Глава 5.
Экстремальные части графа

5.1. Основные понятия

Ряд классических задач теории графов сводится к отысканию частей графа, экстремальных относительно некоторого свойства. Речь может идти о подмно-жествах вершин или ребер и о частях, порожденными этими подмножествами.

Максимальность и наибольшесть

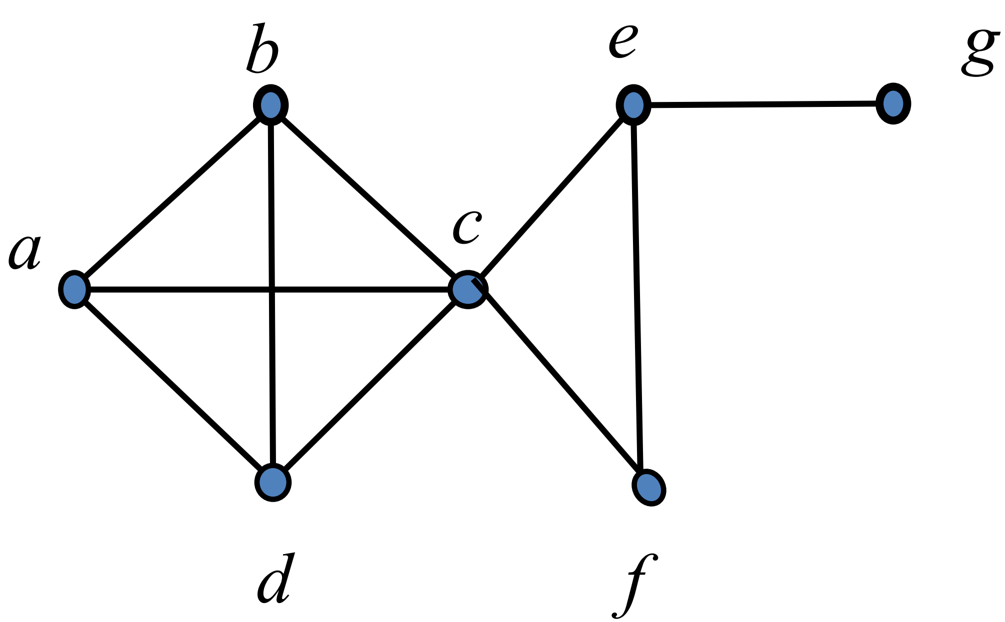
Определение. Часть G' графа G называется *максимальной* (*минимальной*) по некоторому свойству, если в G не существует части G'', обладающей этим же свойством, которая содержала бы (содержалась бы в) G''.

Определение. *Наибольшей* (*наименьшей*) частью графа по некоторому свойству называется макси-мальная (минимальная) часть с наибольшим (наи-меньшим) числом элементов графа, обладающая этим свойством.

Таким образом, **максимальность** и **минимальность** рассматривается **по включению**, **«наибольшесть»** и **«наименьшесть»** – **по числу элементов**

Полные подграфы (клики)

Максимальный **полный подграф (клика - clique)** обыкновенного графа – такой подграф, все вершины которого попарно смежны и он не содержится ни в каком другом полном подграфе.



Максимальные:

1. $\{e, g\}$
2. $\{c, e, f\}$
3. $\{a, b, c, d\}$

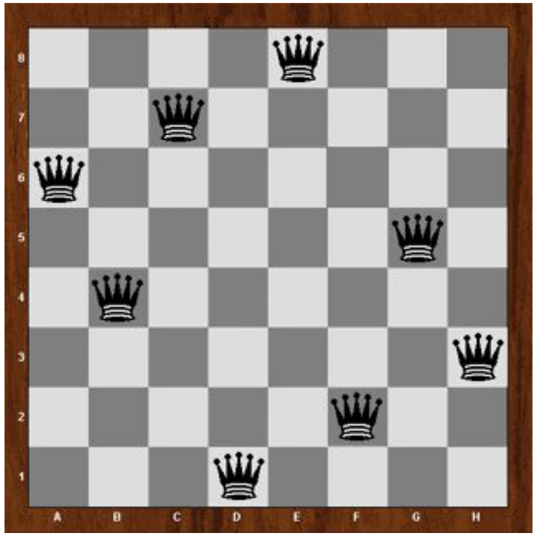
Наибольший:

$\{a, b, c, d\}$

Число вершин в наибольшем полном подграфе – **кликовое число** (**плотность**) $\varphi(G)$ графа

Пустые подграфы (ВУМ)

Максимальный пустой подграф (**независимое множество, внутренне устойчивое множество**) – такой подграф, все вершины которого попарно несмежны и он не содержится ни в каком другом пустом подграфе.



Задача о расстановке 8 ферзей на шахматной доске так, чтобы они друг друга не били. Есть 92 варианта.

Число вершин в наибольшем пустом подграфе – **число внутренней устойчивости** графа $\varepsilon(G)$

Покрытия (доминирующие множества)

Множество $S \in V$ вершин **обыкновенного** графа $G(V, E)$ называется доминирующим (**внешне устойчивым**), если

$$\forall y \in V \backslash S\ \exists x \in S \colon \{x, y\} \in E.$$

Для ориентированного графа

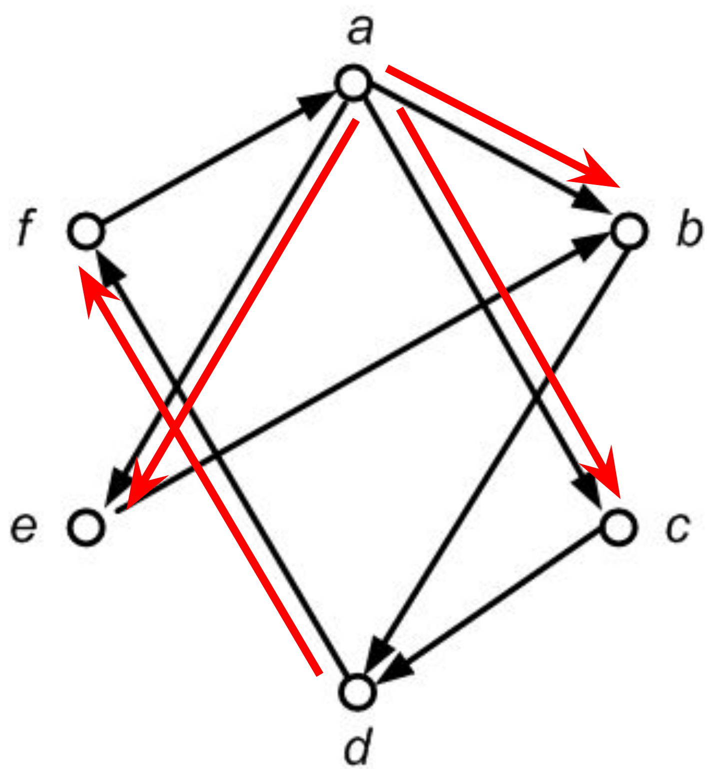
$$\forall y \in V \backslash S\ \exists x \in S \colon \langle x, y \rangle \in E,$$

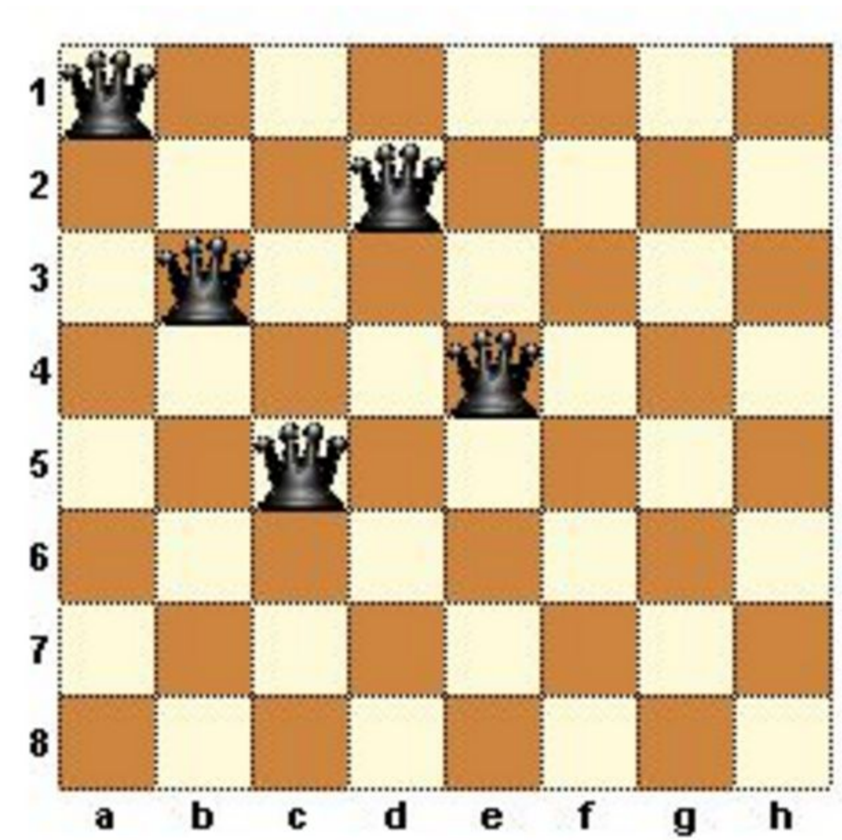
$$\text{т. е. } S \cup \Gamma(S) = V$$

Из доминирующего множества «видны» все вершины графа. Иначе оно называется вершинно – вершинным покрытием. Обычным образом определяются минимальные (по включению) и наименьшие (по количеству вершин) доминирующие множества.

Задача о часовых

Задача о пяти ферзях



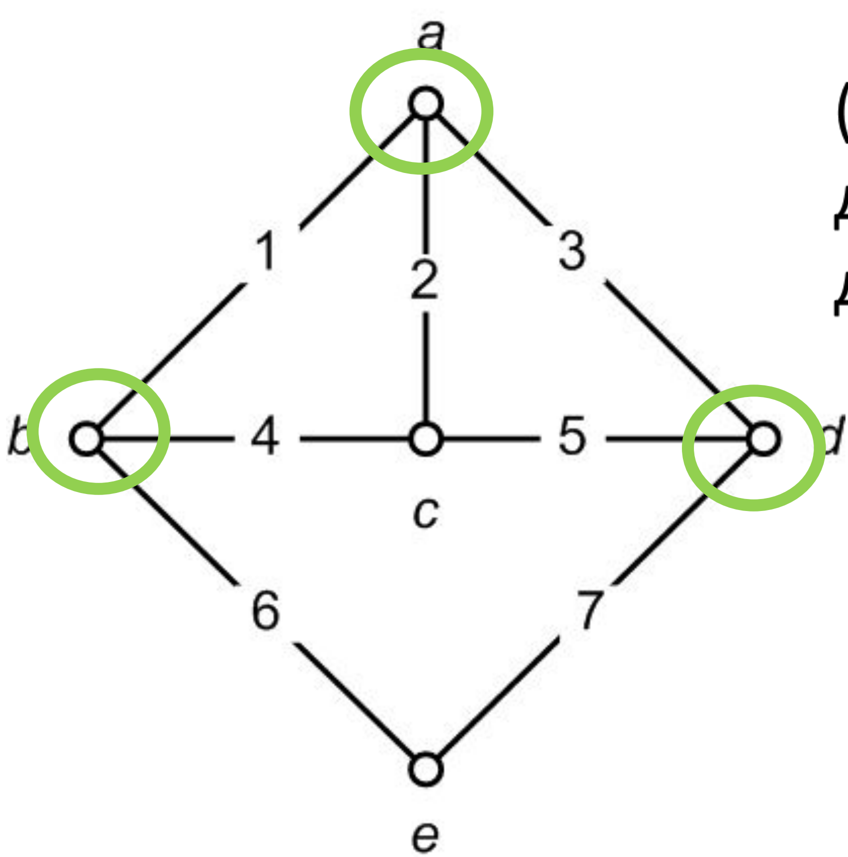


$\{c, e, f\}$ – минимальное
$\{a, d\}$ – минимальное и наимень-
шее доминирующее можество

Пять ферзей бьют
все
поля доски

Опоры

Множество $P \subseteq V$ вершин графа $G(V, E)$ называется **опорой (опорным множеством – transversal set),** если каждое ребро графа инцидентно хотя бы одной вершине P.



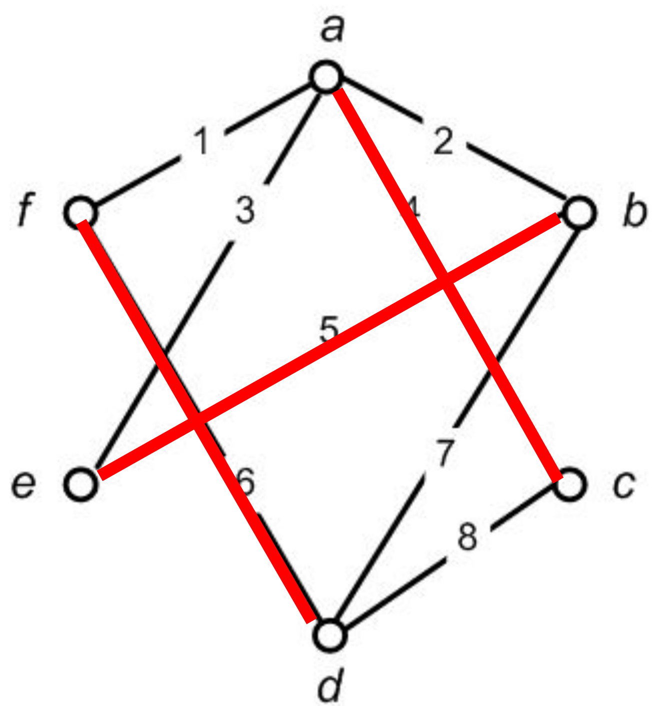
$\forall u \in E \, \exists x \in P: I(x,u)$

($I(x,u)$ – предикат инцидентности; для ориентированных $I^{+}(x,u)$: дуга u исходит из x).

Из опорного множества вершин «видны» все ребра графа, поэтому оно называется **вершинно – реберным покрытием**. Существуют

Паросочетания

Паросочетанием (matching) называется произвольное подмножество попарно несмежных ребер графа. Паросочетание не зависит от ориентации. Можно искать максимальное (по включению) и наибольшее (по числу ребер) паросочетание.



Это – **совершенное** паросочетание, так как оно покрывает все вершины графа.

Взвешенные графы

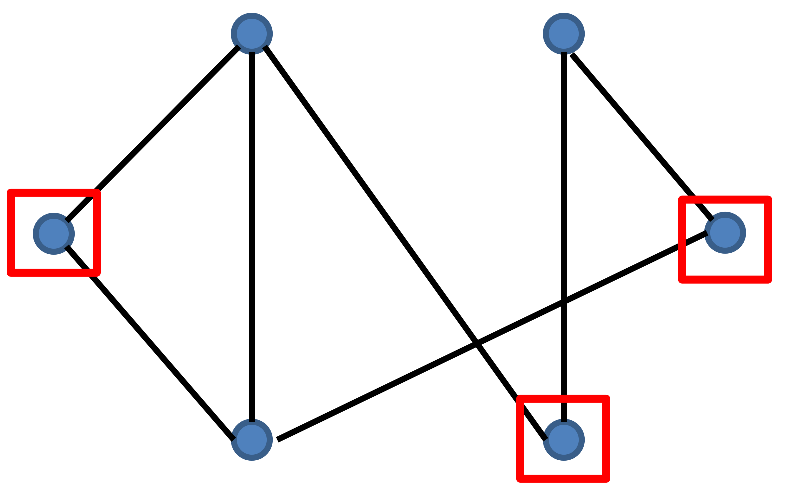
Многие прикладные задачи сводятся к проблеме нахождения экстремальных частей во взвешенных графах. Требуется найти обычно отыскивается наибольшую (наименьшую) часть с наибольшим (наименьшим) весом.

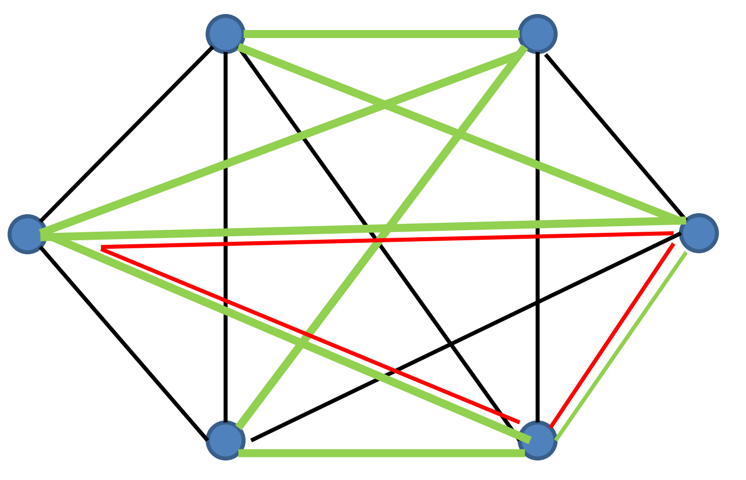
Пример – нахождение наибольшего по весу паросочетания в двудольном графе (задача о назначениях).

5.2. Взаимосвязи между задачами нахождения экстремальных частей

Полные и пустые подграфы

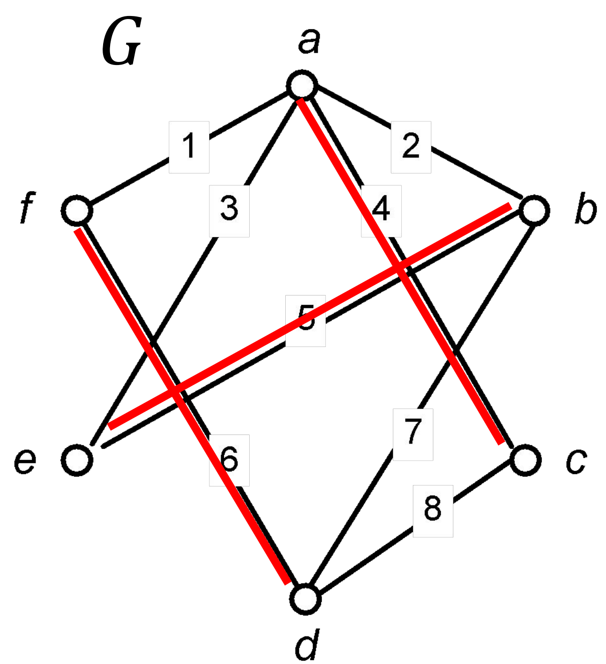
Задачи о нахождении наибольших полных и пустых подграфов превращаются одна в другую, если от исследуемого графа перейти к его дополнению до полного графа.

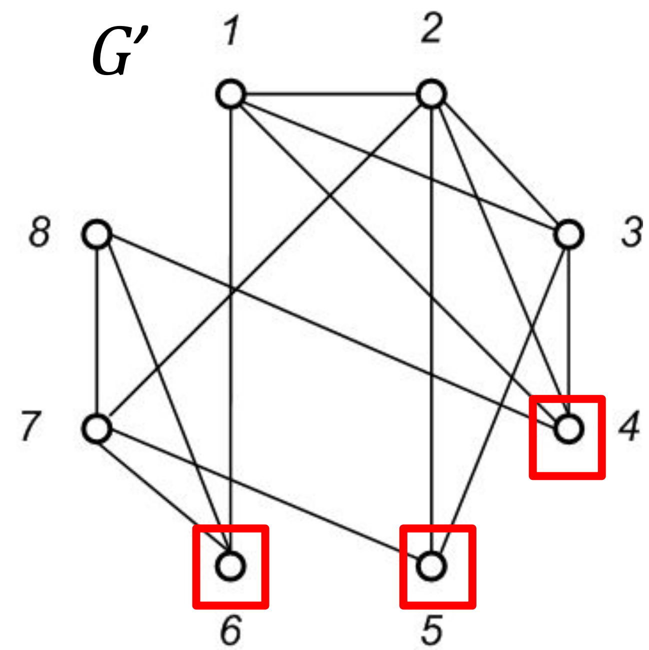




Паросочетания и пустые подграфы

Реберным графом для данного графа $G(V, E)$ является обыкновенный граф $G'(E, R)$, вершины которого соответствуют ребрам графа G, а ребра имеются в том случае, если соответствующие вершины исходного графа смежны.





Тогда паросочетанию в G соответствует пустой подграф в G'. Обратный переход невозможен.

Опоры и пустые подграфы

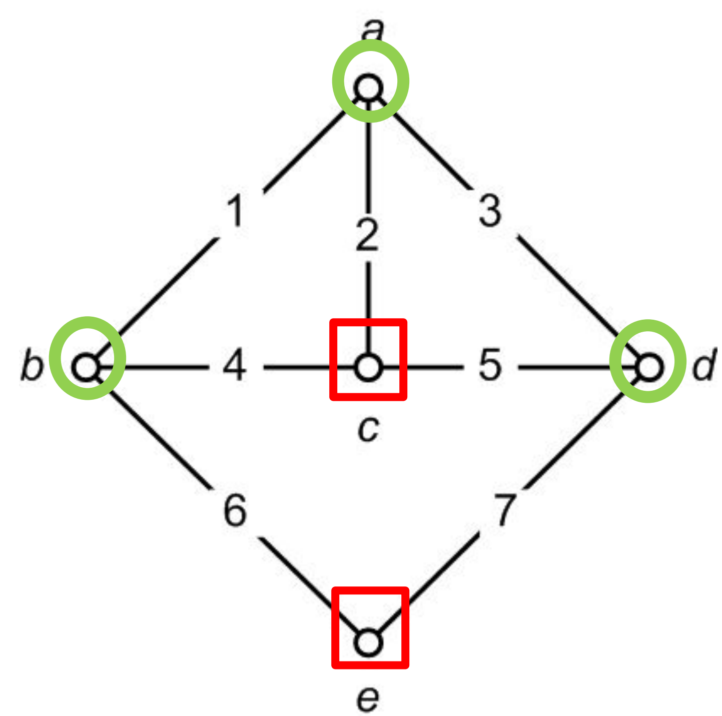
Теорема (Галлаи). Для графа $G = (V, E)$ множество $S \subseteq V$ есть пустой подграф тогда и только тогда, когда множество $\bar{S} = V \setminus S$ является вершинно-реберным покрытием (опорой).

Д о к а з а т е л ь с т в о .
Необходимость. Пусть $S \subseteq V$ – пустой подграф, т.е. в S все вершины попарно несмежны. Другими словами, S – пустой, если любое ребро соединяет вершину из S с вершиной из его дополнения, но это и есть определение опоры.

Достаточность. Пусть $\bar{S} = V \setminus S$ – опора, тогда $S = V \setminus \bar{S}$ – пустой. Действительно, любое ребро инцидентно хотя бы одной вершине из $\bar{S}$, поэтому в S вершины попарно несмежны: в противном случае хотя бы одна вершина из этой пары должна была бы войти в опору.

Таким образом, задача о нахождении наибольшего пустого подграфа (независимого множества) сводится к нахождению наименьшей опоры (вершинно-реберного покрытия)

и наоборот.



5.3. Задача о наименьшем покрытии

Все перечисленные выше задачи нахождения экстремальных частей графа могут быть сведены к общей задача нахождения наименьшего покрытия. Пусть задана матрица размера $m \times n$, состоящая из нулей и единиц.

A	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*
1	1	1	0	0	0
2	1	0	1	0	0
3	1	0	0	1	0
4	0	1	1	0	0
5	0	0	1	1	0
6	0	1	0	0	1
7	0	0	0	1	1

Задача состоит в нахождении наименьшего подмно-жества столбцов, покрывающих все строки, т. е. из столбцов скомпоновать единичный столбец.

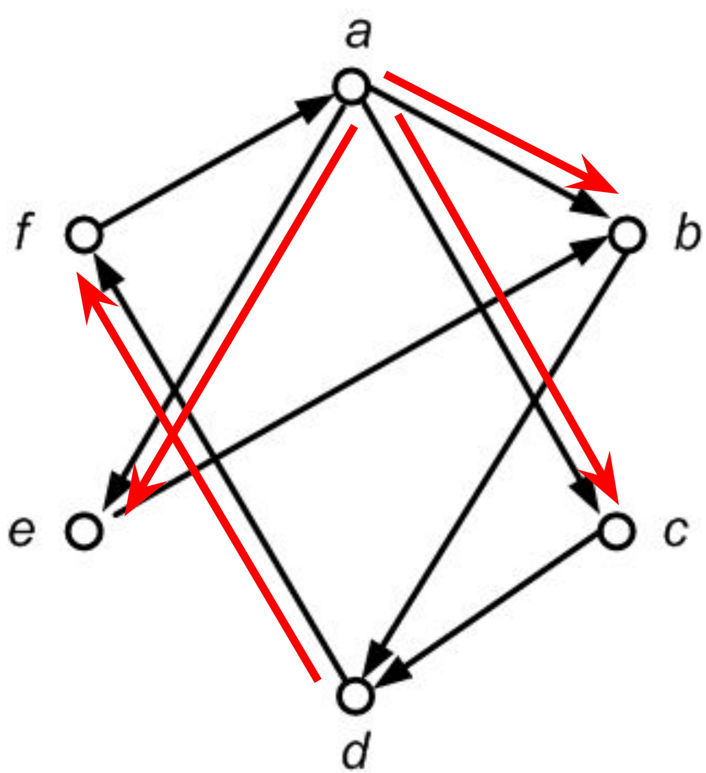
Задача о наименьшем покрытии формулируется на матрице общего вида. Применительно к графам она может быть поставлена различным образом, если в качестве анализируемой матрицы брать те или иные матрицы, описывающие граф.

Рассмотрим подробнее экстремальные части, о которых мы говорили выше.

Для большей наглядности нули в матрице не ставим, оставляя соответствующие клетки матрицы пустыми.

Доминирующее множество

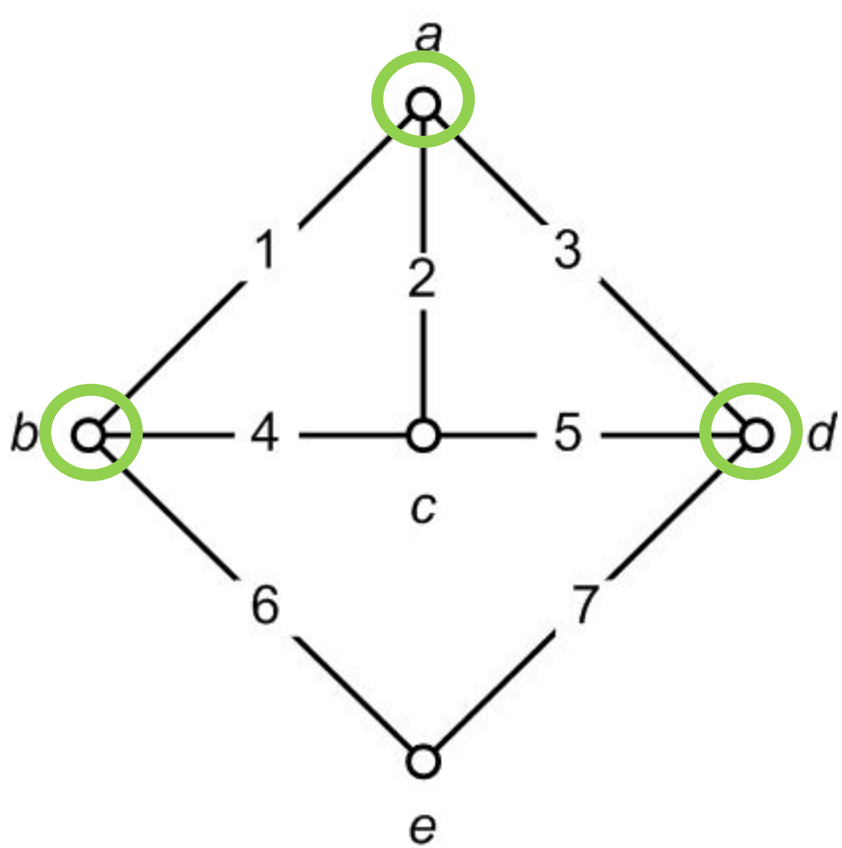
Для решения задачи о нахождении доминирующего множества (вершинно – вершинного покрытия) в качестве матрицы *A* берется транспонированная матрица смежности неориентированного или ориентированного графа с единицами по диагонали.



A	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
a	1					1
b	1	1				
c	1		1			
d		1	1	1		
e	1				1	
f				1		1

Опора

Для решения задачи о нахождении **опорного** множества (вершинно – реберного покрытия) в качестве матрицы *A* берется транспонированная матрица инциденций соответствующего графа. Строки соответствуют ребрам, столбцы – вершинам графа.



A	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*
1	1	1			
2	1		1		
3	1			1	
4		1	1		
5			1	1	
6		1			1
7				1	1

Алгоритм поиска в глубину

	a	*b*	*c*	*d*	*e*
1	1	1			
2	1		1		
3	1			1	
4		1	1		
5			1	1	
6		1			1
7				1	1