Математические модели в экономике

Математические модели в экономике – научная дисциплина, занимающаяся разработкой и практическим применением методов наиболее эффективного управления различными организационными системами

Управление любой системой характеризуется как процесс, подчиняющийся определенным закономерностям.

Цель – количественное обоснование параметров, характеризующих исследуемый процесс, для грамотного принятия управленческих решений

При решении конкретной задачи управления применение математических методов предполагает:

- Построение математических и экономических моделей для задач принятия решения в сложных ситуациях и в условиях неопределенности;
- Изучение взаимосвязей, определяющих впоследствии принятие решений, и установление критериев эффективности, позволяющих оценивать преимущество того или иного варианта действий

Пример. Для обеспечения высокого качества выпускаемых изделий на заводе организуется система выборочного контроля. Требуется выбрать такие формы его организации (назначить размеры контрольных партий, указать последовательность контрольных операций, определить правила отбраковки), чтобы обеспечить необходимое качество при минимальных расходах

Пример. Для реализации определенной партии сезонных товаров создается сеть временных торговых точек. Требуется выбрать параметры сети – число точек, их размещение, количество персонала – так, чтобы обеспечить максимальную экономическую эффективность распродажи.

В каждом случае речь идет о каком-то управляемом мероприятии (операции), преследующем определенную цель. Заданы некоторые условия проведения данного мероприятия, в рамках которых необходимо принять решение – такое, чтобы мероприятие принесло определенную выгоду.

Операция – любое управляемое мероприятие, направленное на достижение целей. Результат операции зависит от способа ее проведения, то есть от выбора некоторых параметров.

Всякий определенный выбор параметров называют решением. Оптимальными считают те решения, которые предпочтительнее других. Поэтому основная задача – предварительное количественное обоснование оптимальных решений

Структура любой проблемы оптимального выбора определяется наличием следующих основных логических элементов:

- цели или ряда целей, достижение которых означает решение проблемы
- альтернативных средств (курсов действий) при помощи которых может быть достигнута цель (цели)

- способов оценки затрат ресурсов, требующихся для каждого альтернативного средства;
- способа отображения связей между целями, альтернативами и затратами;

- критерия (критериев) эффективности, сопоставляющих цели и затраты и устанавливающих наиболее предпочтительное решение;

Для решения этих задач используют методы экономико-математического моделирования.

Понятие экономико-математической модели

Под моделированием понимается исследование объектов познания косвенным путем при помощи анализа некоторых других вспомогательных объектов.

Такие вспомогательные объекты называются моделями.

Модель – это условный образ какого-либо объекта, приближенно воссоздающий этот объект с помощью некоторого языка.

В экономико-математических моделях таким объектом является экономический процесс (например, использование ресурсов, выпуск продукции и т.д.), а языком – классические и специально разработанные математические методы.

Экономико-математическая модель – это описание экономического объекта или процесса при помощи математических методов.

Эта модель выражает закономерности экономического процесса в абстрактном виде с помощью математических соотношений.

Цель использования математического моделирования в экономике- углубление количественного экономического анализа, расширение области экономической информации, упрощение экономических расчетов.

Этапы проведения экономико-математического моделирования:

1. Ставятся цели и задачи исследования, проводится качественное описание объекта в виде экономической модели.

2. Формируется математическая модель изучаемого объекта, осуществляется выбор (или разработка) методов исследования, подготавливается исходная информация.
3. Осуществляется анализ математической модели, проведение машинных расчетов, обработка и анализ полученных результатов.

Процедура экономико-математического моделирования заменяет дорогостоящие и трудоемкие натуральные эксперименты расчетами.

Во многих областях экономики возникает необходимость оптимизировать параметры процессов, объектов планирования и управления системами, что требует построения так называемых оптимизационных моделей.

Факторы, входящие в описание моделей можно разделить на две группы:

- постоянные факторы, обозначим их через a_1 a_2:
- зависимые факторы x_1, x_2 которые в известных пределах выбираются по усмотрению исследователя и связаны функциями f $(x_1, x_2 \ldots. x_n)$

В результате решения требуется определить оптимум некоторой функции (её минимум или максимум).

Такая функция, зависящая от факторов обеих групп, называется *целевой функцией* (критерием эффективности) и обозначается

$$F = f\left(x_1, x_2, \ldots, \alpha_1, \alpha_2, \ldots\right)$$

Общая постановка оптимизационной задачи формулируется в виде:

найти переменные $x_1, x_2 \ldots x_n$, удовлетворяющие системе неравенств (уравнений)

$$\varphi_i\left(x_1, x_2 \ldots x_n\right) \le b_i, \; i = 1,2,\ldots,m$$

и обращающие в максимум (или минимум) целевую функцию:

$$F = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \to \max(\min)$$

В тех случаях, когда функции *f* и ϕ в задаче оптимизации дважды дифференцируемы, можно применять *классические методы оптимизации,* связанные с нахождением частных производных второго порядка этих функций, приравниванием их к нулю и решением систем некоторых уравнений.

Однако применение этих методов весьма ограничено, так как задача определения экстремума функции n переменных технически трудна: метод дает возможность определить *локальный экстремум,* а из-за многомерности функции определение ее абсолютного максимального (или минимального) значения *(глобального экстремума)* может оказаться весьма трудоемким - тем более, что этот экстремум возможен на границе области решений.

В этих случаях для решения задачи применяются методы *математического программирования.*

Если критерии эффективности
Представляет собой линейную функцию,

$$F = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$$

а функции $$\varphi_i\left(x_1, x_2 \ldots x_n\right)$$

в системе ограничений также линейны, то такая задача является задачей *линейного программирования.*

Если критерий эффективности и (или) система ограничений задаются нелинейными функциями, то имеем задачу *нелинейного программирования.*

В частности, если указанные функции обладают свойствами выпуклости, то получаем задачу *выпуклого программирования*.

Если в задаче математического программирования имеется переменная времени и критерий эффективности выражается не в явном виде, а косвенно - через уравнения, описывающие протекание процессов во времени, то такая задача относится к *динамическому программированию.*

Имеются и другие методы математического программирования (стохастическое, целочисленное, дискретное и др.).

Из них наиболее распространенным и разработанным является линейное программирование.

В его рамки укладывается широкий круг практических оптимизационных задач.

Основная задача линейного программирования

Задача линейного программирования формулируется так: найти неотрицательные значения переменных

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

которые удовлетворяют системе линейных уравнений (неравенств)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

и обращают в минимум (максимум) линейную функцию

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

Задача об использовании ресурсов (задача планирования производства)

Для изготовления двух видов продукции P_1 и P_2 используют 4 вида ресурсов S_1 , S_2 , S_3 и S_4 .

Запасы ресурсов, число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, приведены в таблице (цифры условные).

Вид ресурса	Запас ресурса	Число ед. ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции	
		P_1	P_2
S_1	18	1	3
S_2	16	2	1
S_3	5		1
S_4	21	3	

Прибыль, полученная от единицы продукции P_1 и P_2, - соответственно 2 и 3 руб.

Необходимо составить план производства, при котором прибыль от реализации будет максимальной**.**

Составим экономико-математическую модель задачи.

Обозначим x_1 и x_2 – число единиц продукции соответственно P_1 и P_2, запланированных к производству.

Сразу оговоримся, что $\mathbf{x_1}$ и x_2 – принимают неотрицательные значения .

Ресурса S_1 хватит для изготовления одной единицы продукции P_1 и трех единиц продукции P_2 . Следовательно, для изготовления обоих видов продукции потребуется $x_1 + 3x_2$ единиц ресурса S_1 .
Но с другой стороны, запас ресурса S_1 ограничен и равен 18. Таким образом, получаем первое неравенство в системе:

$$x_1 + 3x_2 \leq 18$$

Рассуждая аналогичным образом далее, получим следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ 2x_1 + x_2 \leq 16 \\ x_2 \leq 5 \\ 3x_1 \leq 21 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Составим формулу для нахождения суммарной прибыли F.

Суммарная прибыль F составит $2x_1$ руб. от реализации продукции P_1 и $3x_2$ руб. – от реализации продукции P_2, т.е.

$$F = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

Итак, экономико-математическая модель задачи: найти такой план выпуска продукции, удовлетворяющих системе неравенств, при котором функция F принимает максимальное значение.

Задача составления рациона (задача о диете, задача о смесях)

Имеется два вида корма I и II, содержащие питательные вещества (витамины) S_1 , S_2 , S_3.

Содержание числа единиц питательных веществ в 1 кг каждого вида корма и необходимый минимум питательных веществ приведены в таблице (цифры условные).

Питательное вещество (витамин)	Необходимый минимум питательных веществ	Число ед. питательных веществ на ед. корма	
		Корм 1	Корм 2
S_1	9	3	1
S_2	8	1	2
S_3	12	1	6

Стоимость 1 кг корма I и II соответственно равна 3 и 7 руб.

Необходимо составить дневной рацион, имеющий минимальную стоимость, в котором содержание каждого вида питательных веществ было бы не менее установленного предела.

Составим экономико-математическую модель задачи.

Пусть x_1 и x_2 – количество кормов I и II, входящих в дневной рацион. Сразу оговоримся, что x_1 и x_2 *принимают неотрицательные значения*.

Тогда количество питательного вещества S_1 в данном количестве кормов I и II будет находиться по формуле:

$$3x_1 + x_2$$

С другой стороны, количество питательного вещества S_1 должно быть не менее 9. Следовательно

$$3x_1 + x_2 \geq 9$$

Рассуждая аналогичным способом, получим систему ограничений:

$$
\begin{cases}
3x_1 + x_2 \geq 9 \\
x_1 + 2x_2 \geq 8 \\
x_1 + 6x_2 \geq 12 \\
x_1 \geq 0 \\
x_2 \geq 0
\end{cases}
$$

Общая стоимость дневного рациона составит

$$F = 3x_1 + 7x_2 \to \min$$