



Матрицы и определители

Линейная алгебра

Определение матрицы

- Числовой матрицей размера $m \times n$ называется совокупность чисел, расположенных в виде таблицы, содержащей m строк и n столбцов

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

Основные понятия

- Если $m=n$ число строк равно числу столбцов, матрица называется ***квадратной***.
- Если $m=1$ – это ***матрица-строка*** или ***вектор-строка***
- Если $n=1$ – это ***матрица-столбец*** или ***вектор-столбец***

Основные понятия

- Если все элементы матрицы кроме диагональных равны нулю, то матрица называется ***диагональная***.
- Если диагональные элементы диагональной матрицы равны единице, то матрица называется ***единичной***.

Основные понятия

- Матрицы A и B называются равными, если они имеют одинаковый размер и их соответствующие элементы равны

$$A = B \Rightarrow a_{ij} = b_{ij}$$
$$i = 1, \dots, m$$
$$j = 1, \dots, n$$

Сложение матриц

- **Алгебраической суммой**

2-х равных матриц A и B

называется третья

матрица C , элементы

которой являются суммой

соответствующих

элементов A и B .

$$C = A \pm B \Rightarrow c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$$

$$i = 1, \dots, m$$

$$j = 1, \dots, n$$

Умножение матрицы на число

- При умножении матрицы A
на число

получается другая матрица C ,
элементы которой являются
произведением элементов A
и заданного числа.

$$C = \lambda A \Rightarrow c_{ij} = \lambda a_{ij}$$

$$\lambda \neq 0$$

$$i = 1, \dots, m$$

$$j = 1, \dots, n$$

Линейная комбинация матриц

- **Линейной комбинацией**

матриц

называется другая матрица C ,

элементы которой

определяются следующим

образом:

$$C = \lambda A \pm \gamma B \Rightarrow c_{ij} = \lambda a_{ij} \pm \gamma b_{ij}$$

$$\lambda, \gamma \neq 0$$

$$i = 1, \dots, m$$

$$j = 1, \dots, n$$

Произведение матриц

- Произведением матриц

называется другая матрица C ,
элементы которой
определяются следующим
образом:

«строка на столбец».

***Число столбцов 1-ой
перемножаемой матрицы
должно равняться числу
строк 2-ой перемножаемой
матрицы***

$$C = A \cdot B \Rightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}$$

$$i = 1, \dots, m$$

$$j = 1, \dots, n$$

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Определитель матрицы

- **Определителем или детерминантом** матрицы порядка n называется число, вычисляемое из элементов матрицы по определенному правилу

$$\Delta_A = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Определитель матрицы 1-го порядка

- **Определителем**

матрицы 1-го

порядка называется

число, равное

элементу матрицы

$$\Delta_A = \det A = |a_{11}| = a_{11}$$

Определитель матрицы 2-го порядка

- **Определителем** матрицы 2-го порядка называется число, вычисляемое из элементов матрицы по следующему правилу

$$\Delta_A = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Определитель матрицы 3-го порядка – правило треугольников

$$\begin{array}{ccc}
 & (+) & (-) \\
 \Delta = \begin{array}{|c|} \hline a_{11} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{ccc} a_{12} & a_{13} & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline a_{11} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline a_{12} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline a_{13} \\ \hline \end{array} \\
 & \begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & \end{array} & = \begin{array}{ccc} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & = \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 &= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{13} a_{21} a_{32} + a_{12} a_{23} a_{31} - \\
 &- a_{13} a_{22} a_{31} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33}
 \end{aligned}$$

Определение минора матрицы

- Минором M_{ij} элемента a_{ij} матрицы A порядка n называется определитель порядка $(n-1)$, полученный из элементов матрицы путем вычеркивания i -строки и j -столбца, на пересечении которых стоит этот элемент

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Определение алгебраического дополнения матрицы

- Алгебраическим дополнением A_{ij}

элемента a_{ij} матрицы A

порядка n называется

минор этого элемента

M_{ij} , взятый со знаком

$$(-1)^{i+j}$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Вычисление определителя

- Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов к-л. строки или столбца на соответствующие им алгебраические дополнения

$$\Delta_A = \sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot A_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Транспонирование матрицы

- *Транспонирование*

матрицы – это

изменение мест

строк и столбцов

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Свойства определителей 1

Определитель матрицы не меняется при её транспонировании.

$$\mathbf{det A = det A^T}$$

Свойства определителей 2

При перестановке

2-х рядов
определитель
матрицы меняет
знак на
противоположный

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Свойства определителей 3

Определитель матрицы

не изменится если

общий множитель

элементов к-л. ряда

вынести за знак

определителя

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 8 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Свойства определителей 4

Определитель матрицы

равен нулю, если

все элементы к-л.

ряда равны нулю.

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

Свойства определителей 5

Определитель матрицы

равен нулю, если
элементы 2-х рядов
равны.

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

Свойства определителей 6

Определитель матрицы

равен нулю, если
элементы 2-х рядов
пропорциональны.

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

Свойства определителей 7, 8

Определитель матрицы равен нулю, если элементы к-л. ряда являются линейной комбинацией элементов других рядов.

Определитель матрицы не изменится, если все элементы к-л. ряда умножить на число и прибавить к соответствующим элементам другого ряда.

Свойства определителей 9

Если все элементы к-л.ряда представить в виде суммы 2-х слагаемых, то определитель можно записать в виде суммы 2-х определителей.