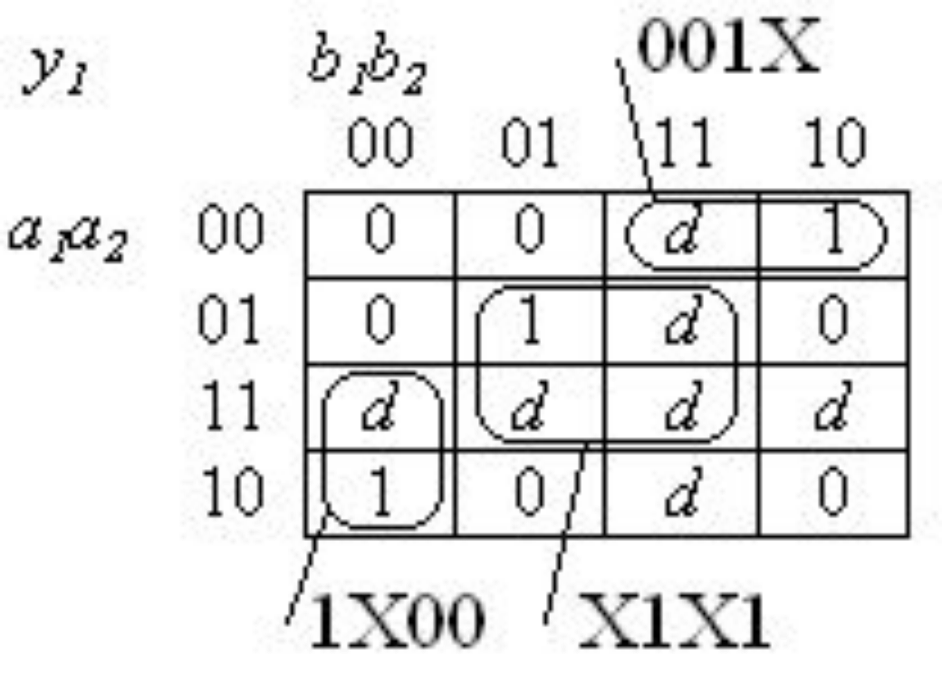
Предполагается, что слагаемые имеют значения $a_1a_2 \leq 2$; $b_1b_2 \leq 2$, т.е. наборы $a_1a_2 = 11$ и $b_1b_2 = 11$ отсутствуют и рассматриваются как несущест-венные.

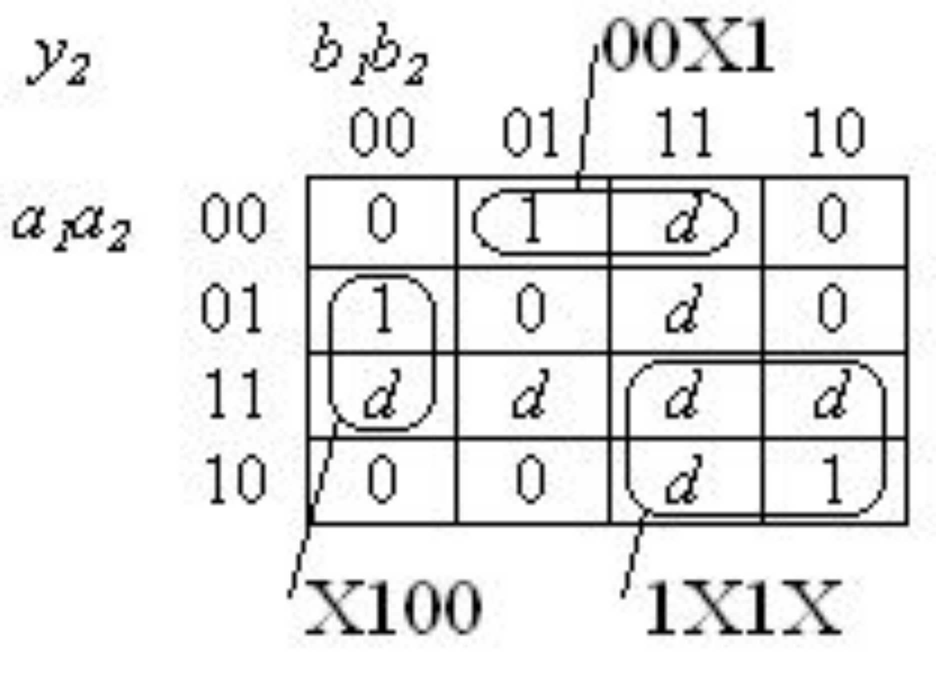
Для функции y_1y_2 составим таблицу истинности.

a_1	a_2	b_1	b_2	(+) mod3	y_1	y_2
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	0	2	1	0
0	0	1	1	*d*	*d*	*d*
0	1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	2	1	0
0	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	*d*	*d*	*d*

a_1	a_2	B_1	b_2	(+) mod3	y_1	y_2
1	0	0	0	2	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	1	*d*	*d*	*d*
1	1	0	0	*d*	*d*	*d*
1	1	0	1	*d*	*d*	*d*
1	1	1	0	*d*	*d*	*d*
1	1	1	1	*d*	*d*	*d*

Функции $y_1 = f_1(a_1,a_2,b_1,b_2)$ и $y_2 = f_2(a_1,a_2,b_1,b_2)$ представлены на картах Карно. На картах нулевые значения y_1 и y_2 обозначены 0, единичные – 1, несущественные – знаком ***d***.





С использованием несущественных вершин определяются минимальные покрытия:

$$C(y_1)=\begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 & X \\ 1 & X & 0 & 0 \\ X & 1 & X & 1 \end{Bmatrix}; \quad C(y_2)=\begin{Bmatrix} 0 & 0 & X & 1 \\ X & 1 & 0 & 0 \\ 1 & X & 1 & X \end{Bmatrix}$$

с ценой $S^a = 8$

Покрытиям соответствуют минимальные ДНФ:

$$y_1 = \overline{a}_1\overline{a}_2 b_1 \vee a_1\overline{b}_1\overline{b}_2 \vee a_2 b_2,$$

$$y_2 = \overline{a}_1\overline{a}_2 b_2 \vee a_2\overline{b}_1\overline{b}_2 \vee a_1 b_1.$$

Замечание. После минимизации функция становится полностью определенной. Значения функции на несущественных наборах доопределяется до 1, если набор использовался при минимизации, и до 0, если нет.

Импликанты булевой функции. Системы импликант

Решение задачи минимизации булевой функции методом Квайна и усовершенствованным методом Квайна-Мак-Класки базируется на понятиях импликант и их систем.

Булева функция $g(X)$ называется ***импликантой*** булевой функции $f(X)$, если для любого набора аргументов, на которых $g(X)=1$, $f(X)$ также равна единице.

$$g(\widetilde{X})=1 \Rightarrow f(\widetilde{X})=1, \quad \text{где} \quad \widetilde{X} - \text{некоторый набор аргументов.}$$

Свойства импликант:

1. Между импликантой и самой функцией существует отношение включения $g(X) \subset f(X)$.

2. Можно утверждать, что для любого набора аргументов, на котором функция равна нулю, ее импликанта также равна нулю.

3. Если $g(X)$ и $\phi(X)$ являются импликантами функции $f(X)$, то их дизъюнкция также является импликантой этой функции.

Простейшими примерами импликант могут служить конъюнктивные термы, входящие в произвольную ДНФ данной функции.

Пример. Импликантами функции $f^3(X) = \bigvee_{f=1}(0, 1, 4, 6, 7)$ являются

$$x_1x_2x_3,\ x_1x_2\bar{x}_3,\ x_1x_2,\ \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3,\ x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2.$$

Т.е. произвольная дизъюнкция этих термов также является импликантой функции.

Простой (***первичной***) ***импликантой*** булевой функции называется конъюнктивный терм, который сам является импликантой этой функции, но никакая его собственная часть уже не является импликантой этой функции.

Под ***собственной частью терма*** понимается новый терм, полученный из исходного, путем вычеркивания произвольного числа букв.

Для функции примера простыми импликантами являются:

$$\overline{x}_1\overline{x}_2,\ x_1x_2,\ \overline{x}_2\overline{x}_3,\ x_1\overline{x}_3.$$

Множеству простых импликант можно поставить в соответствие множество максимальных кубов.

Дизъюнкция всех простых импликант булевой функции представляет собой ДНФ этой функции, которая называется ***сокращенной - СДНФ***

Для функции примера СДНФ имеет вид:

$$y = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_3.$$

Понятие «сокращенная» присвоено ДНФ в том смысле, что она, как правило, содержит меньшее количество букв и термов по сравнению с КДНФ.

Для нашего примера КДНФ содержит 15 букв и 5 термов, а СДНФ - 8 букв и 4 терма.

Аналогия между импликантами и кубическим представлением булевой функции

Любому кубу из $K(f)$ можно поставить в соответствие конъюнктивный терм, который можно рассматривать как импликанту булевой функции.

Любой простой импликанте булевой функции соответствует максимальный куб, и, в свою очередь, множество всех простых импликант соответствует множеству $Z(f)$ всех максимальных кубов $K(f)$.

Таким образом, можно провести некоторую аналогию между сокращенной СДНФ и $Z(f)$.

В отношении импликант булевой функции также как и в отношении кубов, соответствующих им, существует отношение покрытия.

Принято считать, что импликанта булевой функции покрывает некоторую существенную вершину этой функции или, в общем случае, некоторый куб из $K(f)$, если значение импликанты на наборе аргументов, представляющем данную существенную вершину, равно 1 или, в общем случае, значение импликанты равно 1 для всех существенных вершин покрываемых кубом из $K(f)$.

Наример, импликанта x_1x_2 покрывает сущест-венные вершины (110, 111) и в свою очередь покрывает куб 11Х.

Множество импликант булевой функции образует ***полную систему импликант***, если любая сущест-венная вершина булевой функции покрывается хотя бы одной импликантой этого множества.

Если считать, что в полную систему импликант включаются импликанты только в виде конъюнк-тивных термов и не включаются импликанты в виде дизъюнкции термов, то полной системе импликант можно поставить в соответствие некоторое множество кубов из *K* (*f*) образующих покрытие булевой функции *f*.

Так, например, кубам из кубического комплекса $K^{\circ}(f)$ соответствует полная система импликант, представляющая собой множество конституент 1 данной функции f. В свою очередь, множеству максимальных кубов $Z(f)$, естественно образующих покрытие булевой функции, соответствует полная система простых импликант.

Система простых импликант называется ***приведен-ной,*** если она является полной, а никакая ее собственная часть уже не образует полную систему импликант.

Пример. Проверить, является ли система простых импликант $\{x_1x_2,\ \bar{x}_1\bar{x}_2,\ \bar{x}_2\bar{x}_3,\ x_1\bar{x}_3\}$ для функции $y = x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_3$ полной и, если да, то является ли она приведенной.

Для рассматриваемой функции эта система прос-тых импликант является полной, но не является приведенной, т.к. из нее можно исключить одну из импликант $(\bar{x}_2\bar{x}_3$ или $x_1\bar{x}_3)$ не нарушая полноты системы.

Дизъюнкция всех простых импликант, образующих некоторую приведенную систему называется ***тупиковой ДНФ*** булевой функции или ***ТДНФ.***

Для функции примера существуют две ТДНФ:

1. $y = x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3;$
2. $y = x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_1 \bar{x}_3.$

В данном случае они совпадают с минимальной ДНФ. Но в общем случае это утверждение не справедливо, т.е. минимальная ДНФ обязательно является ТДНФ, но не любая ТДНФ является МДНФ.

Простая импликанта булевой функции называется ***существенной***, если она и только она покрывает некоторую существенную вершину этой функции.

Множество существенных импликант соответствует максимальным кубам, образующим ядро покрытия.

Минимизация булевых функций методом Квайна-Мак-Класки

Для решения канонической задачи минимизации методом Квайна-Мак-Класки применяется следующая последовательность действий

1. Нахождение множества максимальных кубов (простых импликант) булевой функции.
2. Выделение ядра покрытия (определение множества существенных импликант).
3. Дополнение множества кубов, принадлежащих ядру покрытия, минимальным подмножеством из множества максимальных кубов, не входящих в ядро покрытия, для получения покрытия с минимальной ценой.

С точки зрения последовательного преобразова-ния ДНФ булевой функции с целью их упрощения каноническая задача минимизации может быть представлена в виде:

КДНФ ⇒ СДНФ ⇒ ТДНФ ⇒ МДНФ.

Распространение терминологии в отношении нуле-вого покрытия базируется на понятии ***имплиценты*** (как соответствие импликанте) и ***системы имплицент.***

Нахождение множества максимальных кубов (простых импликант) булевой функции

Рассмотрим процедуру нахождения простых импликант на следующем примере

Пример. ***Минимизация булевой функции методом Квайна-Мак-Класки.***

Найти множество простых импликант булевой функции заданной в числовой форме:

$$f^4(X) = \bigvee_{f=1}(0, 1, 5, 7, 8, 10, 12, 14, 15)$$

На этом этапе производятся всевозможные склеивания кубов меньшей размерности с целью получения кубов большей размерности. Для сокращения количества операций сравнения кубов на предмет их склеивания целесообразно производить упорядочивание кубов одинаковой размерности путем разделения их на группы по количеству

При таком подходе в операцию склеивания могут вступать только кубы, принадлежащие двум сосед-ним группам, то есть такие кубы, количество еди-ничных координат в которых отличается на едини-цу. Кроме того, рекомендуется проводить нумера-цию кубов одинаковой размерности с фиксацией пары склеиваемых кубов при образовании куба большей размерности как результат склеивания.

По ходу склеивания необходимо осуществлять от-метку кубов, вступающих в операцию склеивания. Тогда после завершения операций по склеиванию кубов все неотмеченные кубы будут представлять собой множество максимальных кубов, не участвовавших ни в

Результат этого этапа представлен в таблице

$K^0(f)$			$K^1(f)$				$K^2(f)$			$K^3(f)$	$Z(f)$	
1	0000	∨	1	000X	1-2		1	1XX0	4-8	∅	1	1XX0
	--------		2	X000	1-3		2	1XX0	5-7		2	000X
2	0001	∨		---------							3	X000
3	1000	∨	3	0X01	2-4						4	0X01
	--------		4	10X0	3-5	∨					5	01X1
4	0101	∨	5	1X00	3-6	∨					6	X111
5	1010	∨		---------							7	111X
6	1100	∨	6	01X1	4-7							
	--------		7	1X10	5-8	∨						
7	0111	∨	8	11X0	6-8	∨						
8	1110	∨		---------								
	--------		9	X111	7-9							
9	1111	∨	10	111X	8-9							

Замечания.

.При образовании 2-кубов получено два одинаковых 2-куба как результата склеивания двух различных пар соседних 1-кубов. Точно также при образовании 3-кубов должно получаться три одинаковых 3-куба как результата склеивания трех различных пар соседних 2-кубов.

2. Можно проследить за уменьшением цены покрытий заданной булевой функции, получаемых из кубов различной размерности.

3. При минимизации не полностью определенных булевых функций производится дополнение множества 0-кубов (существенные вершины) булевой функции множеством безразличных наборов $N(f)$ с целью образования кубов большей

Определение ядра покрытия

Для выполнения этого этапа первоначально строится таблица покрытий, строки которой соответствуют мак-симальным кубам покрытия, а столбцы – существен-ным вершинам булевой функции. Безразличные набо-ры аргументов при минимизации не полностью опре-деленной булевой функции в таблице покрытий не участвуют.

Таблица покрытий отображает отношение покрытия между существенными вершинами булевой функции и максимальными кубами. Для этого на пересечении *i*-ой строки и *j*-го столбца таблицы делается соответ-ствующая отметка в том случае, если максимальный куб из *i*-ой строки покрывает существенную вершину из *j*-го столбца.

Таблица покрытий с соответствующими

Максимальные кубы	Существенные вершины								
	0000	0001	0101	0111	1000	1010	1110	1110	1111
1XX0					×	×	×	×	
000X	×	×							
X000	×				×				
0X01		×	×						
01X1			×	×					
X111				×					×
111X								×	×

Замечания.

1.Таблицу покрытий называют также импликантной таблицей в связи с тем, что максимальные кубы соответствуют простым (первичным) импликантам булевой функции, а существенные вершины - конституентам единицы булевой функции.

2. Для полностью определенных булевых функций количество меток в строке таблицы покрытий, соответствующей максимальному кубу размерности r, равно 2^r. Для не полностью определенных функций количество меток может быть меньше 2^r в том случае, если в образовании r-куба участвуют кроме существенных вершин и безразличные наборы.
Для выделения ядра покрытия в таблице покрытий ищутся столбцы, в которых содержится единственная метка. Это означает, что существенная вершина, соответствующая такому столбцу, покрывается только одним из максимальных кубов. В соответствии с этим максимальный куб, который один и только один покрывает некоторую существенную вершину булевой функции, включается в обязательную часть покрытия, называемую ядром.

Как видно из таблицы, в нашем примере кубом ядра будет являться куб: $T(f)=\{1XX0\}$.

Определение множества минимальных покрытий

На этом этапе из множества максимальных кубов, не принадлежащих ядру покрытия, выделяются такие минимальные подмножества, с помощью каждого из которых покрываются оставшиеся вершины (не покрытые ядром). Реализацию этого этапа целесообразно производить с использова-нием упрощенной таблицы покрытий. В ней вычеркнуты все кубы, принадлежащие ядру, и вершины, покрываемые ядром.

На данном этапе целесообразно ввести обозначение максимальных кубов и существенных вершин. Максимальные кубы обозначены прописными буквами *A, ..., F*, а существенные вершины строчными буквами *a, ..., e.*

Максимальные кубы		Существенные вершины				
		0000	0001	0101	0111	1111
A	000X	×	×			
B	X000	×				
C	0X01		×	×		
D	01X1			×	×	
E	X111				×	×
F	111X					×
		a	*b*	*c*	*d*	*e*

Для решения задачи третьего этапа можно использовать один из трех методов или их комбинацию:

1) метод простого перебора;

2) метод Петрика;

3) дальнейшее упрощение таблицы покрытий.

Метод перебора целесообразно применять для упрощенной таблицы небольшого объема. Он не дает гаран-тии получения всех максимальных покрытий.

Для рассматриваемого примера все кубы, входящие в упрощенную таблицу покрытий, обладают одной размерностью, т.е. необходимо выбрать минимальное количество этих кубов для покрытия всех оставшихся существенных вершин.

Из таблицы видно, что минимальное число кубов равно трем. К возможным вариантам минимальных покрытий относятся

$$C^1_{\min}(f) = \begin{Bmatrix} T \\ A \\ C \\ E \end{Bmatrix}; \quad C^2_{\min}(f) = \begin{Bmatrix} T \\ B \\ C \\ E \end{Bmatrix}; \quad \ldots$$

Метод Петрика основан на составлении булева выраже-ния, определяющего условие покрытия всех существен-ных вершин булевой функции из упрощенной импликан-тной таблицы. Булево выражение представляет собой конъюнкцию дизъюнктивных термов, каждый из которых включает в себя совокупность всех простых импликант, покрывающих одну существенную вершину функции. Полученное выражение преобразуется в дизъюнктивную форму и минимизируется с использованием законов поглощения и тавтологии. Каждый конъюнктивный терм дизъюнктивной формы соответствует одному из вариан-тов покрытия, из которых выбирается минимальное.

Достоинством метода Петрика является возможность по-лучения **всех** минимальных покрытий булевой функции.

Для рассматриваемого примера булево выражение, опре-деляющее условие покрытия всех существенных вершин в соответствии с таблицей будет иметь вид:

$$Y = (A \vee B)(A \vee C)(C \vee D)(D \vee E)(E \vee F).$$

Это выражение представлено в конъюнктивной форме. Для его преобразования в дизъюнктивную форму выпол-няется попарное логическое умножение дизъюнктивных термов.

Замечание. В целях максимального упрощения этапа преобразования выражения Y перемножаются термы, содержащие по возможности максимальное количество букв. После логического умножения двух первых пар дизъюнктивных термов получим выражение:

$Y = (AA \vee AC \vee AB \vee BC)(CD \vee CE \vee DD \vee DE)(E \vee F)$, которое, после применения законов тавтологии и поглощения, После логического умножения последних двух скобок и последующего упрощения получим:

$$Y=(A \vee BC)(DE \vee DF \vee CEE \vee CEF).$$

Умножив оставшуюся пару скобок, получим выражение Y в дизъюнктивной форме:

$$Y = ADE \vee ADF \vee ACE \vee BCDE \vee BCDF \vee BCCE =$$
$$= ADE \vee ADF \vee ACE \vee BCE \vee BCDF.$$

Каждый из пяти конъюнктивных термов соответствуют покрытию булевой функции (с учетом дополнения ядром), каждому из которых можно поставить в соответствие тупиковую ДНФ.

Последний терм не соответствует минимальному покрытию, то есть данная функция имеет четыре минимальных покрытия.

$$C_{\min}^{1}(f)=\begin{Bmatrix}1 & X & X & 0\\ 0 & 0 & 0 & X\\ 0 & 1 & X & 1\\ X & 1 & 1 & 1\end{Bmatrix};\ C_{\min}^{2}(f)=\begin{Bmatrix}1 & X & X & 0\\ 0 & 0 & 0 & X\\ 0 & 1 & X & 1\\ 1 & 1 & 1 & X\end{Bmatrix};$$

$$C_{\min}^{3}(f)=\begin{Bmatrix}1 & X & X & 0\\ 0 & 0 & 0 & X\\ 0 & X & 0 & 1\\ X & 1 & 1 & 1\end{Bmatrix};\ C_{\min}^{4}(f)=\begin{Bmatrix}1 & X & X & 0\\ X & 0 & 0 & 0\\ 0 & X & 0 & 1\\ X & 1 & 1 & 1\end{Bmatrix}.$$

Для всех минимальных покрытий $S^a=11;\ S^b=15.$ Минимальные ДНФ, соответствующие этим покрытиям:

МДНФ$_1$: $y = x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_4 \vee x_2 x_3 x_4;$

МДНФ$_2$: $y = x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_4 \vee x_1 x_2 x_3;$

МДНФ$_3$: $y = x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 x_4 \vee x_2 x_3 x_4;$

МДНФ$_4$: $y = x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 x_4 \vee x_2 x_3 x_4;$

Метод дальнейшего упрощения таблицы покрытий состоит в применении двух операций:

а) вычеркивание “лишних” строк;

б) вычеркивание “лишних” столбцов.

Операции вычеркивания строк и столбцов базируются на следующих правилах:

- если множество меток *i*-й строки является подмножеством меток *j*-й строки и куб *i* имеет не большую размерность, чем куб *j*, то из таблицы можно вычеркнуть *i*-ю строку, так как существенные вершины покрываемые *i*-м кубом будут с гарантией покрыты *j*-м кубом;
- если множество меток *k*–го столбца таблицы покрытий является подмножеством меток *l*-го столбца, то из таблицы покрытий можно вычеркнуть *l* –ый столбец, так как существенная вершина *l* будет наверняка покрыта за счет одного из кубов, покрывающих оставшуюся существенную вершину *k*.

Применим метод дальнейшего упрощения таблицы покрытий. С помощью операции вычеркивания “лишних” строк из нее можно удалить две строки ***B*** и ***F***, множество меток в которых является подмножеством меток в строках ***A*** и ***E*** соответственно.

Процесс удаления “лишних” строк показан в таблице..

Максимальные кубы		Существенные вершины				
		0000	0001	0101	0111	1111
	000X	*	*			
	~~X000~~	~~*~~				
	0X01		*	*		
	01X1			*	*	
	X111				*	*
	~~111X~~					~~*~~
		a	*b*	*c*	*d*	*e*

После удаления строк ***B*** и ***F***, соответствующих максимальным кубам X000 и 111X получим новую упрощенную таблицу покрытий. В отличии от предыдущей таблицы (упрощенная таблица покрытий нулевого порядка) новую таблицу будем называть упрощенной таблицей покрытий первого порядка

Максимальные кубы		Существенные вершины				
		0000	0001	0101	0X11	1X11
A	000X	⊗	*			
C	0X01		*	*		
D	01X1			*	*	
E	X111				*	⊗
		a	*b*	*c*	*d*	*e*

В таблице можно выделить новое ядро покрытия

$$T^1(f)=\begin{Bmatrix} 000X \\ X111 \end{Bmatrix},$$

которое будем называть ядром покрытия первого порядка в отличии от ядра *T*(*f*) (ядра покрытия нулевого порядка), выделяемого по исходной таблице покрытий.

После вычеркивания кубов ядра $T^1(f)$ (строки ***A*** и ***E***), а также существенных вершин, покрываемых кубами ядра (столбцы ***a, b, d, e***) получим упрощенную таблицу покрытий второго порядка.

Максимальные кубы		Существенные вершины
		0101
C	0X01	*
D	01X1	*

Из табл. определяем два минимальных покрытия в виде двух возможных вариантов дополнения кубов ядер покрытия нулевого $T(f)$ и первого порядка $T^1(f)$ кубами ***C*** и ***D*** соответственно.

Таким образом, с помощью метода упрощения таблицы покрытий получено только два минимальных покрытия:

$$C^1_{\min}(f) = \begin{Bmatrix} 1XX0 \\ 000X \\ X111 \\ 01X1 \end{Bmatrix}, \qquad C^2_{\min}(f) = \begin{Bmatrix} 1XX0 \\ 000X \\ X111 \\ 0X01 \end{Bmatrix},$$

в то время, как с помощью метода Петрика найдены четыре минимальных покрытия, т.е. все возможные варианты.

Функциональная полнота системы булевых функций

Система булевых функций $S=\{f_1, f_2,\ldots, f_m\}$ называется ***функционально полной***, если с помощью функций этой системы можно выразить любую булеву функцию с использованием метода суперпозиций

Под суперпозицией в отношении булевых функций понимается подстановка одних функций в другие вместо их аргумента.

Примером полной системы является $S_1 = \{\neg, \&, \vee\}$ (***булев базис***).

Обоснованность утверждения о функциональной полноте этой системы базируется на возможности представления любой сколь угодно сложной булевой функции в нормальной форме, которая является комбинацией операций отрицания, конъюнкции и дизъюнкции применительно к аргументам этой функции.

Система S_1 является ***избыточной***, так как из нее можно удалить одну из функций (& или $\vee$) без нарушения функциональной полноты.

Получаемые при этом системы $S_2 = \{\neg, \&\}$ и $S_3 = \{\neg, \vee\}$ обычно называют ***сокращенным булевым базисом.***

Недостающие операции ($\vee$ в системе S_2 и & в системе S_3) могут быть выражены с помощью следствий из законов де Моргана:

$$a \vee b = \overline{\overline{a} \cdot \overline{b}}; \quad a \cdot b = \overline{\overline{a} \vee \overline{b}}.$$

Другими примерами функционально полных систем являются системы из одной функции: S_4={↓} (***стрелка Пирса***), S_5={|} (***штрих Шеффера***), которые принято называть ***универсальными базисами***, а также система S_6= {&, ⊕, 1}, которую называют ***базисом Жегалкина***.

Функционально полная система булевых функций называется ***минимальной***, если удаление из нее какой-либо функции приводит к нарушению свойства функциональной полноты.

Понятие функциональной полноты системы булевых функций связано с аналогичным понятием для системы логических элементов.

Эта связь заключается в следующем: если каждой функ-ции из некоторой функционально полной системы сопо-ставить логический элемент, реализующий эту функцию, то система логических элементов соответствующая неко-торой функционально полной системе булевых функций естественным образом оказывается тоже функционально полной.

С использованием функционально полной системы логи-ческих элементов можно построить комбинационную схему, реализующую любую, сколь угодно сложную, булеву функцию.

Доказательство функциональной полноты некоторой системы булевых функций можно осуществлять одним из двух способов:

1. с использованием теоремы о функциональной полноте;

Теорема о функциональной полноте (теорема Поста)

Для того чтобы система булевых функций была функционально полной, необходимо и достаточно, чтобы она содержала:

- хотя бы одну функцию, не сохраняющую ноль;
- хотя бы одну функцию, не сохраняющую единицу;
- хотя бы одну не линейную функцию;
- хотя бы одну не монотонную функцию;
- хотя бы одну не самодвойственную функцию.

В теореме Поста фигурируют пять классов булевых функций:

K_0 – класс функций, сохраняющих ноль;

K_1 – класс функций, сохраняющих единицу;

K_L – класс линейных функций;

K_M – класс монотонных функций;

K_S – класс самодвойственных функций.

Эти классы называют ***замечательными классами*** булевых функций.

Другая формулировка теоремы Поста:

Для того, чтобы система булевых функций $\{f_1, \ldots, f_m\}$ была функционально полной необходимо и достаточно, чтобы для каждого из классов K_0, K_1, K_L, K_M, K_S нашлась функция f_i из системы, не принадлежащая этому классу.

Замечательные классы булевых функций

Булева функция называется ***сохраняющей ноль***, если на нулевом наборе аргументов она принимает значение, равное нулю, то есть $f(0, 0, 0, \ldots, 0) = 0$. В противном случае функция относится к классу функций, не сохраняющих ноль.

К функциям, сохраняющим ноль, относятся $f(x_1,x_2)= x_1 \vee x_2$ и $f(x_1,x_2)= x_1 \cdot x_2$.

К функциям, не сохраняющим ноль, относятся $f(\overline{x})=$ и $f(x_1,x_2)=x_1 \sim x_2$.

Булева функция называется ***сохраняющей единицу,*** если на единичном наборе аргументов она принимает значение, равное единице, то есть $f(1, 1, 1,..., 1) = 1$. В противном случае функция относится к классу функций, не сохраняющих единицу.

К функциям, сохраняющим единицу, относятся: $f(x_1, x_2)= x_1 \vee x_2$ и $f(x_1, x_2)= x_1 \cdot x_2$.

К функциям, не сохраняющим единицу, относятся $f(x)= \overline{x}$ и $f(x_1,x_2)=x_1 \oplus x_2$.

Булева функция называется ***линейной,*** если она представима полиномом Жегалкина первой степени.

В булевой алгебре доказывается теорема о возможности представления любой булевой функции

от n переменных с помощью полинома Жегалкина n-

В общем случае полином имеет вид:

$f^n(X) = K_0 \oplus K_1x_1 \oplus \dots \oplus K_n x_n \oplus K_{n+1}x_1x_2 \oplus K_{n+2}x_1x_3 \oplus \dots$
$\dots \oplus K_{n+l}x_{n-1}x_n \oplus \dots \oplus K_{n+m}x_1x_2 \dots x_n$, где $K_0, K_1, \dots, K_{n+m}$ - являются коэффициентами полинома и представляют собой логические константы $K_i=0$ или $K_i=1$. В алгебре Жегалкина одноименный полином (полином Жегалкина) можно считать аналогом канонической нормальной формы функции для Булевой алгебры.

Полином Жегалкина является ***линейным* (*1-ой степени*)**, если все коэффициенты общего полинома, начиная с K_{n+1}, равны нулю. В отношении функции от двух переменных линейный полином Жегалкина имеет вид: $f^2(X)=K_0 \oplus K_1x_1 \oplus K_2x_2$. Примерами линейных функций являются:

$y = x_1 \oplus x_2$ $(K_0=0, K_1=K_2=1)$,

$$y = x_1 \sim x_2 = \overline{x_1 \oplus x_2} = 1 \oplus x_1 \oplus x_2 \quad (K_0 = K_1 = K_2 = 1),$$

$y=\overline{x}=1\oplus x$ $(K_0=K_1=1,\ K_2=0)$.

Примеры нелинейных функций: $y=x_1\cdot x_2$,

$$y=x_1|x_2=\overline{x_1\cdot x_2}=1\oplus x_1\cdot x_2.$$

Булева функция называется ***монотонной***, если при возрастании наборов аргументов она принимает неубывающие значения:

$\mathbf{A}=(a_1,a_2,\ldots,a_n)>\mathbf{B}=(b_1,b_2,\ldots,b_n)\Rightarrow f(\mathbf{A})\geq f(\mathbf{B})$.

Между наборами аргументов ***A*** и ***B*** имеет место отношение возрастания в том и только том случае, если имеет место отношение неубывания для всех компонент этого набора:

$a_i\geq b_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$

и, по крайней мере, для одной компоненты

Примеры наборов, для которых имеет место отношение возрастания:

(1011) > (0011); (1011) > (0001); (0001) > (0000).

Примеры несопоставимых наборов (1011) и (0111), (1000) и (0111). В отношении функции от двух переменных несопоставимыми являются наборы (01) и (10).

Примеры немонотонных функций: $y=\bar{x}$, $y=x_1 \oplus x_2$.

Две булевы функции $f^n(X)$ и $g^n(X)$ называются ***двойственными,*** если для любых наборов аргументов выполняется равенство $f^n(\bar{X}) = \overline{g^n(X)}$, то есть функции f и g на противоположных наборах аргументов X и принимают противоположные значения.

Два набора аргументов называются ***противопо-ложными***, если каждая из их компонент прини-мает противоположные значения, например,

$X = (0101)$ и $\overline{X} = (1010)$.

Булева функция называется ***самодвойственной***, если она является двойственной по отношению к самой себе, то есть принимает противоположные значения на противоположных наборах аргумен-тов.

Примером самодвойственной функции явля-ется: $y = \overline{x}$.

Примеры не самодвойственных функций: $y = x_1 \cdot x_2$, $y = x_1 \vee x_2$, $y = x_1 \oplus x_2$.

Принадлежность базовых булевых функций и логических констант к замечательным классам представлена таблице. Знаком “+” отмечена принадлежность функции соответствующему классу, а знаком “-” не принадлежность.

Функция	K_0	K_1	K_L	K_M	K_S
0	+	-	+	+	-
1	-	+	+	+	-
$\overline{x}$	-	-	+	-	+
$x_1 \cdot x_2$	+	+	-	+	-
$x_1 \vee x_2$	+	+	-	+	-
$x_1 \oplus x_2$	+	-	+	-	-
$x_1 \sim x_2$	-	+	+	-	-
$x_1 \Delta x_2$	+	-	-	-	-
$x_1 \to x_2$	-	+	-	-	-
$x_1 \mid x_2$	-	-	-	-	-
$x_1 \downarrow x_2$	-	-	-	-	-

Из таблицы видно, что согласно теореме Поста, функции штрих Шеффера и стрелка Пирса являются функционально полными.

С помощью таблицы легко дополнить любую буле-ву функцию минимальным количеством других булевых функций так, чтобы полученная система была функционально полной и не избыточной.

Конструктивный подход к доказательству функ-циональной полноты системы булевых функций

Подход базируется на следующей теореме булевой алгебры:

Теорема. Пусть система булевых функций $\{f_1, \ldots, f_m\}$ является функционально полной и любая из функций $f_1, \ldots, f_m$ может быть выражена с помощью суперпозиции через функции $g_1, \ldots, g_k$. Тогда система булевых функций $\{g_1, \ldots, g_k\}$ также является функционально полной.

При этом в качестве исходной системы $\{f_1, \ldots, f_m\}$ обычно используется система S_1 (булев базис).

Пример. Докажем функциональную полноту системы $S_5=\{|\}$ (универсальный базис), выразив инверсию, конъюнкцию и дизъюнкцию с помощью только функции штрих Шеффера.

$$\bar{x} = \overline{x \cdot x} = x \mid x;$$

$$x_1 \cdot x_2 = \overline{\overline{x_1 \cdot x_2}} = (x_1 \mid x_2) \mid (x_1 \mid x_2);$$

$$(x_1 \vee x_2) = \overline{(\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2)} = (x_1 \mid x_1) \mid (x_2 \mid x_2).$$

Таким образом, согласно приведенной теореме, система S_5 является функционально полной.

Булева алгебра закончилась