КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Человек сначала научился пользоваться натуральными числами, затем появились рациональные дроби, затем ноль и отрицательные числа и только потом числа иррациональные.

Первыми, кто попытался построить законченную теорию вещественного числа, были греки, которые свели рассмотрение чисел к рассмотрению отрезков прямой, т.е. подошли к изучению числа с точки зрения геометрии.

Современные математики усовершенствовали систему греков.

В основу математической теории может быть положен некоторый абстрактный (идеальный) объект, который не определяется, но формулируются свойства этого объекта или правила действий с этими объектами (эти свойства называются аксиомами).

Используя этот подход можно строго построить теорию натуральных чисел, все остальные числа можно построить на основе натуральных.

«Бог создал натуральные числа, все прочее – дело рук человека» – так сформулировал эту идею немецкий математик Леопольд Кронекер (1823-1891).

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ

1) **коммутативный закон сложения**

$m + n = n + m$. *Сумма не меняется от перестановки её слагаемых*.

2) **ассоциативный закон сложения;**

$$(m + n) + k = m + (n + k) = m + n + k .$$

Сумма не зависит от группировки её слагаемых.

3) **коммутативный закон умножения;**

$$m \cdot n = n \cdot m .$$

Произведение не меняется от перестановки его сомножителей.

4) **ассоциативный закон умножения;**

$$(m \cdot n) \cdot k = m \cdot (n \cdot k) = m \cdot n \cdot k .$$

Произведение не зависит от группировки его сомножителей.

5) **дистрибутивный закон умножения относительно сложения**

$$(m + n) \cdot k = m \cdot k + n \cdot k$$

РАСШИРЕНИЕ ПОНЯТИЯ ЧИСЛА

На множестве натуральных чисел мы всегда можем производить действия сложения и умножения, но обратные действия возможны не всегда.

После введения нуля и отрицательных чисел, т.е. после расширения множества натуральных чисел до множества целых действие вычитания становится возможным для любых двух чисел.

Аналогично, становится возможным действие деления для любых двух чисел, взятых из множества рациональных (разумеется, при условии, что делитель отличен от нуля).

Числовые множества:

N – бесконечное упорядоченное, дискретное с начальным элементом и без конечного элемента. Замкнутое относительно операций сложения и умножения;

Z – бесконечное, упорядоченное, дискретное, без начального и конечного элементов. Замкнутое относительно операций сложения, вычитания, умножения;

Q – бесконечное, упорядоченное, без начального и конечного элементов. Замкнутое относительно операций сложения, вычитания, умножения, деления;

R - бесконечное, упорядоченное, без начального и конечного элементов, непрерывное.

ПОНЯТИЕ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Множество, на котором заданы операции сложения и умножения, удовлетворяющие основным законам 1-5, и выполнимы обратные операции: вычитания и деления (за исключением случая, когда делитель равен нулю) называется полем.

Таким образом, множество рациональных чисел образует простейшее числовое поле. Но на множестве рациональных чисел, за исключением редких случаев, невозможна операция, обратная к операции возведения в степень.

Если ввести иррациональные числа, этот пробел частично ликвидируется. На множестве всех вещественных чисел можно извлекать корни любой степени, но только из неотрицательных чисел. Множество вещественных чисел также образует поле, но для того чтобы операция извлечения корня была возможна всегда, требуется дальнейшее его расширение.

Сделаем это с помощью введения искусственных (идеальных) элементов. Введем понятие комплексного числа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Ко́мпле́ксные чи́сла (устар. *мнимые числа*) — числа вида {x+iy},

где

{x} и { y} — вещественные числа,

{i} — мнимая единица

(величина, для которой выполняется равенство: { i^{2}=-1}).

Множество комплексных чисел обычно обозначается символом {C} (от лат. *complex* — тесно связанный).

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Для нового множества чисел справедливы основные законы 1-5.

При этом для комплексных чисел определено сравнение только типа равны или не равны.

Сравнение типа больше – меньше для этих чисел невозможно.

Комплексное число будет задано, если заданы его вещественная и мнимая части, т.е. заданы два вещественных числа.

Поэтому в курсе алгебры комплексные числа определяют, как упорядоченные пары вещественных чисел (a, b), на множестве которых определены те же три операции:

1) **сравнение;**
2) **сложение;**
3) **умножение.**

Вопрос для работы он-лайн: образует ли поле a) множество иррациональных чисел; b) множество всех конечных десятичных дробей.

Результаты арифметических операций с комплексными числами совпадают с результатами, которые мы получили бы, действуя с вещественными числами.

Этот факт позволяет отождествлять комплексные числа вида $a + 0i$ с вещественными числами и говорить, что множество вещественных чисел R является подмножеством множества комплексных чисел. Аналогично, числа вида $0 + bi$ будем называть чисто мнимыми и обозначать bi Символ i будем называть мнимой единицей.

Пользуясь правилом умножения комплексных чисел, получим основное свойство мнимой единицы: $i^2 = -1$.

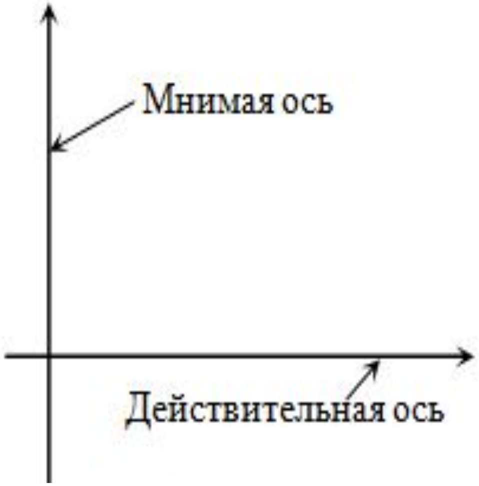
Очевидно, что сложение и вычитание комплексных чисел можно производить как сложение и вычитание двучленов, считая подобными те члены, которые не содержат мнимую единицу, и те, которые ее содержат. Аналогично, правило умножения комплексных чисел получается как результат перемножения двучленов с учетом основного свойства мнимой единицы.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Комплексное число a + bi определяется двумя вещественными числами, поэтому ему можно сопоставить точку М(a, b) координатной плоскости и, наоборот, каждой точке плоскости М(a, b) можно сопоставить комплексное число a +bi .

Поэтому можно рассматривать комплексные числа как точки плоскости, которую мы будем называть комплексной плоскостью.

Ось абсцисс называют действительной осью, а ось ординат – мнимой.



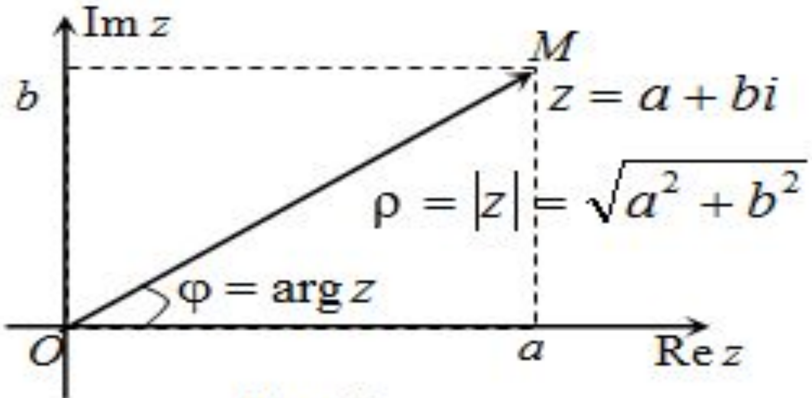
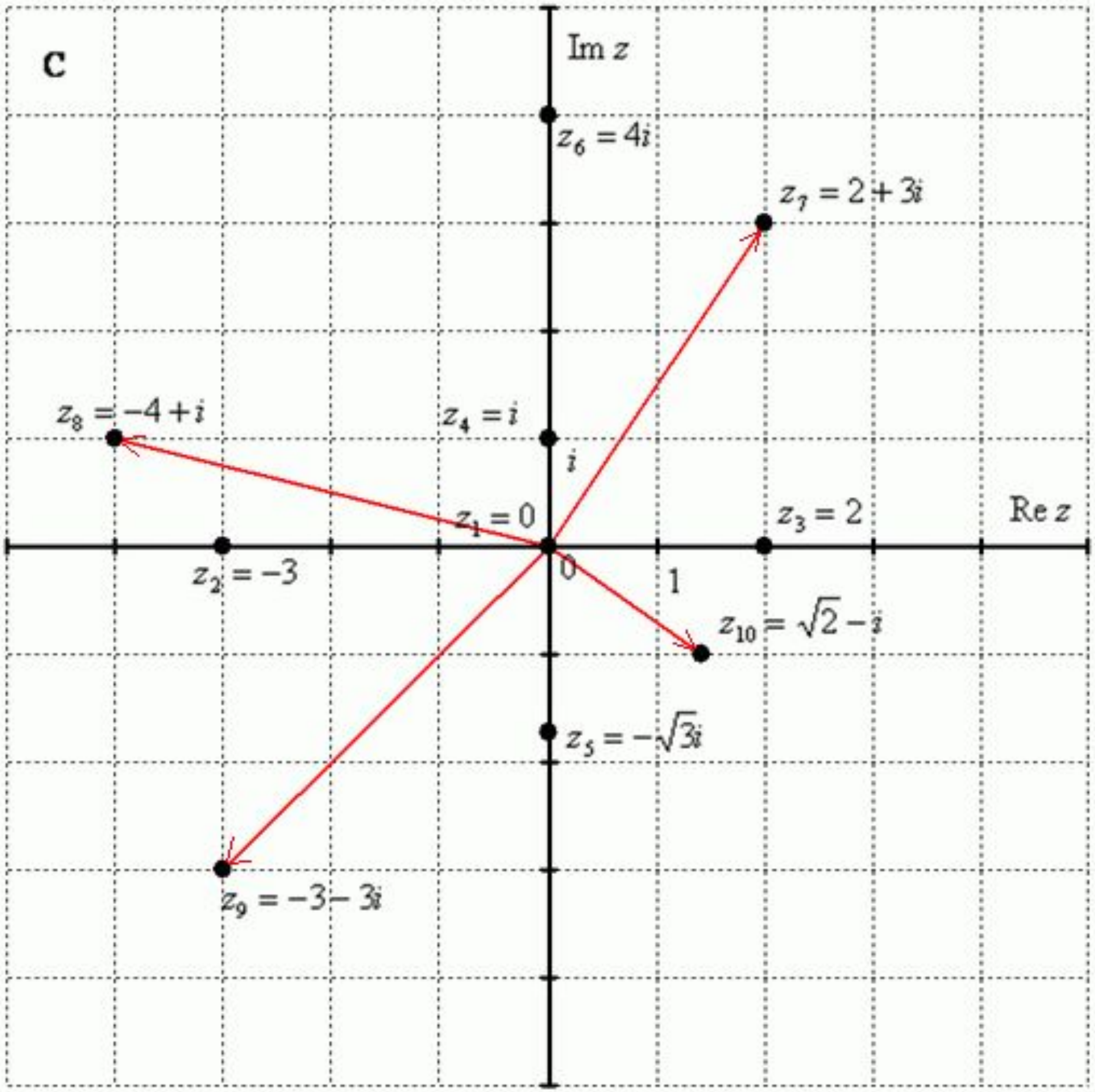


Рис. 2



C
Im z
Re z
$z_6 = 4i$
$z_7 = 2+3i$
$z_8 = -4+i$
$z_4 = i$
i
$z_1 = 0$
$z_3 = 2$
$z_2 = -3$
0
1
$z_{10} = \sqrt{2}-i$
$z_5 = -\sqrt{3}i$
$z_9 = -3-3i$

ЗАПИШИТЕ КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА, ИЗОБРАЖЕННЫЕ НА РИСУНКЕ 3

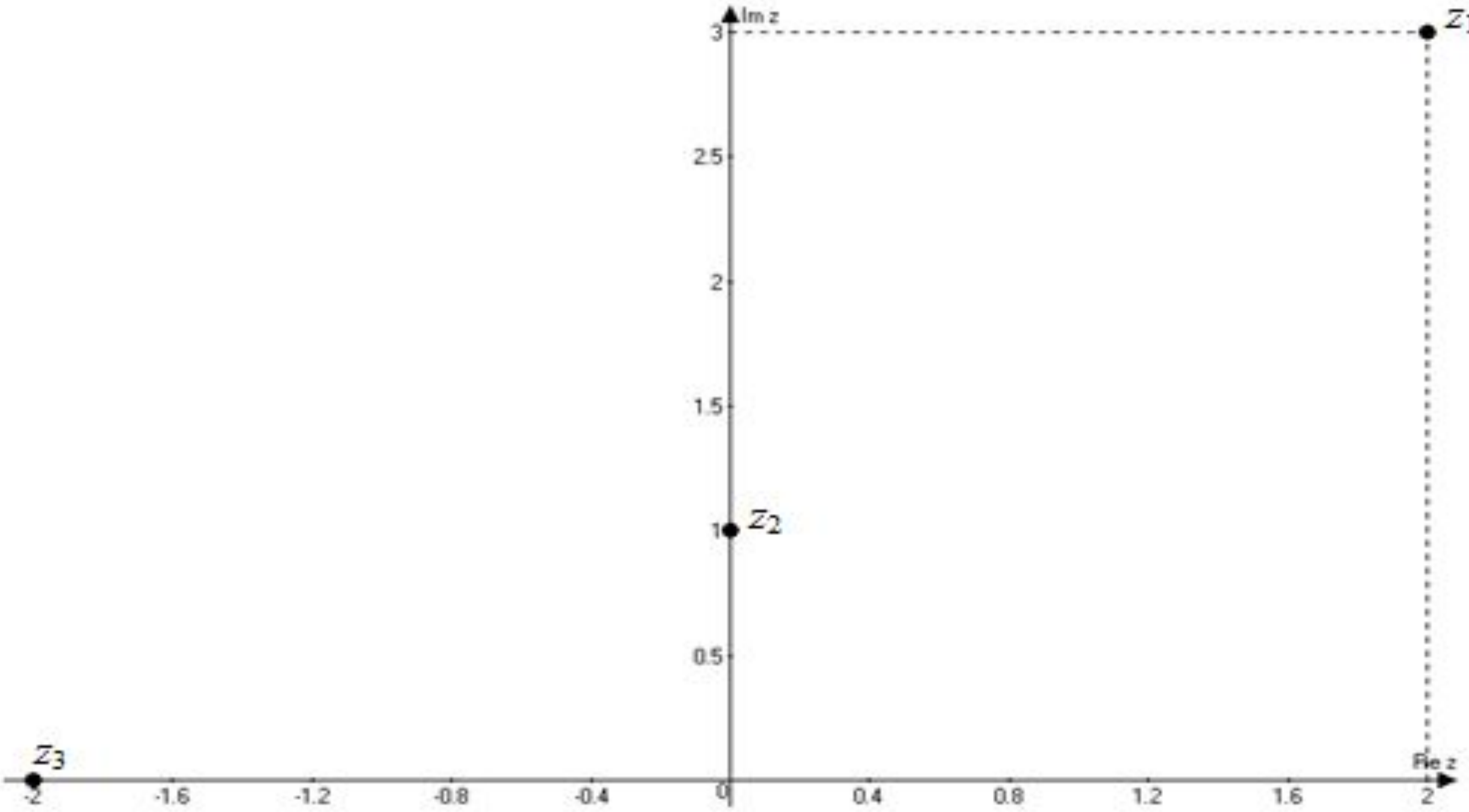
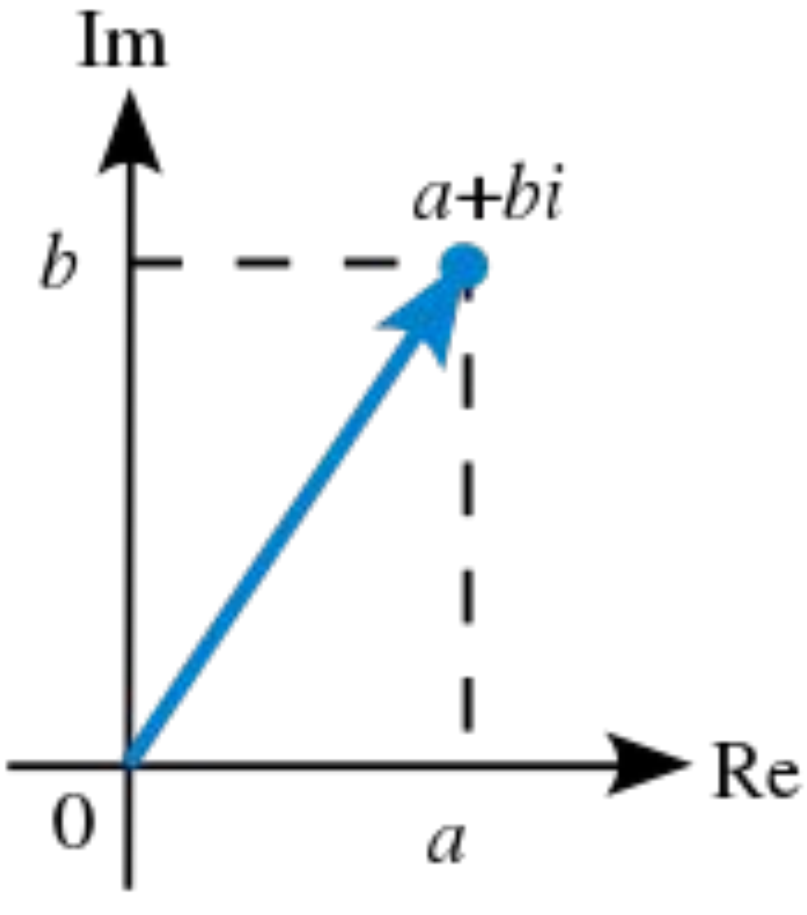


Рис. 3

ИЗОБРАЖЕНИЕ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ



КОМПЛЕКСНО-СОПРЯЖЕННЫЕ ЧИСЛА

Важную роль для дальнейшего изучения темы играют комплексно-сопряженные числа. Рассмотрим определение этих чисел, проведем доказательства их свойств, а также рассмотреть эти свойства на нескольких примерах.

Определение. Если $z = a + bi$, то число $\bar{z} = a - bi$ называется комплексным сопряженным к числу z.

$$\bar{z} = a - bi$$

То есть у комплексно сопряженных чисел действительные части равны, а мнимые отличаются знаком.

Например. Комплексно сопряженным к числу $z = 2 - i$ есть число $\bar{z} = 2 + i$.

На комплексной плоскости комплексно сопряжённые числа получаются зеркальным отражением друг друга относительно действительной оси.

СВОЙСТВА КОМПЛЕКСНО СОПРЯЖЕННЫХ ЧИСЕЛ

1) Если $z = \bar{z}$, то можно сделать вывод, что рассматриваемое число z является действительным.

Например. $z = 2 \in R \Rightarrow \bar{z} = 2$ и $z = \bar{z}$

2) Для любого комплексного числа z сумма $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z$ - действительное число.

Например. Пусть $z = 2 - 3i$, тогда $\bar{z} = 2 + 3i$, а тогда

$$z + \bar{z} = 2 - 3i + (2 + 3i) = 2 - 3i + 2 + 3i = 2 + 2 = 4 \in R$$

3) Для произвольного комплексного числа $z = a + bi$ произведение $z \cdot \bar{z} = |z|^2 \in R$.

Например. Пусть $z = 2 - 3i$, комплексно сопряженное к нему число $\bar{z} = 2 + 3i$, тогда произведение

$$z \cdot \bar{z} = (2 - 3i)(2 + 3i) = 2^2 - (3i)^2 = 2^2 - 3^2 \cdot i^2 =$$

$$= 2^2 - 3^2 \cdot (-1) = 2^2 + 3^2 = \sqrt{2^2 + 3^2}^2 = |z|^2 = 13 \in R$$

4) Модули комплексно сопряженных чисел равны: $|z| = |\bar{z}|$, а аргументы отличаются знаком (рис. 1).

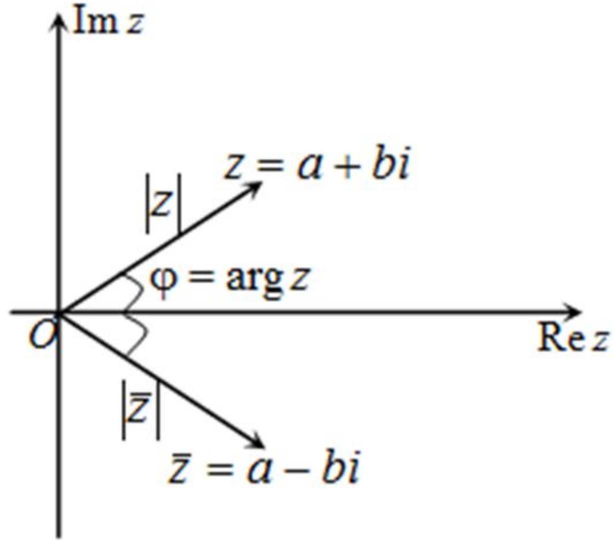


Рис. 1

5) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$

6) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

7) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

8) $\overline{(\bar{z})} = z$

9) Если $z = a + bi$ и $\bar{z} = a - bi$ - комплексно сопряженные числа, то

$$a = \mathrm{Re}\, z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad b = \mathrm{Im}\, z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

Модуль комплексного числа

Комплексное число также можно изображать радиус-вектором $\overline{OM}$ (рис. 2). Длина радиус-вектора, изображающего комплексное число $z = a + bi$, называется модулем этого комплексного числа.

Модуль любого ненулевого комплексного числа есть положительное число. Модули комплексно сопряженных чисел равны. Модуль произведения/частного двух комплексных чисел равен произведению/частному модулей каждого из чисел.

Модуль вычисляется по формуле:

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

То есть модуль есть сумма квадратов действительной и мнимой частей заданного числа.

Пример

Задание. Найти модуль комплексного числа $z = 5 - 3i$

Решение. Так как $\operatorname{Re} z = 5$, $\operatorname{Im} z = -3$, то искомое значение

$|z| = |5 - 3i| = \sqrt{5^2 + (-3)^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$

Ответ. $|z| = \sqrt{34}$

Замечание

Иногда еще модуль комплексного числа обозначается как r или ρ.

Аргумент комплексного числа

Угол ϕ между положительным направлением действительной оси и радиус-вектора $\overline{OM}$, соответствующим комплексному числу $z=a+bi$, называется аргументом этого числа и обозначается $\arg z$.

Аргумент ϕ комплексного числа $z=a+bi$ связан с его действительной и мнимой частями соотношениями:

$$\phi = \operatorname{tg}\frac{b}{a}\ ,\quad \cos\phi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\ ,\quad \sin\phi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

На практике для вычисления аргумента комплексного числа обычно пользуются формулой:

$$\phi = \arg z = \arg\,(a+bi) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{b}{a}\ ,\ a \geq 0 \\ \operatorname{arctg}\frac{b}{a} + \pi\ ,\ a<0 \end{cases}$$

Пример

Задание. Найти аргумент комплексного числа $z=-3-3i$

Решение. Так как $a = \operatorname{Re} z = -3 < 0$, то в выше приведенной формуле будем рассматривать вторую строку, то есть

$$\phi = \arg z = \operatorname{arctg}\frac{-3}{-3} + \pi = \operatorname{arctg}1 + \pi = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$$

Ответ. $\phi = \arg z = \dfrac{5\pi}{4}$

Аргумент действительного положительного числа равен 0°, действительного отрицательного - π или 180°. Чисто мнимые числа с положительной мнимой частью имеют аргумент равный $\frac{\pi}{2}$, с отрицательной мнимой частью - $\frac{3\pi}{2}$.

У комплексно сопряженных чисел аргументы отличаются знаком (рис. 3).

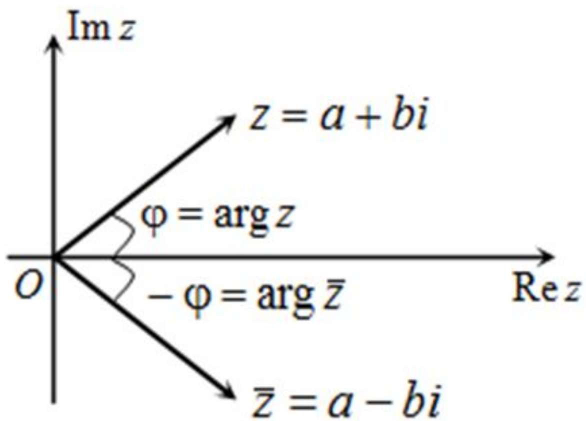


Рис. 3

Задание слушателям:

1. Опираясь на интерпретацию комплексного числа как вектора, направленного из начала координат в точку М(a, b) выполните основные операции над комплексным числом.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Запись комплексного числа z в виде $z = a + bi$, где a и b - действительные числа, называется алгебраической формой комплексного числа.

Например. $z = 1 - i$

Определение

Запись вида $z = a + bi$ называется алгебраической или координатной формой комплексного числа z.

При этом действительное число a называется действительной частью числа z: $a = \mathrm{Re}\, z$, а действительное число b - его мнимой частью: $b = \mathrm{Im}\, z$.

Величина i называется мнимой единицей и удовлетворяет равенству $i^2 = -1$.

Например. Для числа $z = 3 - 2i$ действительная часть $\mathrm{Re}\, z = 3$, а мнимая - $\mathrm{Im}\, z = -2$.

Пример

Задание. Записать число $z=\frac{3+i}{5}$ в алгебраической форме. Определить, чему равны мнимая и действительная части.

Решение. Почленно поделим дробь:

$$z=\frac{3+i}{5}=\frac{3}{5}+\frac{i}{5}=\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i$$

Тогда

$\operatorname{Re} z=\frac{3}{5}$, $\operatorname{Im} z=\frac{1}{5}$

Ответ. $z=\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i$, $\operatorname{Re} z=\frac{3}{5}$, $\operatorname{Im} z=\frac{1}{5}$

ОПЕРАЦИИ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ В АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Сумма и произведение комплексных чисел могут быть вычислены непосредственным суммированием и перемножением комплексных чисел в алгебраической форме, как обычно раскрывая скобки и приводя подобные (как операции над алгебраическими двучленами), при этом надо учесть, что $i^2=-1$.

Пример

Задание. Найти сумму и произведение комплексных чисел $z_1=2-3i$ и $z_2=3+i$.

Решение. Чтобы найти сумму заданных комплексных чисел, складываем соответственно их действительные и мнимые части:

$$z_1+z_2=2-3i+(3+i)=(2+3)+(-3i+i)=5-2i$$

Произведение равно

$$z_1\cdot z_2=(2-3i)\cdot(3+i)=6+2i-9i-3i^2=$$

$$=6-7i-3\cdot(-1)=9-7i$$

Ответ. $z_1+z_2=5-2i$, $z_1\cdot z_2=9-7i$

СЛОЖЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Определение

Суммой двух комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ называется комплексное число z, которое равно

$z = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$

То есть суммой двух комплексных чисел есть комплексное число, действительная и мнимая части которого есть суммой действительных и мнимых частей чисел-слагаемых соответственно.

Пример

Задание. Найти сумму $z_1 + z_2$, если $z_1 = 5 - 6i$, $z_2 = -3 + 2i$.

Решение. Искомая сумма равна

$z_1 + z_2 = 5 - 6i + (-3 + 2i) = (5 + (-3)) + (-6 + 2)i = 2 - 4i$

Ответ. $z_1 + z_2 = 2 - 4i$

ВЫЧИТАНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Определение

Разностью двух комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ называется комплексное число $z = z_1 - z_2$, действительная и мнимая части которого есть разностью действительных и мнимых частей чисел z_1 и z_2 соответственно:

$z = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$

Пример

Задание. Найти разность $z_1 - z_2$, если $z_1 = 5 - 6i$, $z_2 = -3 + 2i$.

Решение. Действительная часть искомого комплексного числа равна разности действительных частей чисел z_1 и z_2, а мнимая - мнимых частей этих чисел, то есть

$z_1 - z_2 = 5 - 6i - (-3 + 2i) = (5 - (-3)) + (-6 - 2)i = 8 - 8i$

Ответ. $z_1 - z_2 = 8 - 8i$

УМНОЖЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ В АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Определение

Произведением двух комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ называется комплексное число z, равное

$$z = z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i$$

На практике чаще всего комплексные числа перемножают как алгебраические двучлены $(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i)$, просто раскрыв скобки, в полученном результате надо учесть, что $i^2 = -1$.

Пример

Задание. Найти произведение комплексных чисел $z_1 = 2 + 3i$ и $z_2 = -1 + i$.

Решение. Перемножим заданные комплексные числа как два двучлена, то есть

$$z_1 \cdot z_2 = (2 + 3i)(-1 + i) = 2 \cdot (-1) + 2 \cdot i + 3i \cdot (-1) + 3i \cdot i =$$
$$= -2 + 2i - 3i + 3i^2 = -2 - i + 3 \cdot (-1) = -5 - i$$

Ответ. $z_1 \cdot z_2 = -5 - i$

ДЕЛЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ В АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Определение

Частным двух комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ называется число z, которое задается соотношением:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i$$

На практике деление комплексных чисел проводят по следующей схеме:

сначала делимое и делитель умножают на число, комплексно сопряженное делителю, после чего делитель становится действительным числом;

в числителе умножают два комплексных числа;

полученную дробь почленно делят.

Пример

Задание. Найти частное $\frac{-2+i}{1-i}$

Решение. Домножим и числитель, и знаменатель заданной дроби на число, комплексно сопряженное к знаменателю $1-i$, это будет $1+i$, тогда имеем:

$$\frac{-2+i}{1-i} = \frac{-2+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{(-2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$

Далее перемножаем комплексные числа как алгебраические двучлены, учитывая, что $i^2 = -1$:

$$\frac{-2+i}{1-i} = \frac{(-2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{-2-2i+i-1}{1^2 - i^2} =$$

$$= \frac{-3-i}{1-(-1)} = \frac{-3-i}{2} = -\frac{3}{2} - \frac{i}{2}$$

Ответ. $\frac{-2+i}{1-i} = -\frac{3}{2} - \frac{i}{2}$

ВОЗВЕДЕНИЕ В СТЕПЕНЬ

Возвести в квадрат комплексное число $z = 2 + 3i$

Здесь можно пойти двумя путями, первый способ это переписать степень как произведение множителей $z^2 = (2+3i)^2 = (2+3i)(2+3i)$ и перемножить числа по правилу умножения многочленов.

Второй способ состоит в применение известной школьной формулы сокращенного умножения $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$:

$$z^2 = (2+3i)^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3i + (3i)^2 = 4 + 12i - 9 = -5 + 12i$$

Для комплексного числа легко вывести свою формулу сокращенного умножения: $(a+bi)^2 = a^2 + 2abi + (bi)^2 = a^2 + 2abi - b^2$.

Возвести в степень комплексные числа i^{10}, i^{33}, $(-i)^{21}$

Здесь тоже всё просто, главное, помнить знаменитое равенство.

Если мнимая единица возводится в четную степень, то техника решения такова: $i^{10} = (i^2)^5 = (-1)^5 = -1$

Если мнимая единица возводится в нечетную степень, то «отщипываем» одно «i», получая четную степень:

$$i^{33} = i \cdot i^{32} = i \cdot (i^2)^{16} = i \cdot (-1)^{16} = i \cdot 1 = i$$

Если есть минус (или любой действительный коэффициент), то его необходимо предварительно отделить: $(-i)^{21} = (-1)^{21} \cdot i^{21} = -i \cdot i^{20} = -i \cdot (i^2)^{10} = -i \cdot (-1)^{10} = -i$

ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЕЙ ИЗ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Рассмотрим пример: $z = \sqrt{-4}$

Нельзя извлечь корень? Если речь идет о действительных числах, то действительно нельзя. В комплексных числах извлечь корень – можно! А точнее, два корня:

$z_1 = \sqrt{-4} = -2i \quad z_2 = \sqrt{-4} = 2i$

Действительно ли найденные корни являются решением уравнения $z^2 = -4$? Выполним проверку:

$(-2i)^2 = (-2)^2 \cdot i^2 = 4 \cdot (-1) = -4 \quad (2i)^2 = 2^2 \cdot i^2 = 4 \cdot (-1) = -4$

Что и требовалось проверить.

Часто используется сокращенная запись, оба корня записывают в одну строчку под «одной гребёнкой»: $z_{1,2} = \pm 2i$.

Такие корни также называют *сопряженными комплексными корнями*.

Как извлекать квадратные корни из отрицательных чисел, думаю, всем понятно: $\sqrt{-1} = \pm i$, $\sqrt{-9} = \pm 3i$, $\sqrt{-36} = \pm 6i$, $\sqrt{-3} = \pm\sqrt{3}i$, $\sqrt{-5} = \pm\sqrt{5}i$ и т.д.

Во всех случаях получается два сопряженных комплексных корня.

ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЯ ИЗ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Запишем квадратный корень из числа $a+bi$ в алгебраической форме

$\sqrt{a+bi}=\alpha+\beta i$. Возведем это равенство в квадрат:

$$a+bi=(\alpha+\beta i)^2; \qquad \alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta i=a+bi.$$

Приравнивая действительные и мнимые части, а также, учитывая, что модуль числа $a+bi$ равен квадрату модуля его корня, получаем систему

$$\begin{cases} \alpha^2-\beta^2=a \\ 2\alpha\beta=b \\ \alpha^2+\beta^2=\sqrt{a^2+b^2} \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $2\alpha^2=a+\sqrt{a^2+b^2}$, откуда

$$\left[\begin{array}{l} \alpha=\pm\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \\ \beta=\dfrac{b}{2\alpha} \end{array}\right.$$

Пример 3. Вычислить $\sqrt{3+4i}$.

Действительная и комплексная части $3+4i$ равны a=3 и b=4. Вычислим по найденной формуле действительную и комплексную части его корня

$$\alpha=\pm\sqrt{\frac{3+\sqrt{3^2+4^2}}{2}}=\pm2,$$

$$\beta=\frac{4}{\pm4}=\pm1.$$

Итак, $\sqrt{3+4i}=\pm(2+i)$.

РЕШИТЬ КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ

Решить квадратное уравнение $z^2 - 6z + 34 = 0$

Вычислим дискриминант:

$$D = 36 - 136 = -100$$

Дискриминант отрицателен, и в действительных числах уравнение решения не имеет. Но корень можно извлечь в комплексных числах!
$\sqrt{D} = \pm 10i$

По известным школьным формулам получаем два корня:

$z_{1,2} = \dfrac{6 \pm 10i}{2}$ $z_{1,2} = 3 \pm 5i$ – сопряженные комплексные корни

Таким образом, уравнение $z^2 - 6z + 34 = 0$ имеет два сопряженных комплексных корня: $z_1 = 3 - 5i$, $z_2 = 3 + 5i$

Теперь вы сможете решить любое квадратное уравнение!

И вообще, любое уравнение с многочленом «энной» степени $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$ имеет ровно n корней, часть из которых может быть комплексными.

РЕШИТЬ

Найти корни уравнения и разложить квадратный двучлен на множители.

$$4z^2+1=0$$

ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

1. Вычислить:

$a)\ (1+\mathrm{i})(2+\mathrm{i})+\dfrac{5}{1+2i};$ $\quad b)\ \dfrac{5+i}{(1-2i)(5+5i)};$

$c)\ \dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{(1-\sqrt{3}\,i)}+(1-i)^2;$ $\quad d)\ \dfrac{(1-2i)^2-(1-i)^2}{(3+2i)^3-(2+i)^2};$

$e)\ \dfrac{(2+i)^2\cdot(4+i)}{(1-i)^2}-(2-3i)^3;$ $\quad f)\ \dfrac{i^{25}+i^{46}}{(2-i)}.$

2. Найти вещественные числа, удовлетворяющие уравнению:

$a)\ (2+i)x+(1+2i)y=1-4\mathrm{i};$ $b)\ (3+2i)x+(1+3\mathrm{i})y=4-9\mathrm{i};$ $c)\ (1+2\mathrm{i})x+(3+5\mathrm{i})y=1-3\mathrm{i}.$

3. Вычислить в алгебраической форме:

$a)\ \sqrt{3+4i};$ $b)\ \sqrt{-15+8i};$ $c)\ \sqrt{8+6i};$ $d)\ \sqrt{2-3i};$ $e)\ \sqrt{3-4i}.$