Липецкий государственный технический университет

Кафедра прикладной математики

Прикладная математика

Лекция 6

Вырожденные случаи метода потенциалов.
Открытые транспортные задачи.
Транспортная задача с минимизацией времени.

Вырожденные случаи метода потенциалов

Вырожденные случаи транспортной задачи возникают, когда минимальное значение при нахождении опорного плана или пересчёте цикла достигается в нескольких значениях. Преодолеваются вырожденные случаи двумя способами:

1. Можно попытаться выбрать другой опорный план или другой цикл.
2. Ввести в некоторые клетки ε, считая по ходу решения задачи $\varepsilon > 0$ и меньше всех других величин количества груза в таблице, а затем положить $\varepsilon = 0$.

Пример 1

	B_1	B_2	B_3	Всего
A_1	1	3	2	15
A_2	2	4	3	25
A_3	5	2	3	10
Всего	15	25	10	50

Пример 1

	B_1	B_2	B_3	Всего
A_1	15 [1]	[3]	[2]	15
A_2	[2]	25 [4]	[3]	25
A_3	[5]	[2]	10 [3]	10
Всего	15	25	10	50

Такой план является вырожденным для метода потенциалов.

Пример 1

	B_1	B_2	B_3	Всего
A_1	1	3	2	15
A_2	2	4	3	25
A_3	5	2	3	10
Всего	15	25	10	50

Пример 1

	B_1	B_2	B_3	Всего
A_1	^{1}	^{3}	$10 \quad ^{2}$	15
A_2	^{2}	^{4}	^{3}	25
A_3	^{5}	^{2}	^{3}	10
Всего	15	25	10	50

Пример 1

	B_1	B_2	B_3	Всего
A_1	1	5 3	10 2	15
A_2	2	4	3	25
A_3	5	2	3	10
Всего	15	25	10	50

Пример 1

	B_1	B_2	B_3	Всего
A_1	1	5 3	10 2	15
A_2	2	20 4	3	25
A_3	5	2	3	10
Всего	15	25	10	50

Пример 1

	B_1	B_2	B_3	Всего
A_1	^{1}	5 ^{3}	10 ^{2}	15
A_2	5 ^{2}	20 ^{4}	^{3}	25
A_3	^{5}	^{2}	^{3}	10
Всего	15	25	10	50

Пример 1

	B_1	B_2	B_3	Всего
A_1	^{1}	5 ^{3}	10 ^{2}	15
A_2	5 ^{2}	20 ^{4}	^{3}	25
A_3	10 ^{5}	^{2}	^{3}	10
Всего	15	25	10	50

Получен невырожденный план.

Пример 1

	B_1	B_2	B_3	Всего
A_1	1	3	2	15
A_2	2	4	3	25
A_3	5	2	3	10
Всего	15	25	10	50

Попробуем найти невырожденный план с меньшей стоимостью перевозок. Для этого будем сначала заполнять клетки с меньшими стоимостями перевозок, если это возможно.

Пример 1

	B_1	B_2	B_3	Всего
A_1	1	3	10 2	15
A_2	2	4	3	25
A_3	5	2	3	10
Всего	15	25	10	50

Пример 1

	B_1	B_2	B_3	Всего
A_1	^{1}	$5\ ^{3}$	$10\ ^{2}$	15
A_2	^{2}	^{4}	^{3}	25
A_3	^{5}	^{2}	^{3}	10
Всего	15	25	10	50

Пример 1

	B_1	B_2	B_3	Всего
A_1	1	5 3	10 2	15
A_2	2	4	3	25
A_3	5	10 2	3	10
Всего	15	25	10	50

Пример 1

	B_1	B_2	B_3	Всего
A_1	1	5 3	10 2	15
A_2	2	10 4	3	25
A_3	5	10 2	3	10
Всего	15	25	10	50

Пример 1

	B_1	B_2	B_3	Всего
A_1	^{1}	5 ^{3}	10 ^{2}	15
A_2	15 ^{2}	10 ^{4}	^{3}	25
A_3	^{5}	10 ^{2}	^{3}	10
Всего	15	25	10	50

Получен невырожденный план с меньшей стоимостью перевозок.

Пример 2

	B_1	B_2	B_3	Всего
A_1	1	3	2	20
A_2	2	4	3	20
A_3	5	2	3	20
Всего	20	20	20	60

Для нахождения невырожденного плана в этом примере необходимо ввести фиктивные величины.

Пример 2

	B_1	B_2	B_3	Всего
A_1	$20-\varepsilon$ [1]	[3]	[2]	$20-\varepsilon$
A_2	ε [2]	$20-\varepsilon$ [4]	[3]	20
A_3	[5]	ε [2]	20 [3]	$20+\varepsilon$
Всего	20	20	20	60

Для нахождения невырожденного опорного плана в этом примере необходимо ввести фиктивные величины.

Открытые транспортные задачи

Задачи, в которых $\sum a_i \neq \sum b_j$, называют открытыми задачами (задачами с неправильным балансом). Их также можно решать методом потенциалов. Если $\sum a_i > \sum b_j$, то вводим фиктивный пункт назначения $B_ф$. Для $B_ф$ считаем заявку равной разности $\sum a_i - \sum b_j$. Стоимости перевозок единиц груза в пункт назначения $B_ф$ полагаются равными нулю. После введения $B_ф$ получаем закрытую задачу (задачу с правильным балансом).

В случае, когда $\sum a_i < \sum b_j$, аналогично вводится фиктивный пункт отправления $A_ф$. Полагаем его запас равным $\sum b_j - \sum a_i$, а стоимости перевозок из этого пункта равными нулю.

Пример

	B_1	B_2	B_3	Всего
A_1	1	3	2	15
A_2	2	4	3	19
A_3	5	2	3	16
Всего	22	18	20	60 50

Пример

	B_1	B_2	B_3	Всего
A_1	1	3	2	15
A_2	2	4	3	19
A_3	5	2	3	16
$A_ф$	0	0	0	10
Всего	22	18	20	60

Пример

	B_1	B_2	B_3	Всего
A_1	15^{1}	^{3}	^{2}	15
A_2	7^{2}	12^{4}	^{3}	19
A_3	^{5}	6^{2}	10^{3}	16
$A_ф$	^{0}	^{0}	10^{0}	10
Всего	22	18	20	60

Пример

	B_1			B_2			B_3			
A_1	1	15	1	3		3	4		2	0
A_2	2	7	2	4	12	4	5		3	1
A_3	0		5	2	6	2	3	10	3	−1
$A_ф$	−3		0	−1		0	0	10	0	−4
		1			3			4		

Пример

	B_1	B_2	B_3	
A_1	1 15 1	3 3	4 2	0
A_2	2 7 2	4 12 − 4	5 + 3	1
A_3	0 5	2 6 + 2	3 − 10 3	−1
$A_ф$	−3 0	−1 0	0 10 0	−4
	1	3	4	

Пример

	B_1			B_2			B_3			
A_1	1	15	1	3		3	2		2	0
A_2	2	7	2	4	2	4	3	10	3	1
A_3	0		5	2	16	2	1		3	−1
$A_ф$	−1		0	1		0	0	10	0	−2
		1			3			2		

Пример

	B_1	B_2	B_3	
A_1	1 15 1	3 3	2 2	0
A_2	2 7 2	4 2 − 4	3 + 10 3	1
A_3	0 5	2 16 2	1 3	−1
$A_ф$	−1 0	1 + 0	0 − 10 0	−2
	1	3	2	

Пример

	B_1	B_2	B_3	
A_1	1 **15** 1	2 3	2 2	0
A_2	2 **7** 2	3 4	3 **12** 3	1
A_3	0 5	2 **16** 2	2 3	0
$A_ф$	−1 0	0 **2** 0	0 **8** 0	−2
	1	2	2	

Оптимальный план найден.

Пример

	B_1	B_2	B_3	Всего
A_1	1 15 1	2 3	2 2	15
A_2	2 7 2	3 4	3 12 3	19
A_3	0 5	2 16 2	2 3	16
Всего	22	18	20	60 50

$$L_{\min} = 15 + 14 + 36 + 32 = 87.$$

Транспортная задача с минимизацией времени

Пусть имеются пункты отправления груза A_1, A_2, …, A_m и пункты назначения груза B_1, B_2, …, B_n. Запасы груза на пунктах отправления A_i составляет a_i единиц, а заявки пунктов назначения B_j составляют b_j единиц. Полагаем, что $\sum a_i = \sum b_j$. Известно время t_{ij} перевозки груза из пункта отправления A_i в пункт назначения B_j (не зависит от количества груза).

Ставится задача найти минимальное время перевозок. Считается, что все перевозки начинаются одновременно.

$$L = \max_{x_{ij}>0} t_{ij} \to \min$$

$$\begin{cases} x_{11} + \ldots + x_{1n} = a_1, \\ \ldots \\ x_{m1} + \ldots + x_{mn} = a_m. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{11} + \ldots + x_{m1} = b_1, \\ \ldots \\ x_{1n} + \ldots + x_{mn} = b_n. \end{cases}$$

$$x_{11} \geq 0,\ x_{12} \geq 0,\ \ldots,\ x_{mn} \geq 0.$$

Транспортная задача с минимизацией времени

Эта задача является задачей нелинейного программирования, так как L нелинейна. Для её решения можно применить метод "вычёркивания клеток". Вычёркиваем из таблицы клетки, в которых t_{ij} максимально. Пытаемся найти план, не использующий этих клеток. Если план найти удается, то вычеркиваем следующие клетки. Если нет, то предыдущий полученный план является оптимальным.

Некоторые случаи, когда таблицу заполнить нельзя:

1. В строке (столбце) вычеркнуты все клетки.
2. В строке (столбце) остается одна невычеркнутая клетка и сумма в строке (столбце) больше суммы столбца (строки).

При заполнении таблицы надо рассмотреть все возможные способы заполнения. Можно ограничится только невырожденными, если они есть.

Проще найти план, если начинать заполнение таблицы со строк и столбцов с наименьшим количеством невычеркнутых клеток.

Пример

	B_1	B_2	B_3	B_4	Всего
A_1	1	3	4	2	15
A_2	6	5	3	2	20
A_3	3	1	2	4	10
A_4	4	3	4	1	20
A_5	2	4	3	3	25
A_6	5	2	2	3	10
Всего	25	25	20	30	100

Пример

	B_1	B_2	B_3	B_4	Всего
A_1	1	3	4	2	15
A_2	6	5	3	2	20
A_3	3	1	2	4	10
A_4	4	3	4	1	20
A_5	2	4	3	3	25
A_6	5	2	2	3	10
Всего	25	25	20	30	100

Пример

	B_1	B_2	B_3	B_4	Всего
A_1	1	3	4	2	15
A_2	6	5	3	2	20
A_3	3	1	2	4	10
A_4	4	3	4	1	20
A_5	2	4	3	3	25
A_6	5	2	2	3	10
Всего	25	25	20	30	100

Пример

	B_1	B_2	B_3	B_4	Всего
A_1	1	3	4	2	15
A_2	6	5	3	2	20
A_3	3	1	2	4	10
A_4	4	3	4	1	20
A_5	2	4	3	3	25
A_6	5	2	2	3	10
Всего	25	25	20	30	100

Пример

	B_1	B_2	B_3	B_4	Всего
A_1	15 ^{1}	^{3}	$\cancel{^{4}}$	^{2}	15 •
A_2	$\cancel{^{6}}$	$\cancel{^{5}}$	^{3}	^{2}	20
A_3	^{3}	^{1}	^{2}	$\cancel{^{4}}$	10
A_4	$\cancel{^{4}}$	^{3}	$\cancel{^{4}}$	^{1}	20
A_5	^{2}	$\cancel{^{4}}$	^{3}	^{3}	25
A_6	$\cancel{^{5}}$	^{2}	^{2}	^{3}	10
Всего	25	25	20	30	100

Пример

	B_1	B_2	B_3	B_4	Всего
A_1	15 ^{1}	^{3}	^{4}	^{2}	15
A_2	^{6}	^{5}	^{3}	^{2}	20
A_3	^{3}	^{1}	^{2}	^{4}	10
A_4	^{4}	^{3}	^{4}	^{1}	20
A_5	10 ^{2}	^{4}	^{3}	^{3}	25
A_6	^{5}	^{2}	^{2}	^{3}	10
Всего	25	25	20	30	100

Пример

	B_1	B_2	B_3	B_4	Всего
A_1	15 [1]	[3]	~~[4]~~	[2]	15
A_2	~~[6]~~	~~[5]~~	[3]	[2]	20
A_3	[3]	[1]	[2]	~~[4]~~	10
A_4	~~[4]~~	[3]	~~[4]~~	[1]	20
A_5	10 [2]	~~[4]~~	15 [3]	[3]	25
A_6	~~[5]~~	[2]	[2]	[3]	10
Всего	25	25	20	30	100

Пример

	B_1	B_2	B_3	B_4	Всего
A_1	15 ^{1}	^{3}	^{4}	^{2}	15
A_2	^{6}	^{5}	^{3}	^{2}	20
A_3	^{3}	^{1}	5 ^{2}	^{4}	10
A_4	^{4}	^{3}	^{4}	^{1}	20
A_5	10 ^{2}	^{4}	15 ^{3}	^{3}	25
A_6	^{5}	^{2}	^{2}	^{3}	10
Всего	25	25	20	30	100

Пример

	B_1	B_2	B_3	B_4	Всего
A_1	15 [1]	[3]	~~[4]~~	[2]	15 •
A_2	~~[6]~~	~~[5]~~	[3]	[2]	20
A_3	[3]	5 [1]	5 [2]	~~[4]~~	10 •
A_4	~~[4]~~	[3]	~~[4]~~	[1]	20
A_5	10 [2]	~~[4]~~	15 [3]	[3]	25 •
A_6	~~[5]~~	[2]	[2]	[3]	10
Всего	25 •	25	20 •	30	100

Пример

	B_1	B_2	B_3	B_4	Всего
A_1	15 ^{1}	^{3}	^{4}	^{2}	15
A_2	^{6}	^{5}	^{3}	^{2}	20
A_3	^{3}	5 ^{1}	5 ^{2}	^{4}	10
A_4	^{4}	^{3}	^{4}	^{1}	20
A_5	10 ^{2}	^{4}	15 ^{3}	^{3}	25
A_6	^{5}	10 ^{2}	^{2}	^{3}	10
Всего	25	25	20	30	100

Пример

	B_1	B_2	B_3	B_4	Всего
A_1	15 ^{1}	^{3}	^{4}	^{2}	15 •
A_2	^{6}	^{5}	^{3}	^{2}	20
A_3	^{3}	5 ^{1}	5 ^{2}	^{4}	10 •
A_4	^{4}	10 ^{3}	^{4}	^{1}	20
A_5	10 ^{2}	^{4}	15 ^{3}	^{3}	25 •
A_6	^{5}	10 ^{2}	^{2}	^{3}	10 •
Всего	25 •	25 •	20 •	30	100

Пример

	B_1	B_2	B_3	B_4	Всего
A_1	15 [1]	[3]	~~[4]~~	[2]	15 •
A_2	~~[6]~~	~~[5]~~	[3]	[2]	20
A_3	[3]	5 [1]	5 [2]	~~[4]~~	10 •
A_4	~~[4]~~	10 [3]	~~[4]~~	10 [1]	20 •
A_5	10 [2]	~~[4]~~	15 [3]	[3]	25 •
A_6	~~[5]~~	10 [2]	[2]	[3]	10 •
Всего	25 •	25 •	20 •	30	100

Пример

	B_1	B_2	B_3	B_4	Всего
A_1	15 ^{1}	^{3}	~~4~~	^{2}	15
A_2	~~6~~	~~5~~	^{3}	20 ^{2}	20
A_3	^{3}	5 ^{1}	5 ^{2}	~~4~~	10
A_4	~~4~~	10 ^{3}	~~4~~	10 ^{1}	20
A_5	10 ^{2}	~~4~~	15 ^{3}	^{3}	25
A_6	~~5~~	10 ^{2}	^{2}	^{3}	10
Всего	25	25	20	30	100

Пример

	B_1	B_2	B_3	B_4	Всего
A_1	1	3	4	2	15
A_2	6	5	3	2	20
A_3	3	1	2	4	10
A_4	4	3	4	1	20
A_5	2	4	3	3	25
A_6	5	2	2	3	10
Всего	25	25	20	30	100

Пример

	B_1	B_2	B_3	B_4	Всего
A_1	1	3	4	2	15
A_2	6	5	3	2	20
A_3	3	1	2	4	10
A_4	4	3	4	1	20
A_5	2	4	3	3	25
A_6	5	2	2	3	10
Всего	25	25	20	30	100

В таблице нельзя заполнить четвертый столбец, поскольку его сумма меньше сумм второй и четвертой строк. $T_{min} = 3$.

Пример

	B_1	B_2	B_3	B_4	Всего
A_1	1	3	4	2	15
A_2	6	5	3	2	20
A_3	3	1	2	4	10
A_4	4	3	4	1	20
A_5	2	4	3	3	25
A_6	5	2	2	3	10
Всего	25	25	20	30	100

Задание для самоконтроля

	B_1	B_2	B_3	Всего
A_1	3	2	4	15
A_2	1	6	4	20
A_3	2	3	1	10
A_4	5	2	3	25
Всего	25	25	20	70

1. Минимальное время перевозок равно ...

1) 2,

2) 3,

3) 4,

4) 5.

Задания для самоконтроля

2. Какое утверждение верно для цикла?

1) несколько клеток, соединенных линией так, чтобы четыре вершины были расположены в одной строке.

2) несколько клеток, соединенных замкнутой линией так, чтобы две вершины были расположены либо в одном столбце.

3) несколько клеток, соединенных замкнутой ломаной линией так, чтобы две соседние вершины ломаной были расположены либо в одной строке, либо в одном столбце.

4) несколько клеток, соединенных незамкнутой ломаной линией так, чтобы две соседние вершины ломаной не были расположены в одной строке или в одном столбце.


Спасибо за внимание