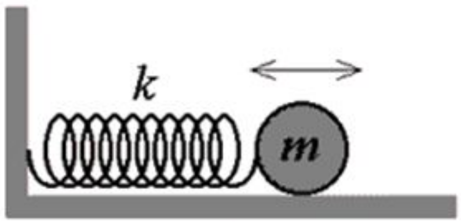
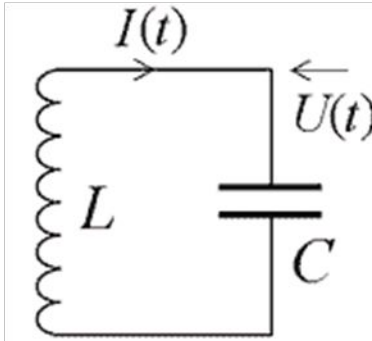
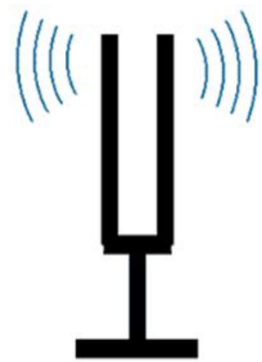
ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ



Пружинный маятник



Колебательный контур



Камертон

- **Вынужденные колебания** –под воздействием внешнего периодически меняющегося воздействия на систему.
- **Свободные (или собственные) колебания** происходят под действием внутренних сил.
- **Автоколебания** – это колебания, при которых система имеет некоторый собственный запас потенциальной энергии, который расходуется на совершение колебаний (например, механические часы).

Рис. 7.8. Вынужденные колебания совершаются, если воздействовать на качели внешней периодической силой

- **Колебания**- движения или процессы, которые характеризуются определенной повторяемостью во времени
- Природа колебаний может быть различна, однако все они описываются **одинаковыми уравнениями**

- Колебания называются **гармоническими**, если они происходят по закону синуса(косинуса)

$$s = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

A - Максимальное значение колеблющейся величины – **амплитуда** колебаний

ω_0 - **Круговая** (циклическая) частота

$\omega_0 t + \varphi_0$ - **Фаза** колебаний

φ_0 - **Начальная фаза** колебаний

- **Период колебаний** – это время , за которое фаза колебаний изменяется на 2π

$$\omega_0 T = 2\pi$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0}}$$

Частота колебаний

$$\boxed{n = \frac{1}{T}}$$ -число полных колебаний, совершаемых в единицу времени

$$\boxed{\omega_0 = 2\pi n}$$

$$s = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\left[A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)\right]$$

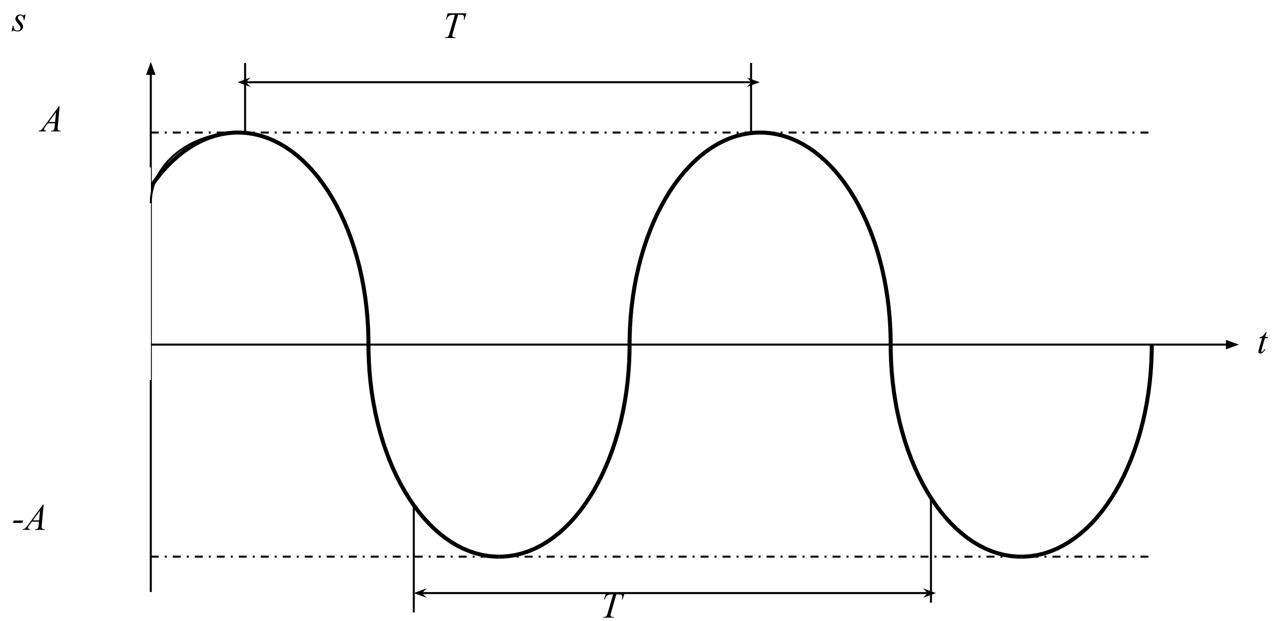
$$= -A\omega_0\left[\sin(\omega_0 t + \varphi_0)\right]$$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left[-A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)\right]$$

$$= -A\omega_0{}^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$= -\omega_0{}^2 s$$

$$\boxed{\frac{d^2 s}{dt^2} + \omega_0{}^2 s = 0}$$



s
T
A
t
-A
T

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \omega_0{}^2 s = 0$$

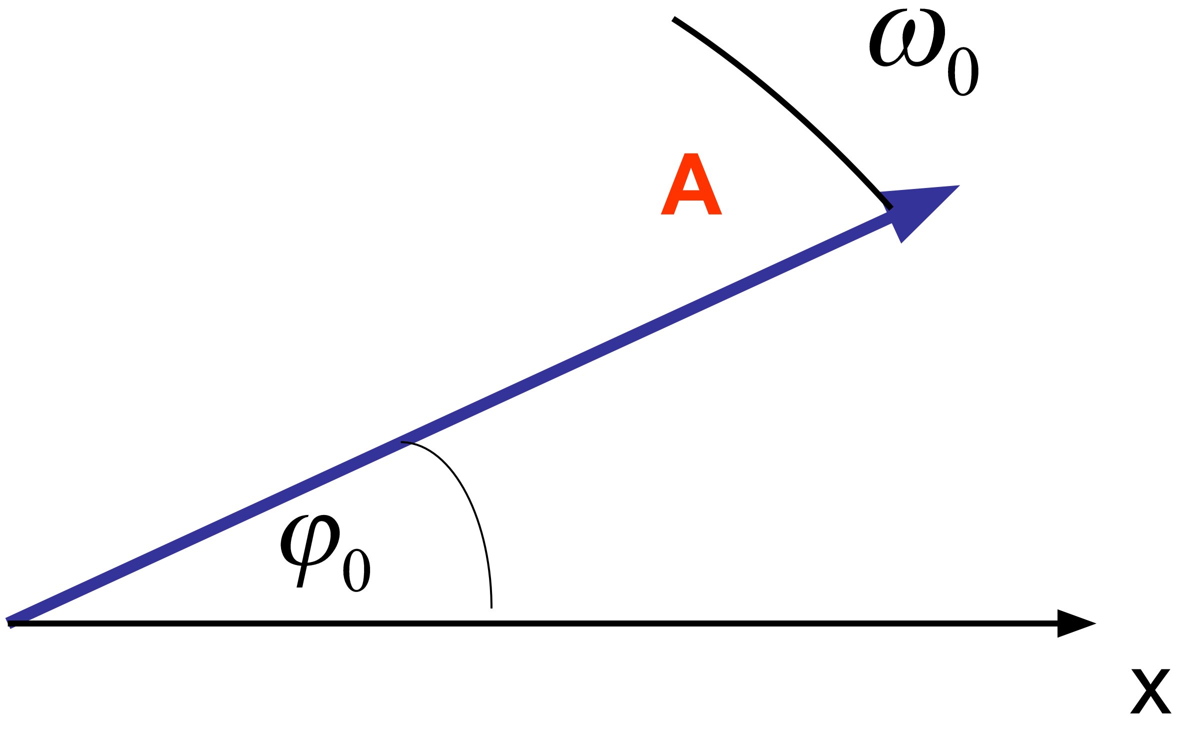
$$\ddot{s} + \omega_0{}^2 s = 0$$

Дифференциальное уравнение гармонических колебаний

$$s = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Решение уравнения

- Гармонические колебания можно изображать с помощью **векторных диаграмм**
- Откладывается вектор, длина которого равна **АМПЛИТУДЕ** колебаний
- Угол, под которым он расположен к оси х – **начальная фаза колебаний**



Проекция вектора на ось x меняется по гармоническому закону

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

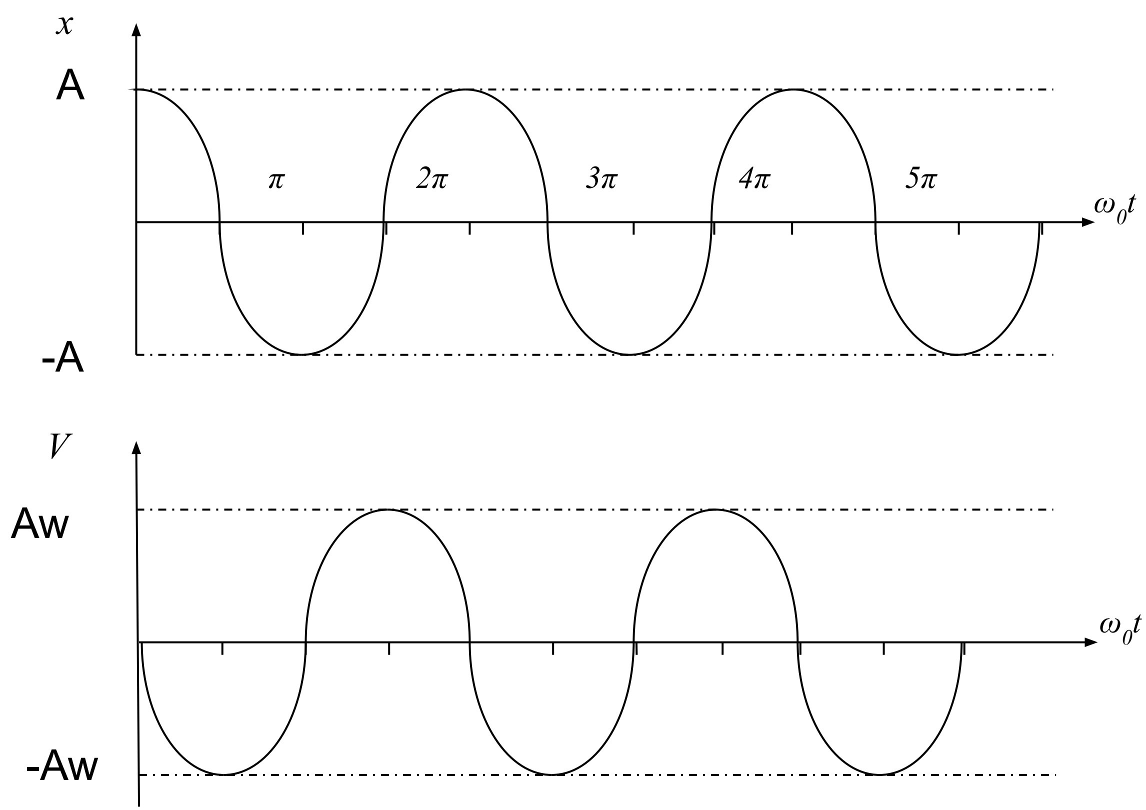
Механические гармонические колебания

- Пусть мат. точка совершает гармонические колебания вокруг положения равновесия вдоль оси X

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$V(t) = \frac{dx(t)}{dt} =$$

$$= -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$



x
A
π
2π
3π
4π
5π
ω0t
-A
V
Aw
ω0t
-Aw

$$a(t)=\frac{dV(t)}{dt}=\quad\frac{d^2V(t)}{dt^2}=$$

$$=-A{\omega_0}^2\cos(\omega_0 t+\varphi_0)$$

$$=-{\omega_0}^2x$$

$$F=-m{\omega_0}^2x$$

Кинетическая энергия

$$T = \frac{mV^2}{2}$$

$$= \frac{mA^2\omega_0{}^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)}{2}$$

Потенциальная энергия

$$\Pi = -\int_0^x F dx = -\int_0^x ma dx =$$

$$= +\int_0^x m\omega_0^2 x dx = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} =$$

$$\boxed{= \frac{m\omega_0^2 A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)}{2}}$$

Полная энергия

$$E = T + \Pi =$$

$$= \frac{mA^2{\omega_0}^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)}{2} +$$

$$+ \frac{mA^2\omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)}{2} =$$

$$= \frac{mA^2{\omega_0}^2}{2} = const$$

Гармонический осциллятор

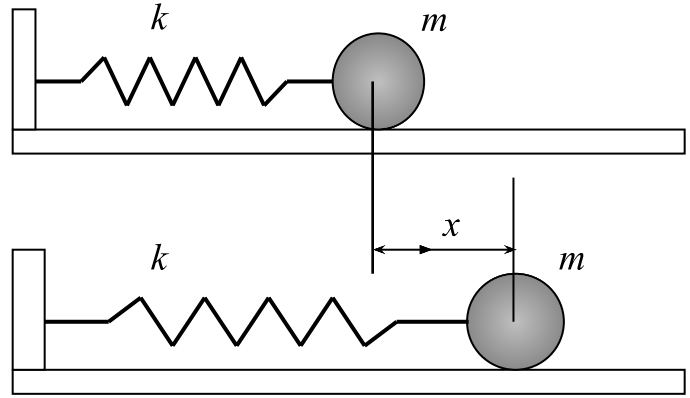
- **Гармоническим осциллятором** наз. система, совершающая колебания, описываемые уравнением

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \omega_0{}^2 s = 0$$

$$\ddot{s} + \omega_0{}^2 s = 0$$

Пружинный маятник

$$F = -kx$$



X- смещение маятника от положения равновесия

$$F = ma = m\ddot{x}$$

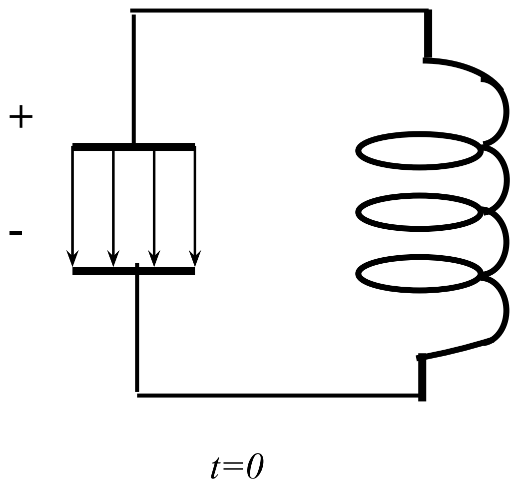
$$m\ddot{x} = -kx \qquad m\ddot{x} + kx = 0$$

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad \ddot{x} + {\omega_0}^2 x = 0$$

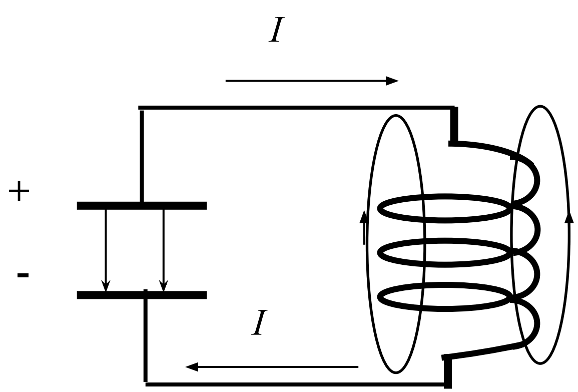
$$\boxed{{\omega_0}^2 = \frac{k}{m}}$$

Колебательный контур

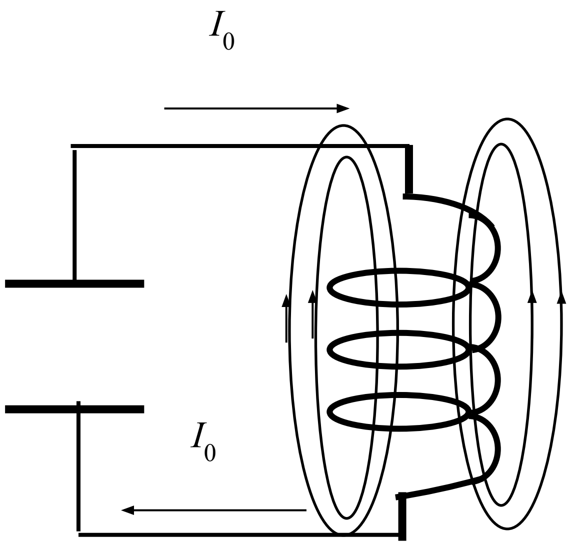


$$W_{эл} = \frac{q_0^{\;2}}{2C}$$

$$0 < t < \frac{T}{4}$$

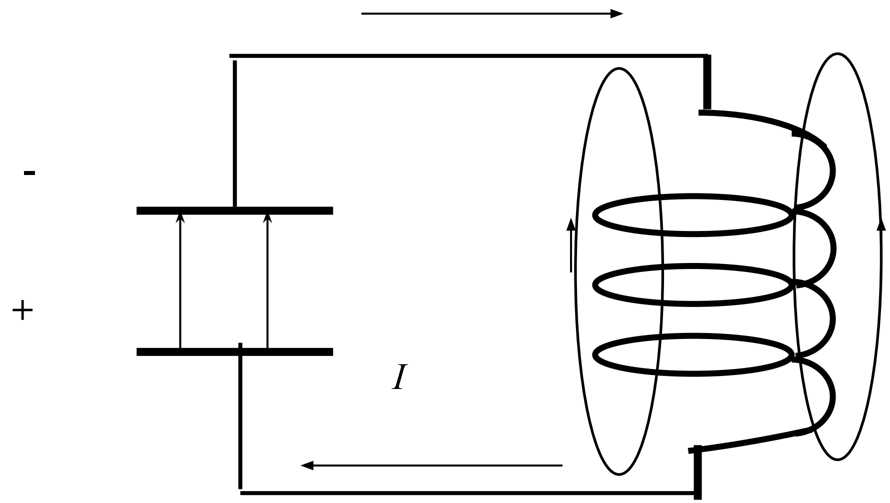


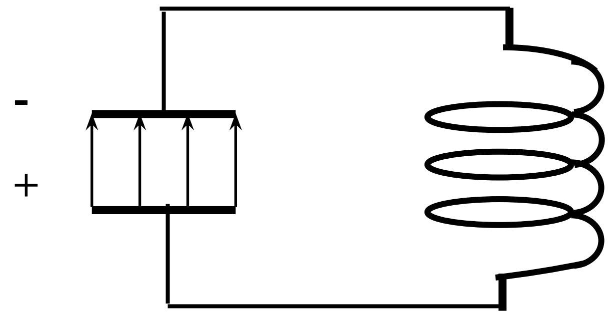
$$t = \frac{T}{4}$$



$$W_{магн} = \frac{L{I_0}^2}{2}$$

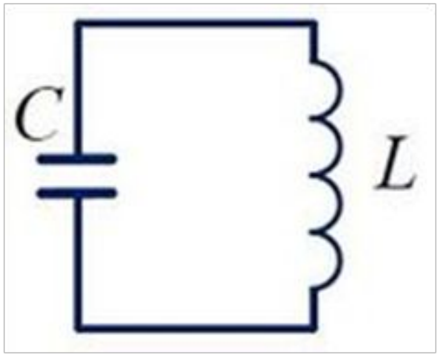
$$\frac{T}{4} < t < \frac{T}{2}$$





$$t = \frac{T}{2}$$

Колебательный контур



$$U_C = \varepsilon_S$$

$$U_C = \frac{q}{C} \qquad \varepsilon_S = -L\frac{dI}{dt}$$

$$\frac{q}{C} = -L\frac{dI}{dt} = -L\frac{d}{dt}\left(\frac{dq}{dt}\right) = -L\frac{d^2 q}{dt^2}$$

$$\frac{q}{C} = -L\ddot{q} \qquad L\ddot{q} + \frac{q}{C} = 0 \qquad \ddot{q} + \frac{q}{LC} = 0$$

$$\boxed{\frac{1}{LC} = \omega_0{}^2} \qquad q = q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$U_C = \frac{q_0}{C} \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$I = \frac{dq}{dt} = -q_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$I = \frac{dq}{dt} = -q_0\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) =$$

$$= q_0\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2})$$

Колебания тока опережают
колебания напряжения по фазе на π/2

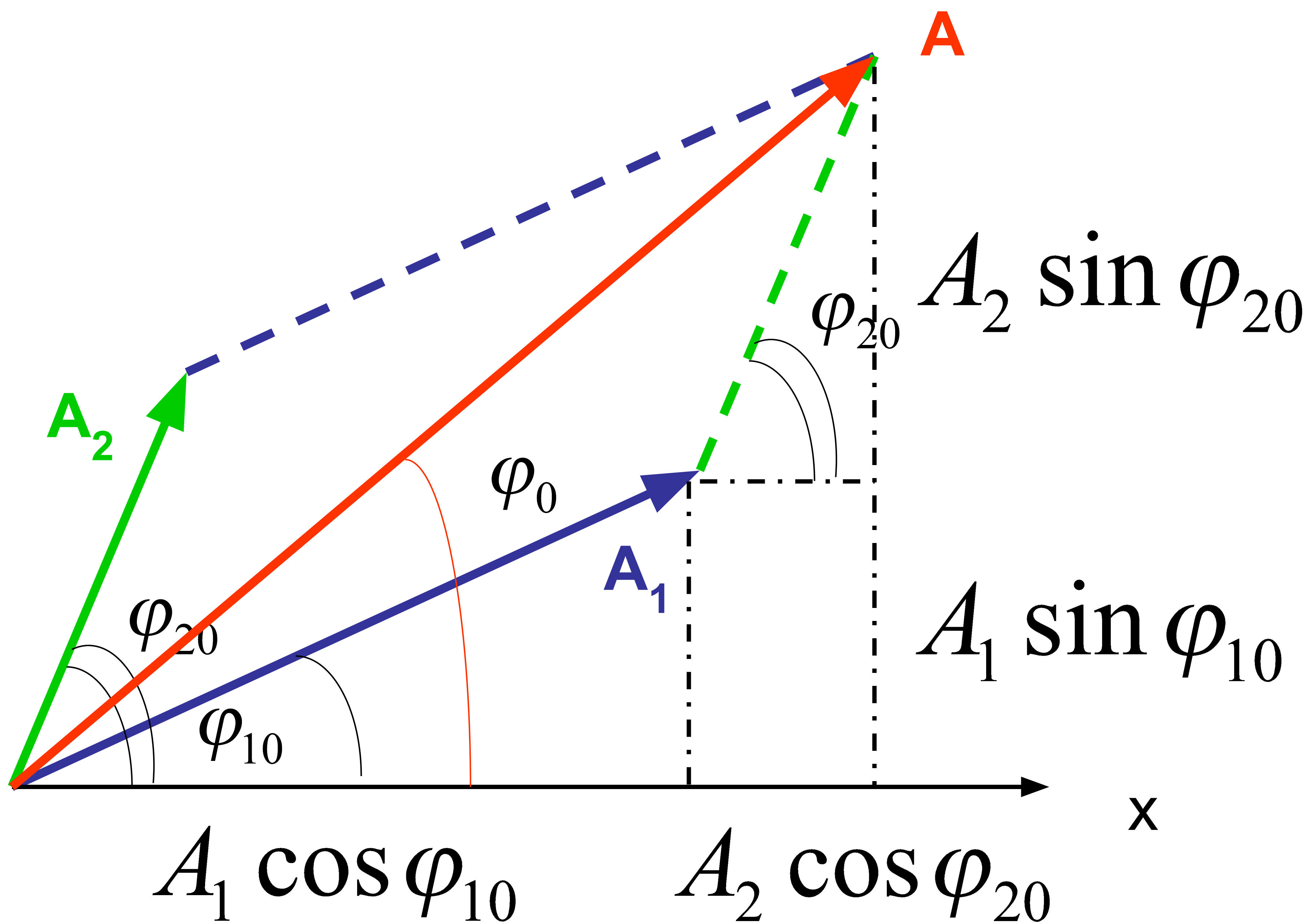
Сложение гармонических колебаний одного направления

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_{10})$$

+

$$x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_{20})$$

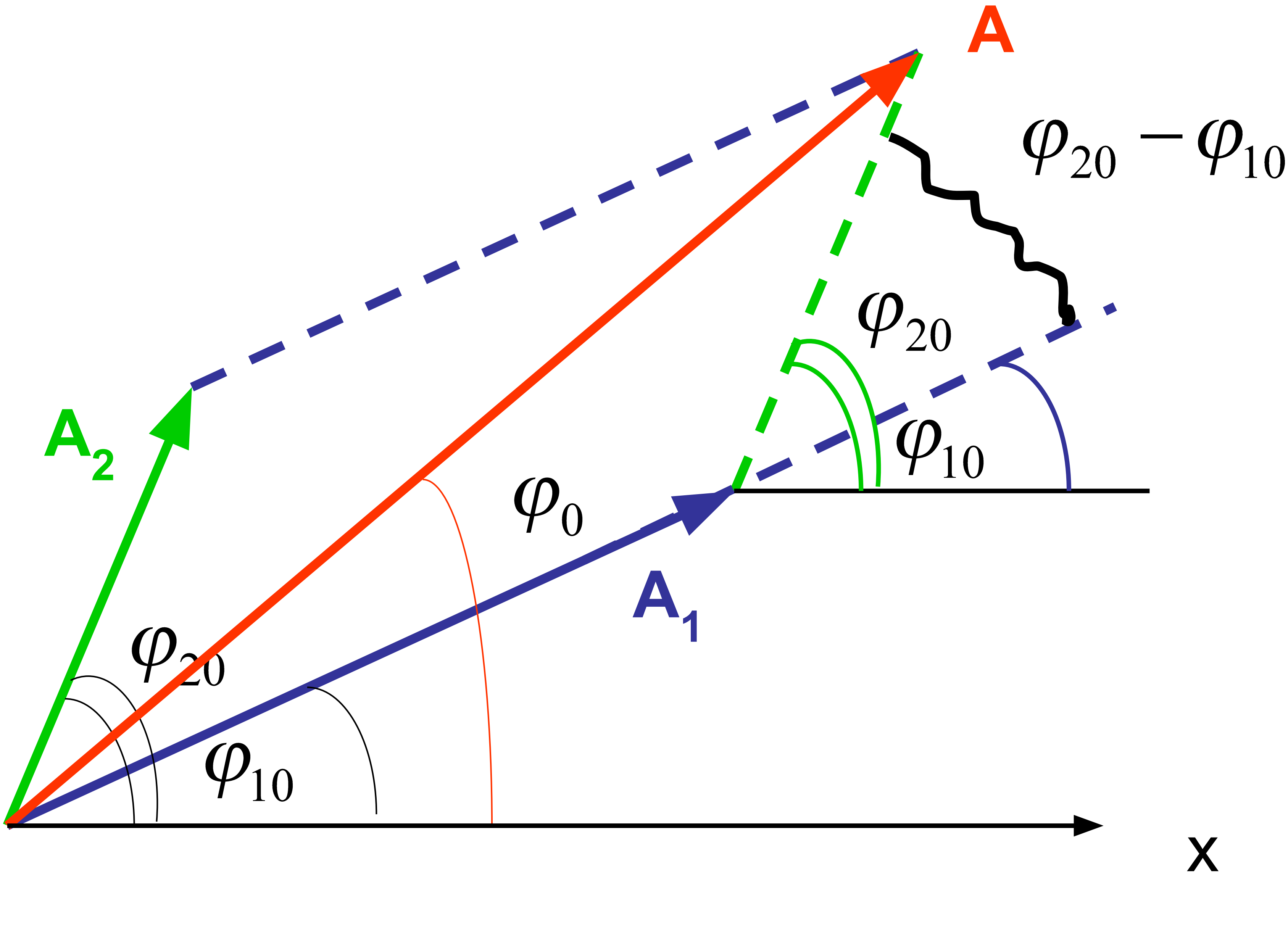
$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$


A
$A_2 \sin \varphi_{20}$
φ_{20}
A_2
φ_0
A_1
$A_1 \sin \varphi_{10}$
φ_{20}
φ_{10}
x
$A_1 \cos \varphi_{10}$
$A_2 \cos \varphi_{20}$

$$\boxed{tg\varphi_0 = \frac{A_1 \sin\varphi_{10} + A_2 \sin\varphi_{20}}{A_1 \cos\varphi_{10} + A_2 \cos\varphi_{20}}}$$

$$A^2 = A_1{}^2 + A_2{}^2 - 2A_1A_2\cos(\pi - (\varphi_{20} - \varphi_{10}))$$

$$= A_1{}^2 + A_2{}^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_{20} - \varphi_{10})$$



A
$\varphi_{20} - \varphi_{10}$
φ_{20}
φ_{10}
φ_0
A2
A1
φ_{20}
φ_{10}
x

$$\varphi_{20} - \varphi_{10} = 2k\pi$$

$$A^2 = {A_1}^2 + {A_2}^2 + 2A_1A_2$$

$$A = A_1 + A_2$$

$$\varphi_{20} - \varphi_{10} = (2k+1)\pi$$

$$A^2 = {A_1}^2 + {A_2}^2 - 2A_1A_2$$

$$A = \left|A_1 - A_2\right|$$

Биения

- Рассмотрим 2 гармонических колебания с одинаковыми амплитудами мало отличающиеся по частоте
- Начало отсчета выберем так, что

$$\varphi_{10} = 0 \qquad \varphi_{20} = 0$$

$$x_1 = A\cos\omega_0 t$$

$+$

$$x_2 = A\cos(\omega_0 + \Delta\omega)t$$

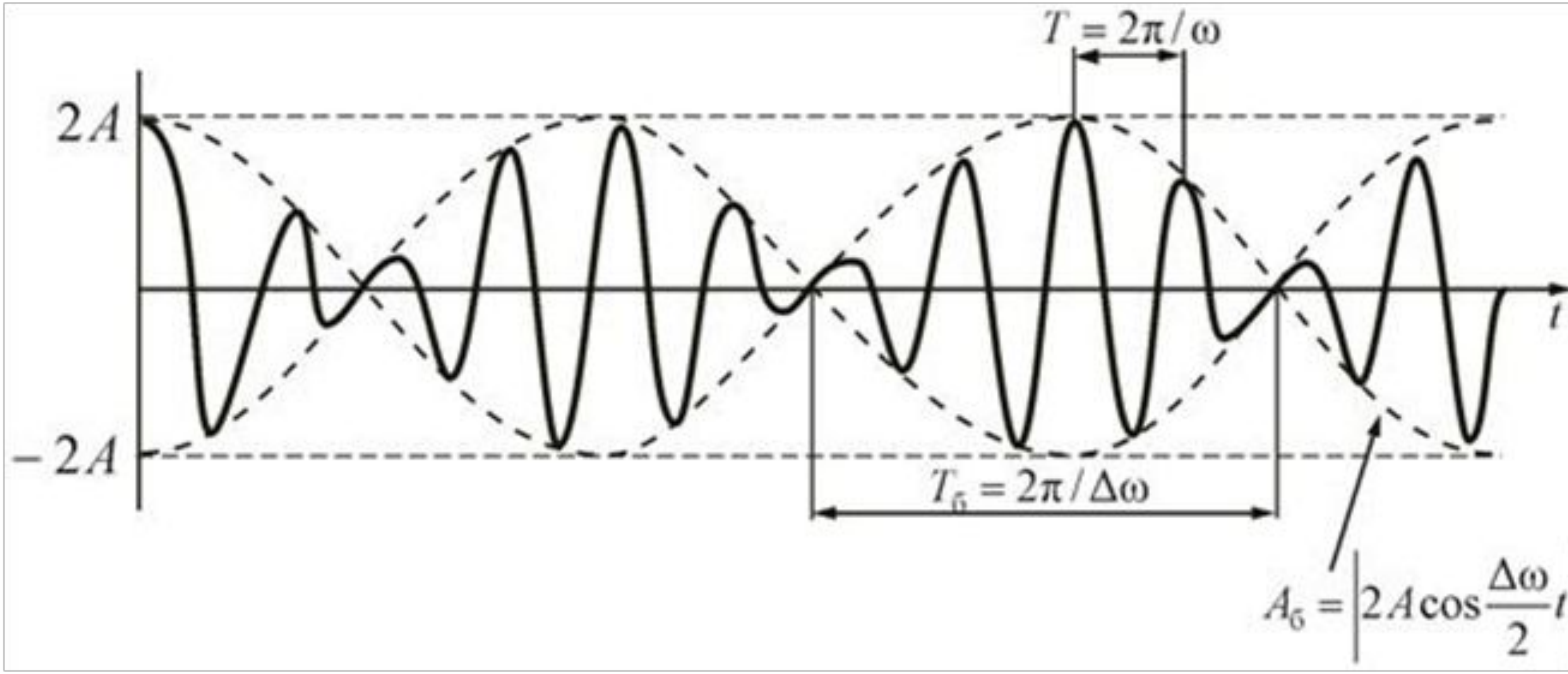
$$x = 2A\cos\frac{\omega_0 t + \omega_0 t + \cancel{\Delta\omega} t}{2}$$

$$\cdot\cos\frac{\cancel{\omega_0 t} + \Delta\omega t - \cancel{\omega_0 t}}{2}$$

$$x = 2A\cos\frac{\Delta\omega t}{2}\cdot\cos\omega_0 t$$

Результирующее колебание – это колебание с медленно меняющейся амплитудой

$$A_Б = \left|2A\cos\frac{\Delta\omega t}{2}\right|$$



$T = 2\pi / \omega$
$2A$
$-2A$
t
$T_б = 2\pi / \Delta\omega$
$A_б = \left|2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t\right|$

$$\omega_Б = \Delta\omega$$

$$T_Б = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$$

Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

$$x = A\cos\omega_0 t$$

+

$$y = B\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\frac{x}{A} = \cos\omega_0 t$$

$$\frac{y}{B} = \cos(\omega_0 t + \varphi_0) =$$

$$= \cos\omega_0 t \cos\varphi_0 - \sin\omega_0 t \sin\varphi_0$$

$$= \frac{x}{A}\cos\varphi_0 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \sin\varphi_0$$

$$\frac{x}{A}\cos\varphi_0 - \frac{y}{B} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \sin\varphi_0$$

$$\frac{x^2}{A^2}\cos^2\varphi_0 - 2\frac{x}{A}\cos\varphi_0\frac{y}{B} + \frac{y^2}{B^2} =$$

$$= (1 - \frac{x^2}{A^2})\sin^2\varphi_0$$

$$\frac{x^2}{A^2} - 2\frac{x}{A}\frac{y}{B}\cos\varphi_0 + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2\varphi_0$$

Уравнение эллипса

$$\varphi_0 = m\pi$$

$$y = \pm \frac{B}{A} x$$