п.23 Алгебраическая и тригонометрическая формы записи комплексных чисел

Выписать основные понятия, определения, формулы, разобрать задачи. Выполнить задания №1; №2 слайды 19; 20

Определение

Комплексным числом называется

число вида $z = x + yi$,

где $i^2 = -1$, а x и y – вещественные числа.

Основная теорема алгебры

Выражение

$$z = x + iy$$

называется ***алгебраической формой*** записи комплексного числа.

Число x называется действительной частью, y–мнимой частью комплексного числа z.

Это записывают следующим образом:

$$x = \operatorname{Re} z, \qquad y = \operatorname{Im} z.$$

Если $x = 0$, то число z называют чисто мнимым.

Если $y = 0$, то получается $z = x + 0 \cdot i$ вещественное число.

Два комплексных числа

$$z = x + iy \quad \text{и} \quad \bar{z} = x - iy$$

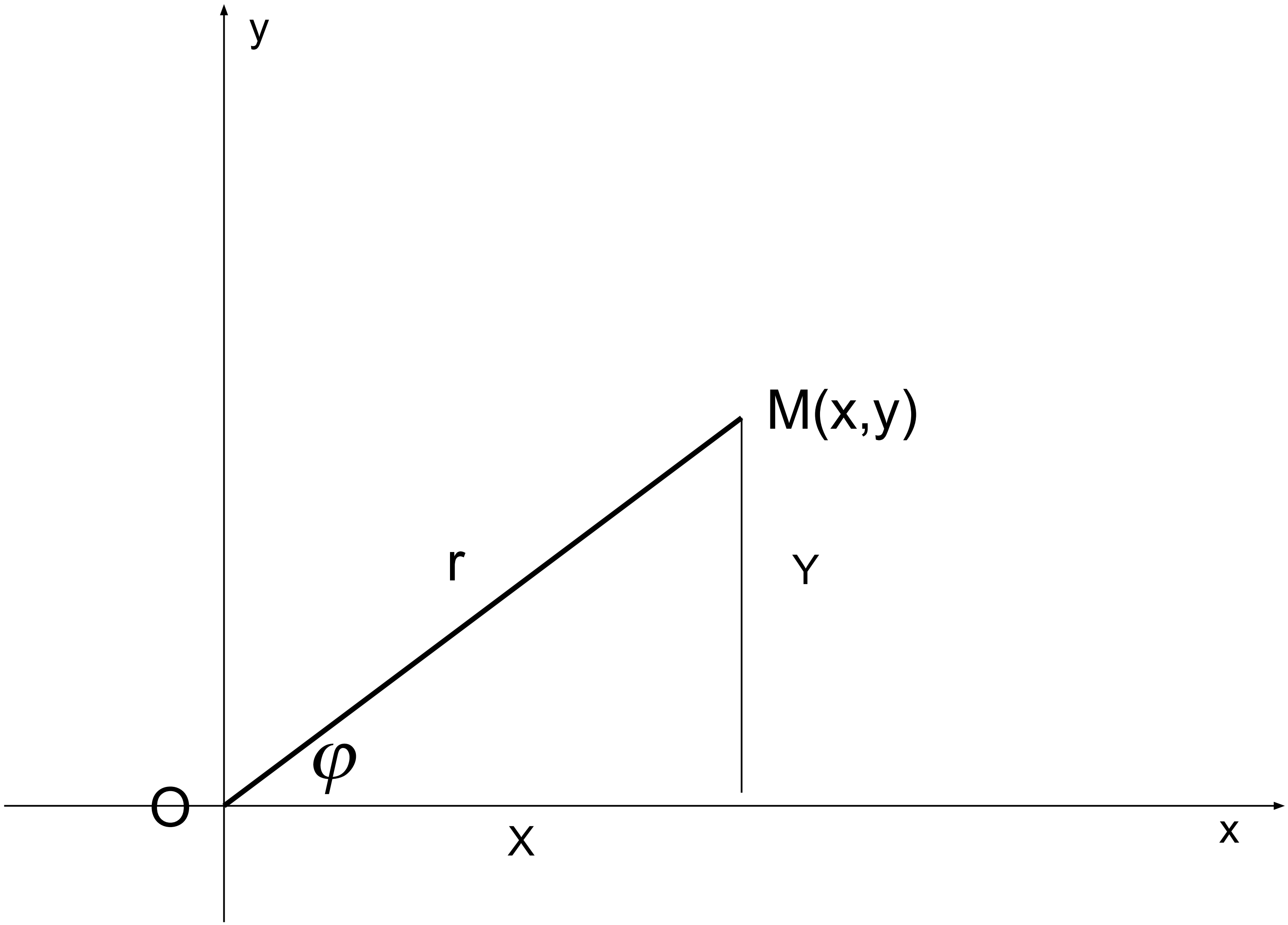
называются сопряженными.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ равны друг другу, если $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$

Комплексное число z считается равным нулю, если x=y=0.

Всякое комплексное число можно изобразить точкой на плоскости, т.к. каждому *z* соответствует упорядоченная пара вещественных чисел (x;y).

Число $z=0$ ставится в соответствие началу координатной плоскости. Такую плоскость мы в дальнейшем будем называть комплексной плоскостью, ось абсцисс–действительной, а ось ординат–мнимой осью комплексной плоскости.


y
M(x,y)
r
Y
φ
O
X
x

Модуль комплексного числа

Число $\sqrt{x^2 + y^2}$ называется модулем комплексного числа $z = x + iy$ и обозначается $|z|$.

Тригонометрическая форма записи комплексного числа

Для определения положения точки на плоскости можно пользоваться полярными координатами ,

где r–расстояние точки от начала координат,

а φ–угол, который составляет радиус–вектор этой точки с положительным направлением оси Ox.

Положительным направлением изменения угла φ считается направление против часовой стрелки. Воспользовавшись связью декартовых и полярных координат:

$$x = r\cos\varphi \quad , \qquad y = r\sin\varphi \quad ,$$

получим ***тригонометрическую форму записи комплексного числа***

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$,

φ – аргумент комплексного числа, который находят из формул

,

$$\cos\varphi = \frac{x}{r} \qquad \sin\varphi = \frac{y}{r}$$

или в силу того, что ,

$$tg\varphi = \frac{y}{x} \qquad \varphi = arctg\left(\frac{y}{x}\right)$$

При переходе от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической достаточно определить лишь главное значение аргумента комплексного числа, т.е. считать $\varphi = arg\, z$.

Так как $-\pi < \arg z \le \pi$, то из формулы $tg\varphi = \dfrac{y}{x}$ получаем, что

$\arg z = arctg\dfrac{y}{x}$ - для внутренних точек I, IV четвертей;

$\arg z = arctg\dfrac{y}{x} + \pi$ - для внутренних точек II четверти;

$\arg z = arctg\dfrac{y}{x} - \pi$ - для внутренних точек III четверти.

Пример 1. Представить комплексные числа $z_1 = 1 + i$ и $z_2 = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ в тригонометрической форме.

Решение. Комплексное число $z=x+iy$ в тригонометрической форме имеет вид $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, где $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi=arctg\frac{y}{x}$.

1) $z_1=1+i$ (число z_1 принадлежит I четверти), $x=1,\ y=1.$

$$r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2},\quad \varphi=arctg\frac{1}{1}=arctg\,1=\frac{\pi}{4}.$$

Таким образом, $z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).$

2) $z_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ (число z_2 принадлежит II четверти) $x=-\frac{1}{2},y=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

$$r=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1,\qquad \varphi=arctg\left(-\sqrt{3}\right)=-\frac{\pi}{3}.$$

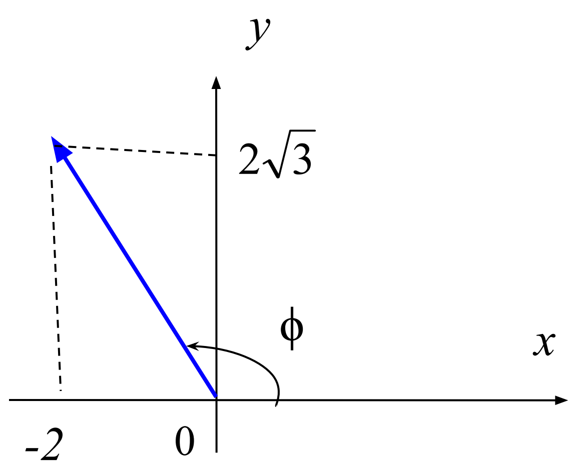
Так как $z_2\in II$ ч., то $Arg\,z_2=\pi+\varphi=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}.$

Следовательно, $z_2=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$

Ответ: $z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right),\quad z_2=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$

1) Записать число $z = -2 + 2\sqrt{3} \cdot i$ в тригонометрической форме:

$$r = |z| = \sqrt{(-2)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$$



$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{a}{r} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \\ \sin\varphi &= \frac{b}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3}$$

$$\boxed{z = -2 + 2\sqrt{3} \cdot i = 4 \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{2\pi}{3} \right)}$$

2) Записать число в алгебраической форме:

$$z = 2\left(\cos\frac{25\pi}{3} + i\sin\frac{25\pi}{3}\right)$$

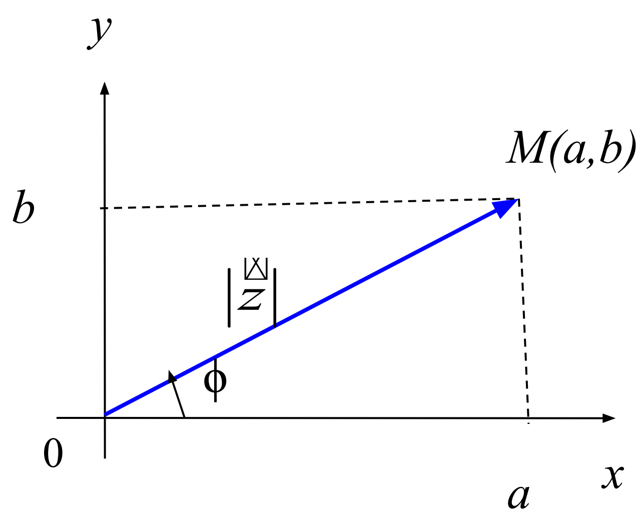
$$\frac{25\pi}{3} = \frac{24\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = 8\pi + \frac{\pi}{3} = 2\pi\cdot 4 + \frac{\pi}{3}$$

$$z = 2\left(\cos\left(2\pi\cdot 4 + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(2\pi\cdot 4 + \frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \underline{1 + i\sqrt{3}}$$

Тригонометрическая форма комплексного числа

$$z = a + bi \qquad\qquad r = |\vec{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{a}{r} \\ \sin\varphi &= \frac{b}{r} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a = r\cdot\cos\varphi \\ b = r\cdot\sin\varphi \end{cases}$$

$$\boxed{z = a + bi = r(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)}$$

Выполнить №1 и №2

№1 Записать в тригонометрической форме комплексное число $z = -1 + i\sqrt{3}$

№2 Записать число в алгебраической форме:

$$z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$