GeekBrains

Последовательности и их пределы

Введение в математический анализ

GeekBrains

Домашнее задание

$$\forall x \in \mathbb{C} \nexists y \in \mathbb{C} : x > y || x < y$$

Что будет на уроке

1. Последовательности: определение; примеры.

1. Сходимость последовательностей (вычисление пределов)

Последовательность — это пронумерованный набор каких-либо объектов, среди которых допускаются повторения, причём **порядок объектов имеет значение.**

Примеры элементов последовательности: дни недели, времена года, наше расписание занятий; распорядок дня (с оговоркой, что порядок выполнения задач строгий).

Предмет нашего занятия – **числовые последовательности**, пронумерованные натуральными числами.

В качестве обозначения последовательности обычно используют строчные латинские буквы в кавычках

$$\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$$

Последовательности.

$1, \quad -1, \quad 1, \quad -1, \quad 1, \quad -1, \quad \ldots$

$1, \quad 3, \quad 5, \quad 7, \quad 9, \quad 11, \quad \ldots$

$1, \quad 4, \quad 9, \quad 16, \quad 25, \quad 36, \quad \ldots$

Последовательности.

	1	2	3	4	5	6	…	n
a	$1,$	$-1,$	$1,$	$-1,$	$1,$	$-1,$		$\ldots$
b	$1,$	$3,$	$5,$	$7,$	$9,$	$11,$	$\ldots$	
c	$1,$	$4,$	$9,$	$16,$	$25,$	$36,$		$\ldots$

Последовательности.

$\mathbf{1}, \quad -\mathbf{1}, \quad \mathbf{1}, \quad -\mathbf{1}, \quad \mathbf{1}, \quad -\mathbf{1}, \quad (-\mathbf{1})^{n-1}$

$\mathbf{1}, \quad \mathbf{3}, \quad \mathbf{5}, \quad \mathbf{7}, \quad \mathbf{9}, \quad \mathbf{11}, \quad (\mathbf{2}n-\mathbf{1})$

$\mathbf{1}, \quad \mathbf{4}, \quad \mathbf{9}, \quad \mathbf{16}, \quad \mathbf{25}, \quad \mathbf{36}, \quad n^{\mathbf{2}}$

Два способа задания числовой последовательности

явный

неявный

GeekBrains

Явный.

В этом случае есть конкретная формула для получения n-го члена последовательности. Эту формулу называют общим (главным) членом последовательности.

$$a_n = (-1)^{n+1} \quad \Rightarrow \quad \left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n+1}, \ldots\right\}$$

$$b_n = 2n - 1 \quad \Rightarrow \quad \left\{b_n\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots, 2n-1, \ldots\right\}$$

$$c_n = n^2 \quad \Rightarrow \quad \left\{c_n\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots, n^2, \ldots\right\}$$

Неявный.
Каждый член последовательности зависит не от номера, а от других элементов последовательности.
(но упорядоченность элементов сохраняется)

Пример - последовательность Фибоначчи.

$$a_1 = a_2 = 1$$

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \qquad n > 2$$

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, …

Арифметическая и геометрическая прогрессия (последовательность)

$$a_n = a_{n+1} + d$$

$$b_n = b_{n+1} * q$$

Пример геометрической последовательности

$$b_1 = -102$$
$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = 0{,}1$$

Найти 5-й член последовательности.

Пример геометрической последовательности

$$b_1 = -102$$

$$b_{n+1}/b_n = 0.1$$

$$b_{n+1} = 0.1 * b_n$$

$$b_2 = 0.1 * (-102)$$

$$b_3 = 0.1 * b_2 = 0.1 * 0.1 * (-102)$$

$$\cdots$$

$$b_5 = ?$$

Пример геометрической последовательности

$$b_1 = -102$$

$$b_{n+1}/b_n = 0.1$$

$$b_{n+1} = 0.1 * b_n$$

$$b_2 = 0.1 * (-102)$$

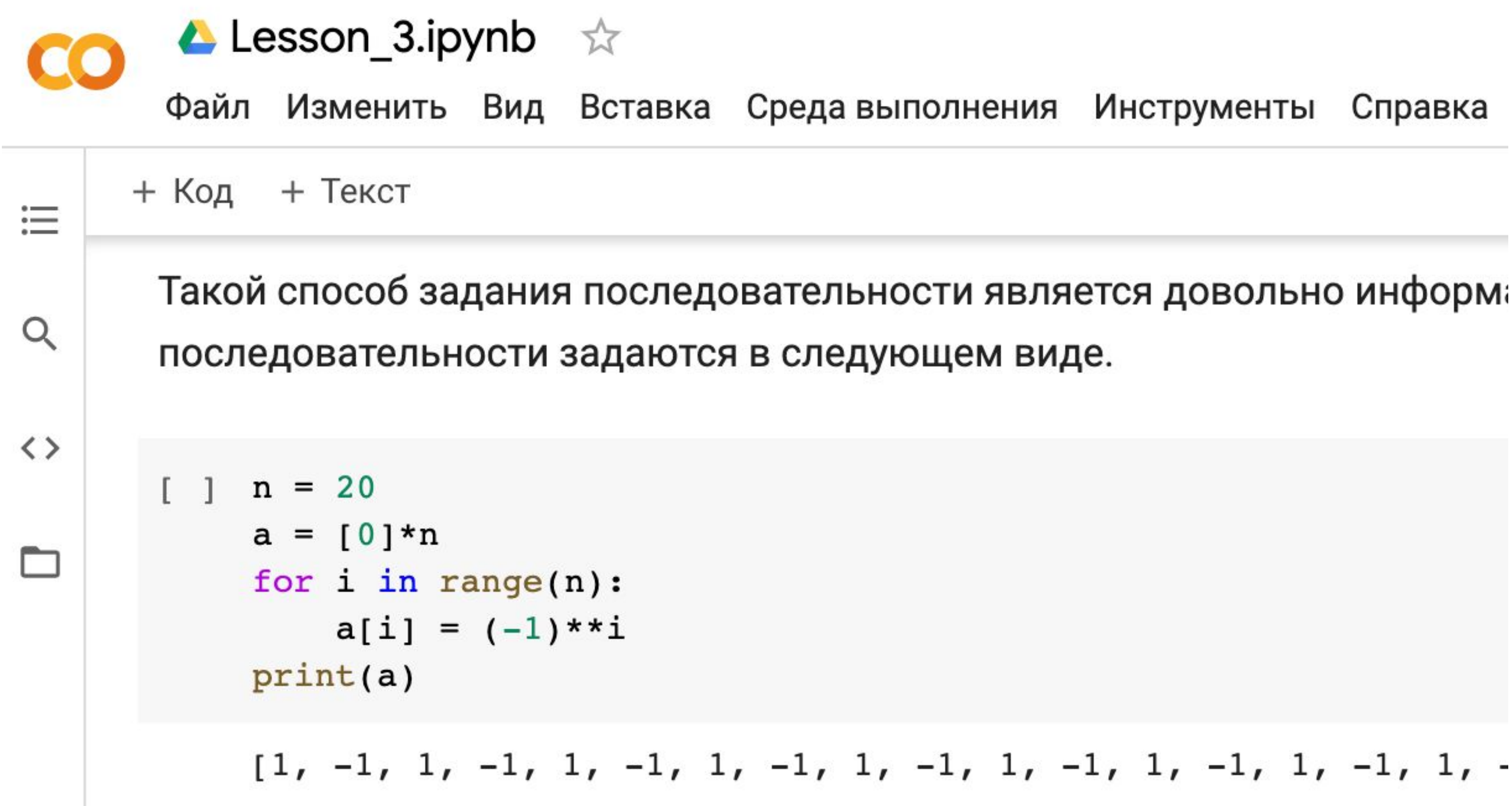
$$b_3 = 0.1 * b_2 = 0.1 * 0.1 * (-102)$$

$$\ldots$$

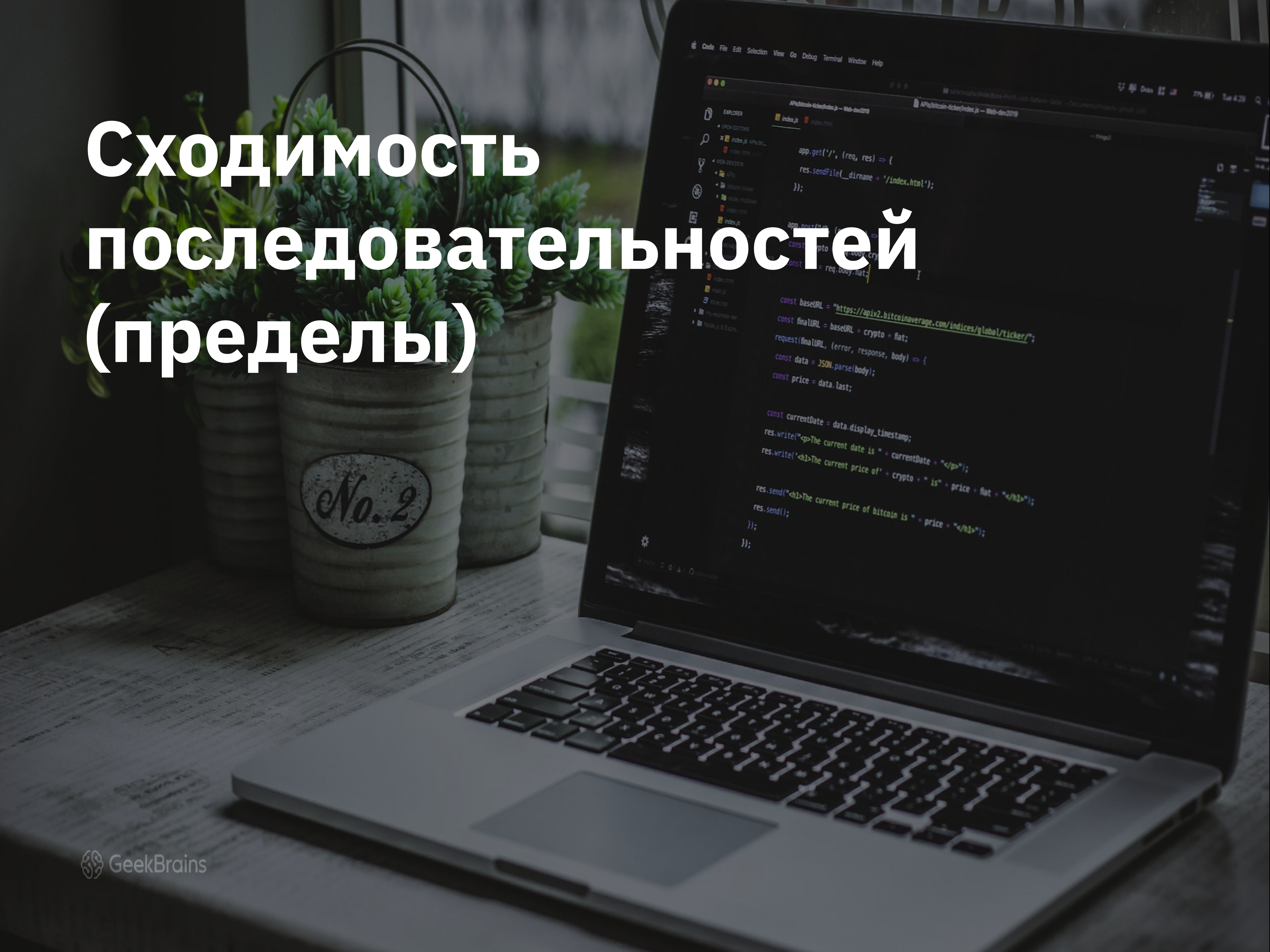
$$\boxed{b_5 = 0.1^4 * (-102) = -0.0102}$$

Реализация на Python

Открываем ноутбук



Сходимость последовательностей (пределы)



Последовательность $\{x_n\}$ является **неубывающей** или **нестрого возрастающей** (**невозрастающей** или **нестрого убывающей**), если для $\forall n \in N$, $x_n \leq x_{n+1}$ $(x_n \geq x_{n+1})$

Последовательность $\{x_n\}$ называется **монотонной**, если она убывающая или возрастающая.

Если все элементы последовательности $\{x_n\}$ равны одному и тому же числу, то последовательность называется **постоянной**.

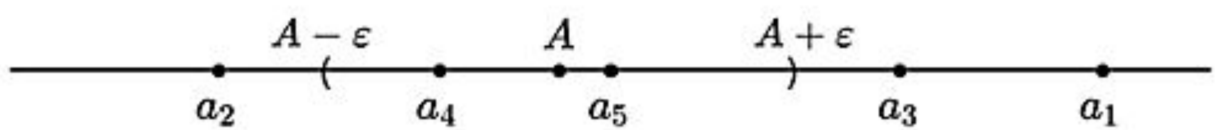
Предел последовательности.

Обозначение:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

Пример 9:

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{8}, \quad \frac{1}{16}, \quad \frac{1}{32}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$



Предел последовательности.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

Определение:

Для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$, такой что, для любого $n > N(\varepsilon)$ верно $|a_n - a| < \varepsilon$.

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon),\ \forall n > N(\varepsilon)\colon |a_n - a| < \varepsilon.$$

Критерий Коши:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon),\ \forall\, n > N(\varepsilon), k > 0\colon |a_n - a_{n+k}| < \varepsilon.$$

Критерий Коши.

Для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$, такой что, для любого $n > N(\varepsilon), k > 0$ верно $|a_n - a_{n+k}| < \varepsilon$.

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{8}, \quad \frac{1}{16}, \quad \frac{1}{32}, \quad \frac{1}{2^n}$$

Критерий Коши.

Для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$, такой что, для любого $n > N(\varepsilon), k > 0$ верно $|a_n - a_{n+k}| < \varepsilon$.

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{8}, \quad \frac{1}{16}, \quad \frac{1}{32}, \quad \frac{1}{2^n}$$

$$|a_n - a_{n+k}| = \left|\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+k}}\right| = \frac{1}{2^n}\left|1 - \frac{1}{2^k}\right| < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{N(\varepsilon)}} = \varepsilon$$

$$\frac{1}{2^{N(\varepsilon)}} = \varepsilon \;\Rightarrow\; 2^{N(\varepsilon)} = \frac{1}{\varepsilon} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{N(\varepsilon) = -\log_2 \varepsilon}$$

Критерий Коши.

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{8}, \quad \frac{1}{16}, \quad \frac{1}{32}, \quad \frac{1}{2^n}$$

$$N(\varepsilon) = -\log_2 \varepsilon$$

$$N(10^{-3}) = -\log_2(10^{-3}) \approx 9.97$$

$$\mathrm{a}_{10} = \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024} = 0.0009765625 < 10^{-3}$$

Предел последовательности. Степени

$$\lim_{n\to\infty}\frac{10000n}{n^2+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

Предел последовательности. Степени

$$\lim_{n\to\infty} \frac{10000n}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{10^4}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{0}{1+0} = 0$$

- Выяснить тип неопределённости.
- Если в выражении дробь вида «многочлен делить на многочлен» поделить старшую степень.
- Поделить на n в этой степени числитель и знаменатель.

Предел последовательности. Степени

$$\lim_{n\to\infty} \frac{10000n}{n^2+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(1000000n)}{n+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(1000000n)}{n+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}\, sin(1000000n)}{n+1}) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{2}{3}} * 1}{n+1}$$

Какая будет старшая степень?

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(1000000n)}{n+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{2}{3}}*1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{-1}{3}}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{0}{1+0}$$

Предел последовательности. Степени

$$\lim_{n\to\infty}\frac{10000n}{n^2+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(1000000n)}{n+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-9}{3n^2+n+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

Предел последовательности. Степени

$$\lim_{n\to\infty}\frac{10000n}{n^2+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(1000000n)}{n+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-9}{3n^2+n+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1-2n)^2}{(2-n)(5n-1)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

Предел последовательности. Степени

$$\lim_{n\to\infty}\frac{10000n}{n^2+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(1000000n)}{n+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-9}{3n^2+n+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1-2n)^2}{(2-n)(5n-1)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{(-2)^2}{-1\cdot 5}=-\frac{4}{5}$$

Предел последовательности. Степени

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=(\infty-\infty)=$$

$$\boxed{(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\left(\frac{1}{\infty}\right)=0$$

Правила вычисления пределов, если в числителе и знаменателе степенные функции

- если максимальная степень числителя меньше максимальной степени знаменателя, то предел равен 0;
- если максимальная степень числителя больше максимальной степени знаменателя, то предел равен $\pm\infty$;
- если максимальная степень числителя равна максимальной степени знаменателя, то предел равен коэффициентам при этих степенях.

Предел последовательности. Показатели

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{3^{n+1}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

Предел последовательности. Показатели

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{3^{n+1}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

Предел последовательности. Показатели

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{3^{n+1}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{3^n}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

Предел последовательности. Показатели

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{3^{n+1}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{3^n}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\left(\left(-\frac{2}{3}\right)^n+1\right)}{3^n\left(-2\left(-\frac{2}{3}\right)^n+3\right)}=\frac{1}{3}$$

Задача (практическое применение теории пределов)

Понять какой из алгоритмов быстрее для сортировки.
Есть 3 алгоритма:

1) O(n^2)
2) O(n*log(n))
3) O(n).

Фраза «сложность алгоритма есть O(f(n))» означает, что с ростом n время работы алгоритма будет возрастать не быстрее, чем C*f(n),
где n - количество результатов поиска, в которых есть искомая строка в какой-то форме,
C – некоторая константа.

Задача (практическое применение теории пределов)

Ход решения – найти пределы частных.

Например $$\lim_{n\to\infty} \frac{nlog(n)}{n^2} = 0$$

(решить этот предел можно по правилу Лопиталя или просто оценить: на бесконечности степенная функция растёт быстрее логарифма).

Значит O(n*log(n)) быстрее, чем O(n^2).

Исходя только из теории пределов, правильный ответ - O(n).
Может возникнуть такая ситуация: O(n) означает, что f(n) <= C*n, но C может быть настолько велика, что даже на имеющихся миллиардах строк выдачи C > n), а в алгоритмах O(n^2) и O(n log n) эта константа обычно порядка единиц, максимум десятков, но никак не миллиардов.

И тогда правильный ответ - O(n*log(n)).

Выводы (правила)

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{a^n} = 0 \ \ (a > 1)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} nq^n = 0 \ \ (|q| < 1)$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \ \ (a > 1)$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_a n}{n} = 0 \ \ (a > 1)$

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$

Пример 10. Доказать $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!} = 0$

Пример 10. Доказать $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$

$$0<\frac{2^n}{n!}=\frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}=2\cdot 1\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2}{n}\le 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\underset{n\to\infty}{=}0$$

Теорема о двух милиционерах

Дано: $\{a_n\}$, $\{b_n\}, \{c_n\}$, причем:

$$\text{существует } \lim_{n\to\infty} a_n = a,$$
$$\text{существует } \lim_{n\to\infty} c_n = a,$$
$$a_n \le b_n \le c_n,$$

$$\text{тогда существует } \lim_{n\to\infty} b_n = a$$

Второй замечательный предел

Пример 11. Доказать ограниченность сверху и снизу $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 2$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1!}\left(\frac{1}{n}\right)^1 + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \cdots \leq$$

$$\leq 1 + 1 + \frac{1}{2!}\frac{n(n-1)}{n \cdot n} + \frac{1}{3!}\frac{n(n-1)(n-2)}{n \cdot n \cdot n} + \cdots \underset{n\to\infty}{=} 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots \leq$$

$$\leq 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 2 + 1 = 3$$

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

C_n^k - биноминальные коэффициенты.

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Сумма членов геометрической прогрессии

$$S_\infty = \frac{b_1}{(1-q)}$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = (1)^\infty = e$$

$$2 \leq e \leq 3$$

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

Первый замечательный предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Ваши вопросы!

Спасибо за внимание!