ГИДРОМЕХАНИКА

Лекция 7
Плоское потенциальное движение

Применение функций комплексного переменного

Как уже отмечали, для для плоских потенциальных течений существуют функции, связанные соотношениями

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \qquad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Эти уравнения дают возможность применить для описания потенциальных течений несжимаемой жидкости, аппарат теории функции комплексного переменного

Применение функций комплексного переменного

В теории функций комплексного переменного доказывается, что если две функции $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ связаны приведенными условиями (условиями Коши-Римана), то они являются соответственно **действительной** и **мнимой** частью некоторой функции комплексного переменного

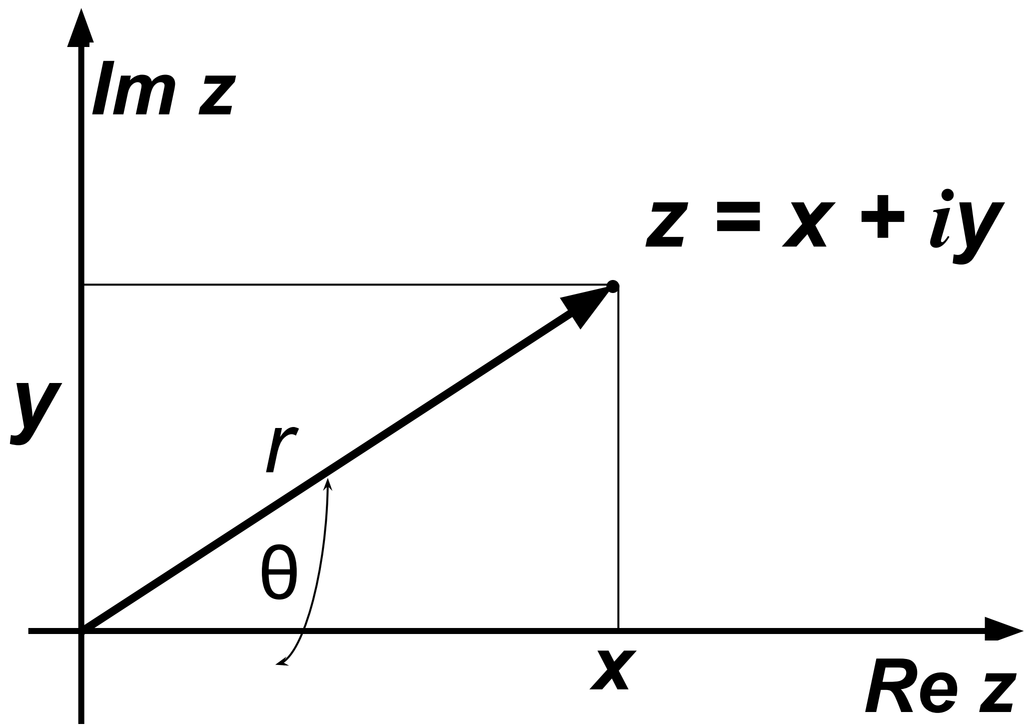
$$\boldsymbol{w\,(z) = \varphi + i\psi},$$

называемой ***комплексным потенциалом.***

Эта функция обладает определенной конечной производной во всех точках области, где определены φ и ψ .

Применение функций комплексного переменного

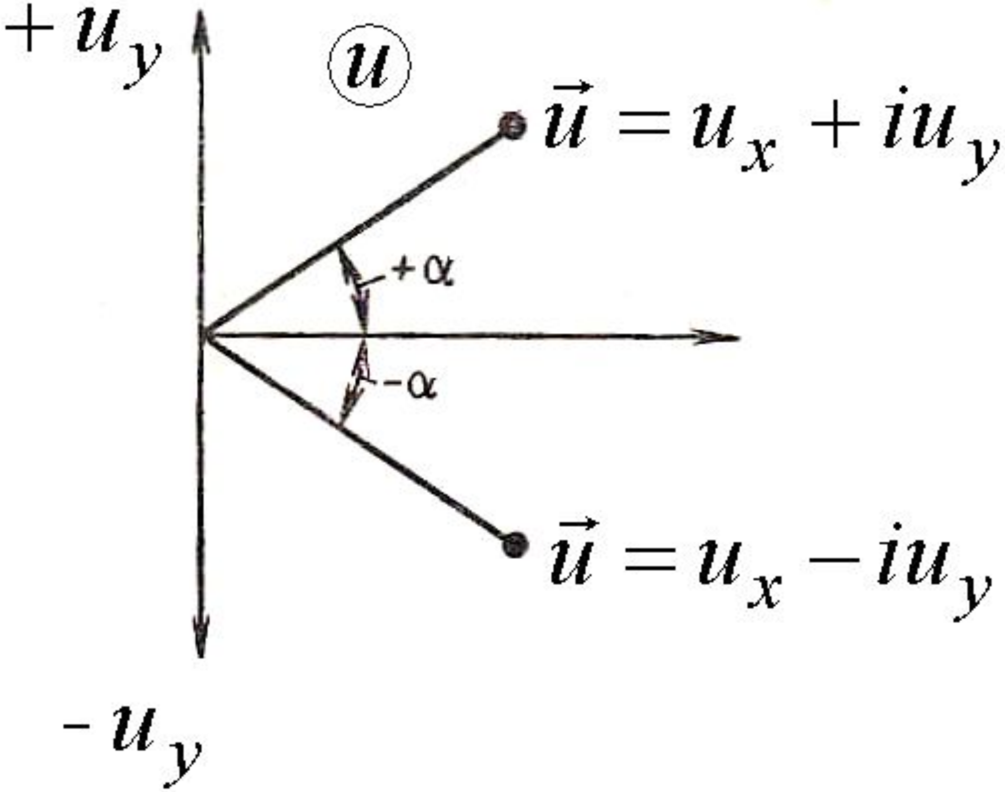
Комплексное число имеет действительную (*Re*) и мнимую (*Im*) части



a)

Применение функций комплексного переменного

Плоскость течения рассматривается, как плоскость комплексной переменной ***z* = *x* + *iy***



Применение функций комплексного переменного

Комплексное число также можно изображать радиус-вектором. Длина радиус-вектора, изображающего комплексное число , называется модулем комплексного числа.

Модуль вычисляется по формуле:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

О комплексных числах

Модуль любого ненулевого комплексного числа есть положительное число.

Число $z = x - iy$ называется ***комплексно-сопряженным числом*** к числу $z = x + iy$, т. е. комплексно сопряженные числа отличаются лишь знаком мнимой части.

Модули ***комплексно-сопряженных чисел*** равны.

Модуль произведения (частного) двух комплексных чисел равен произведению (частному) модулей каждого из чисел.

Аргумент θ комплексного числа связан с его действительной и мнимой частями соотношениями:

$$\theta = \arg z = \mathrm{tg}\frac{y}{x};$$

Применение функций комплексного переменного

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Тригонометрической формой комплексного числа называется выражение

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Показательной формой комплексного числа называется выражение

$$z = re^{i\theta}$$

Применение функций комплексного переменного

Для того, чтобы функция

$$\boldsymbol{w\ (z) = \varphi + i\psi = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)},$$

определенная в некоторой области, была дифференцируемой в точке ***z*** этой области, необходимо и достаточно, чтобы функции

$$\boldsymbol{\varphi(x,\ y)} \text{ и } \boldsymbol{\psi(x,y)}$$

были дифференцируемы в той же точке и для них удовлетворялись уравнения Коши-Римана.

$$\boxed{u_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}; \qquad u_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}}$$

Такая функция называется **аналитической.** Следовательно, любую аналитическую функцию $w(z)$ можно рассматривать как **комплексный потенциал** некоторого плоского течения.

Производная функции комплексного переменного считается существующей лишь тогда, когда

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta z} = \frac{dW}{dz}$$

не зависит от способа приближения Δz к нулю.

Применение функций комплексного переменного

$$\frac{dW}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{W(z + \Delta z) - W(z)}{\Delta z} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varphi(x + \Delta x, y) + i\psi(x + \Delta x, y) - \varphi(x, y) - i\psi(x, y)}{\Delta z} =$$

$$= \frac{d\varphi}{dx} + i\frac{d\psi}{dx} = u_x - iu_y$$

Применение функций комплексного переменного

Производная комплексного потенциала по независимой переменной представляет собой комплексную переменную

$$\bar{u} = u_x - iu_y$$

действительная часть которой равна проекции скорости $\boldsymbol{u_x}$, а мнимая – взятой с обратным знаком проекции $\boldsymbol{u_y}$

Применение функций комплексного переменного

Производная функции течения в какой либо точке равна комплексной сопряженной скорости в этой точке.

Модуль этой производной дает абсолютную величину скорости, а аргумент, взятый с обратным знаком, определяет направление скорости в рассматриваемой точке.

При сложении течений комплексные потенциалы суммируются:

$$W(z) = W_1(z) + W_2(z) + \ldots + W_n(z)$$

Применение функций комплексного переменного

В плоскости течения могут находиться точки, в которых производная комплексного потенциала обращается в ноль или в бесконечность. Это особые точки, в которых функция *W(z)* не является аналитической.

В точках, где

$$\frac{dW}{dz} = \infty,$$

может пересекаться бесконечно большое число линий тока. В этих точках располагаются источники, диполи, вихри.

В точках, где

$$\frac{dW}{dz} = 0,$$

(u =0) пересекаются две или несколько (конечное число) линий тока. Эти точки называются точками разветвления, а проходящие через них линии тока - разделительными.

Величину $\bar{u}$ называют сопряженной скоростью. В комплексной плоскости u_x, u_y называемой плоскостью годографа скорости, число является сопряженным с числом

$$u = u_x + iu_y,$$

которое называется комплексной скоростью.

Величины u и $\bar{u}$ можно также представить в форме

$$u = u_x + iu_y = |u|(\cos\alpha + i\sin\alpha) = |u|e^{i\alpha}$$

$$\bar{u} = u_x - iu_y = |u|(\cos\alpha - i\sin\alpha) = |u|e^{-i\alpha}$$

Применение функций комплексного переменного

Плоские течения с помощью комплексного потенциала можно изучать различно.

Во-первых, можно, задавшись конфигурацией линий тока или полем скоростей, отыскивать вид функций φ и ψ, *W* и $\overline{u}$.

Во-вторых, можно, задавшись аналитической функцией *W*, выделить в ней действительную и мнимую части (т. е. φ и ψ).
А также найти

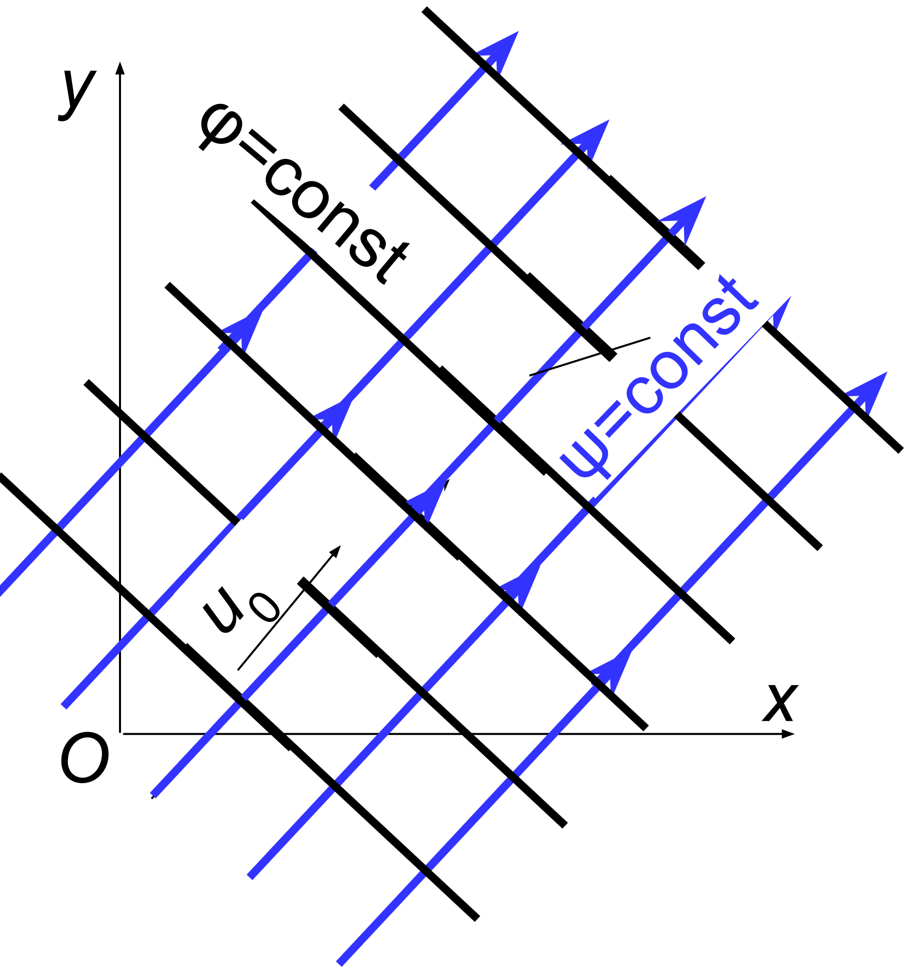
$$\frac{dW}{dz} = \overline{u}$$

чем определится поле скоростей.

Рассмотрим, как выразится комплексный потенциал для элементарных потоков.

Параллельно-струйное движение

Рассмотрим функцию $W = az$; где a- постоянное комплексное число.



Так как $\dfrac{dW}{dz} = a,$

то $a = \bar{u},$

которая в этом случае постоянна во всей плоскости течения $\bar{u}_0$.

$$W = |u_0| e^{-i\alpha} z$$

$$\frac{dW}{dz} = |u_0| e^{-i\alpha}$$

Параллельно-струйное движение

$$W = \varphi + i\psi$$

$$\varphi = u_{0x}x + u_{0y}y = u_0(x\cos\alpha + y\sin\alpha)$$

$$\psi = u_{0x}y - u_{0y}x = u_0(-x\sin\alpha + y\cos\alpha)$$

Вдоль линий тока ψ= const и, следовательно, их уравнение запишется, в виде

$$u_{0x}y - u_{0y}x = \text{const}$$

Это уравнение семейства параллельных прямых, наклоненных к оси *x*, под углом α

$$\text{tg}\alpha = \frac{u_{0y}}{u_{0x}}$$

Параллельно-струйное движение

Эквипотенциали представляют собой другое семейство параллельных прямых, ортогональное к первому.

В частном случае, когда $u_{0y} = 0$ ($\alpha_0 = 0$), будет

$$W = u_{0x}z;\ \bar{u} = u_{0x};\ \varphi = u_{0x}x;\ \psi = u_{0x}y$$

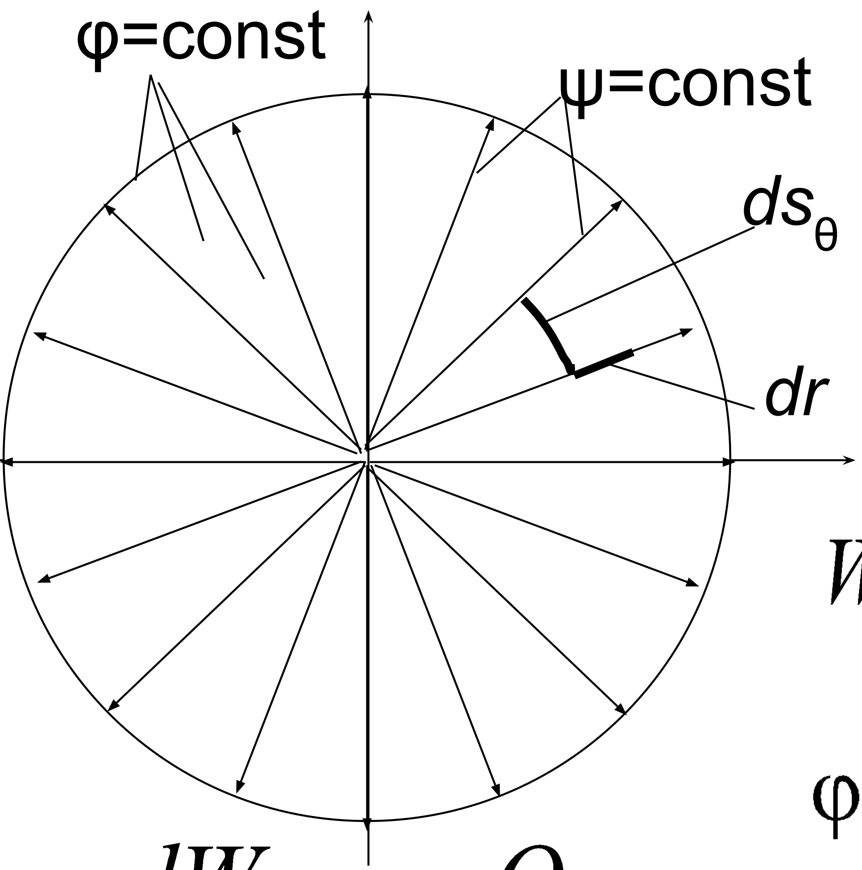
и получается прямолинейный поток вдоль оси x.

Если же $\alpha = \pi/2$, то этот поток направлен вдоль оси y:

$$W = -iu_{0y}z;\ \bar{u} = iu_{0y};\ \varphi = u_{0y}y;\ \psi = -u_{0y}x$$

Течение от источника (стока) в начале координат

$$W = \pm \frac{Q}{2\pi} \ln z$$



Представим z в показательной форме

$$z = re^{i\theta}$$

тогда

$$W = \pm \frac{Q}{2\pi} (\ln z + i\theta) = \varphi + i\psi$$

$$\varphi = \pm \frac{Q}{2\pi} \ln r = \pm \frac{Q}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\psi = \pm \frac{Q}{2\pi} \theta = \pm \frac{Q}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

$$\frac{dW}{dz} = \pm \frac{Q}{2\pi z}$$

Течение от источника (стока) в начале координат

Линии тока (ψ= const или *y/x* =const) представляют собой прямые, проходящие через начало координат, а эквипотенциали (φ= const или x^2+y^2= const) -окружности с общим центром в начале координат.

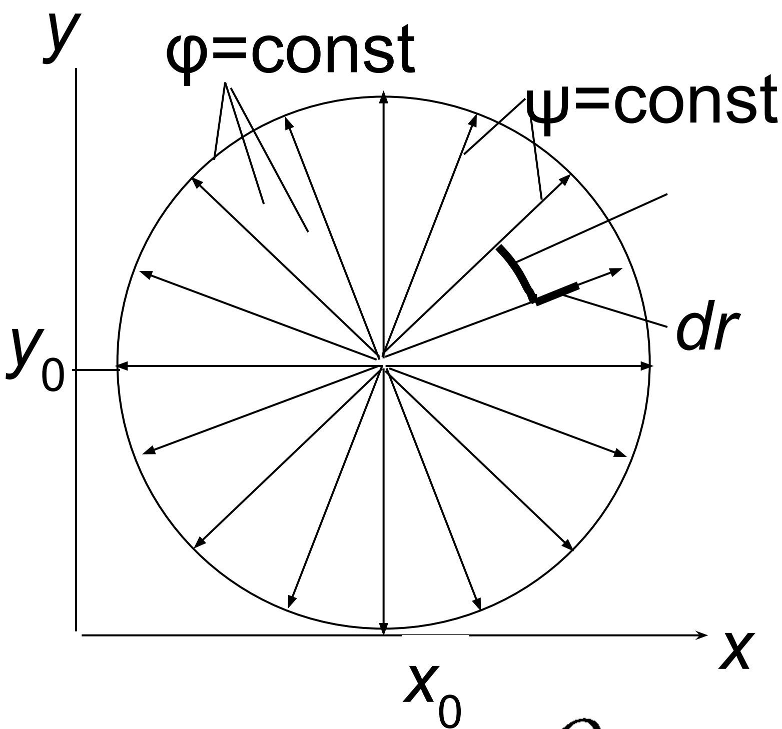
Проекции скорости в полярных координатах:

$$u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \pm \frac{Q}{2\pi r}; \quad u_\theta = \frac{\partial \varphi}{\partial s_\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0$$

В поле источника (стока) скорость убывает обратно пропорционально расстоянию от центра.

Скорость, направленная от центра к периферии (источник), положительна, в этом случае Q >0. Стоку соответствует Q <0.

Течение от источника в точке $z_0=x_0+iy_0$



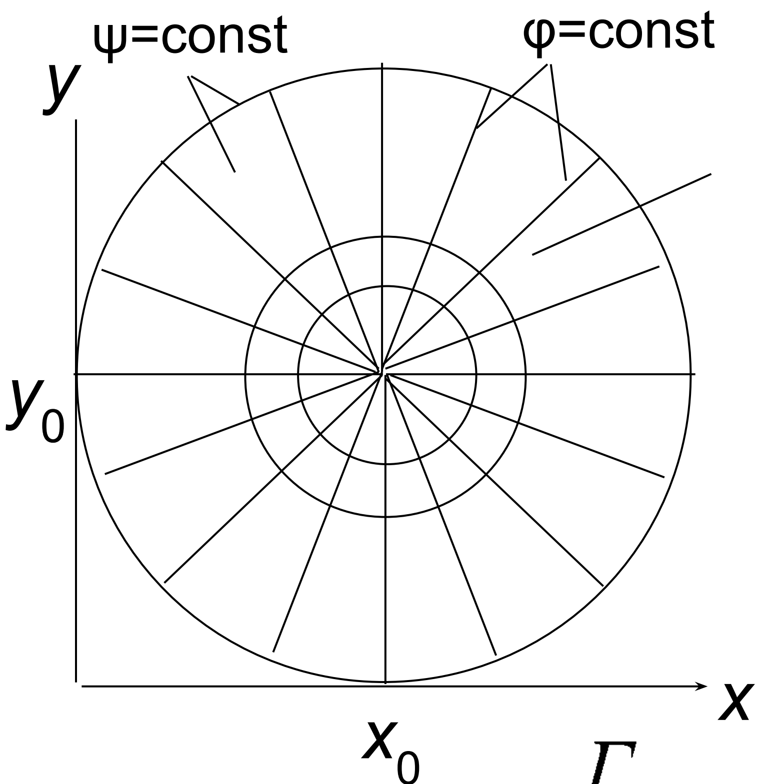
$$W = \pm\frac{Q}{2\pi}\ln(z - z_0)$$

$$\frac{dW}{dz} = \pm\frac{Q}{2\pi(z - z_0)}$$

$$\varphi = \pm\frac{Q}{2\pi}\ln r = \pm\frac{Q}{2\pi}\ln\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

$$\psi = \pm\frac{Q}{2\pi}\theta = \pm\frac{Q}{2\pi}\operatorname{arctg}\frac{y - y_0}{x - x_0}$$

Течение от вихря в точке $z_0=x_0+iy_0$



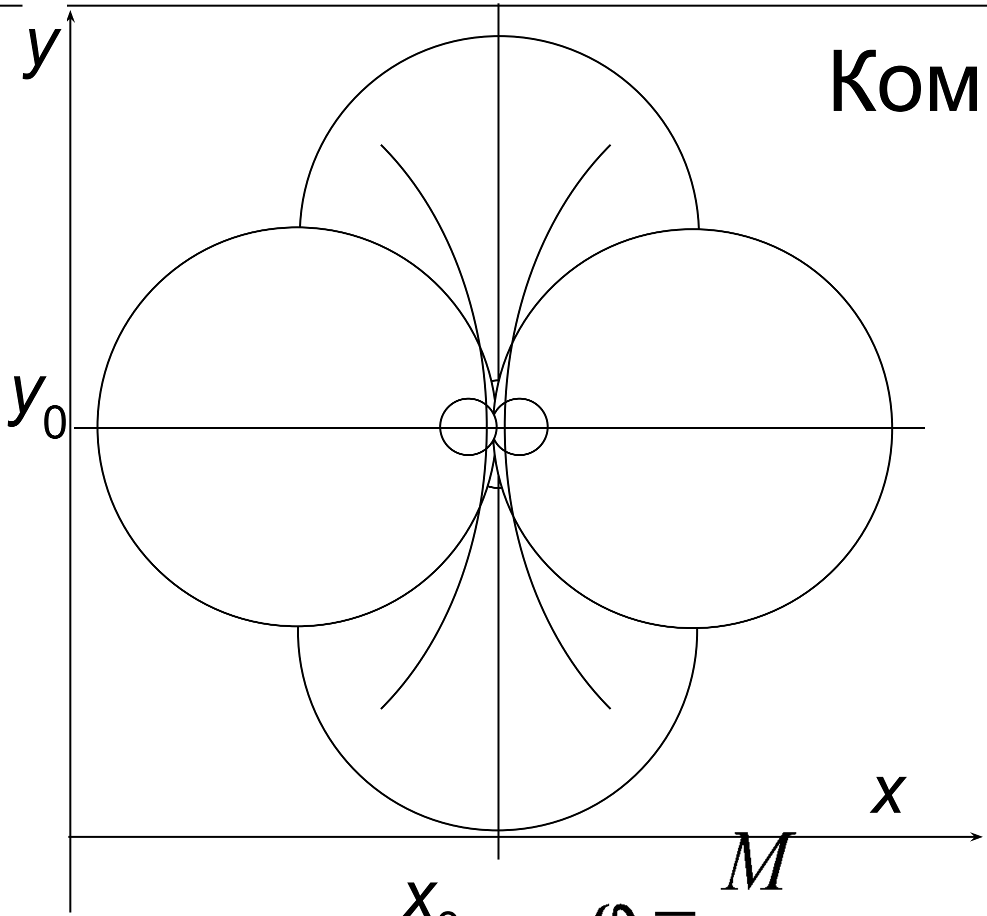
$$W=-\frac{i\Gamma}{2\pi}\ln(z-z_0)$$

$$\frac{dW}{dz}=-\frac{i\Gamma}{2\pi(z-z_0)}$$

$$\varphi=\frac{\Gamma}{2\pi}\operatorname{arctg}\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{\Gamma}{2\pi}\theta$$

$$\psi=-\frac{\Gamma}{2\pi}\ln\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=-\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r$$

Течение от диполя в точке $z_0 = x_0 + iy_0$



Комплексный потенциал

$$W = \frac{M}{2\pi}\frac{1}{(z - z_0)}$$

$$\frac{dW}{dz} = -\frac{M}{2\pi}\frac{1}{(z - z_0)^2}$$

$$\varphi = \frac{M}{2\pi}\frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \frac{M}{2\pi}\frac{\cos\theta}{r}$$

$$\psi = -\frac{M}{2\pi}\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \frac{M}{2\pi}\frac{\sin\theta}{r}$$