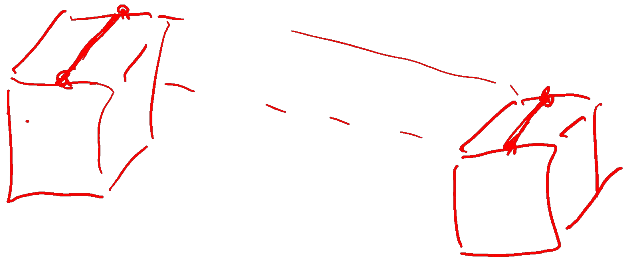
КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Кинематика изучает движение тел, не рассматривая причины, которые это движение оуславливают

ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Поступательное движение – это движение, при котором любая прямая, жестко связанная с телом, остается параллельной своему первоначальному положению



СКОРОСТЬ

- Скорость – это векторная величина, которая определяет как быстроту движения материальной точки, так и ее направление в данный момент времени.

- Под средней скоростью движения по траектории за конечное время Δt понимают отношение пройденного за это время конечного пути ΔS ко времени

$$v_s = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1}$$

- Средняя скорость перемещения точки — величина, направленная вдоль вектора перемещения.

$$\vec{v}_r = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}$$

$$\boxed{v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}}$$

Производная радиус-вектора *r* по времени определяет мгновенную скорость перемещения точки.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$v = \frac{dS}{dt} = \frac{dr}{dt}$$

Если модуль скорости увеличивается с течением времени, то движение называется **ускоренным**, если же он убывает с течением времени, то движение называется **замедленным.**

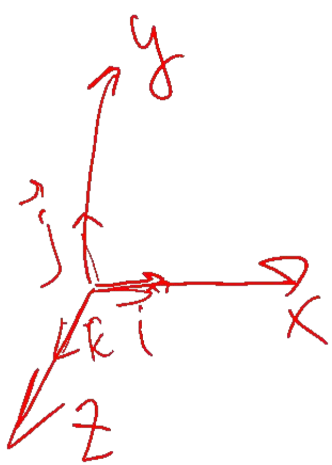
$$[v] = [м/с]$$

УСКОРЕНИЕ

Ускорение – это векторная величина, характеризующая быстроту изменения скорости по модулю и направлению.

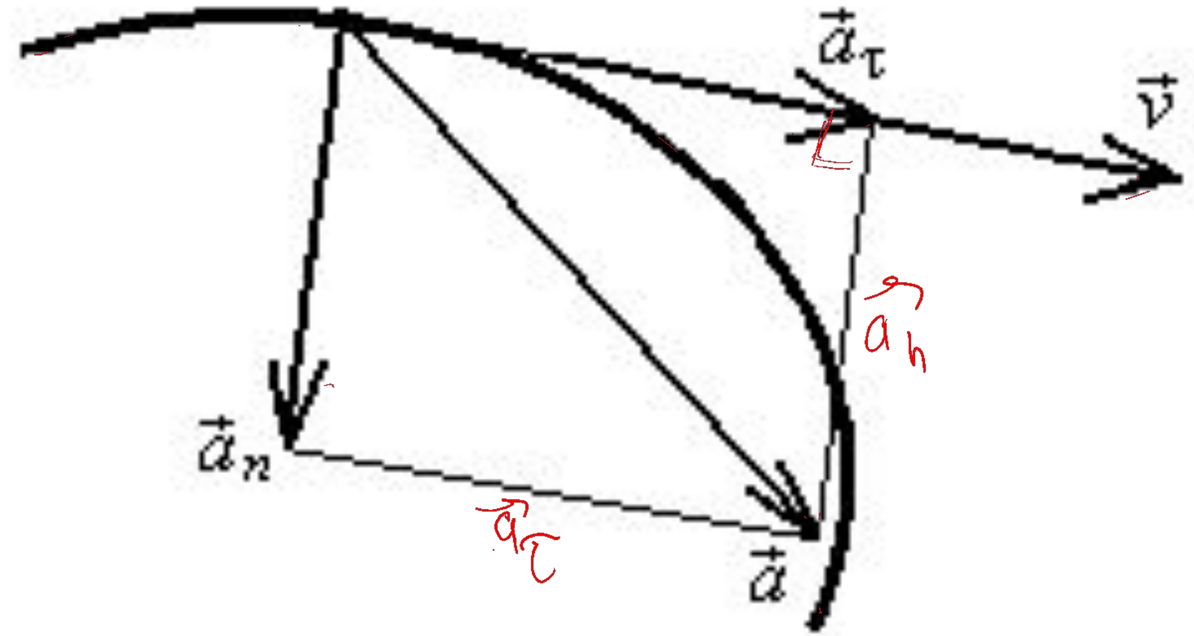
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$



$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = \ddot{x}\,\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j} + \ddot{z}\,\vec{k}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$



$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$

$\vec{a}_\tau$ – тангенциальное ускорение

$\vec{a}_n$ - нормальное ускорение

Как видно из этого рисунка, модуль общего ускорения равен:

$$\boxed{a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}}$$

Рассмотрим несколько предельных (частных) случаев:

$a = \frac{dv}{dt}$

$a_\tau = 0;\ a_n = 0$ – равномерное прямолинейное движение; $a = 0$

$a_\tau = \mathrm{const};\ a_n = 0$ – равноускоренное прямолинейное движение;

$a_\tau = 0;\ a_n = \mathrm{const}$ – равномерное движение по окружности.

$$\boxed{a_\tau = \frac{dv}{dt}}$$

тангенциальное ускорение при криволинейном движении.

$$a_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_n}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_1 \Delta s}{R \Delta t} = \frac{v^2}{R}$$

$$\boxed{a_n = \frac{v^2}{R}}$$

нормальное ускорение при криволинейном движении

•*Равномерное движение материальной точки по окружности*: *v = const.*

• Тогда тангенциальное ускорение равно нулю и полное ускорение равно нормальному, т.е. центростремительному ускорению:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0$$

$$a = a_n = \frac{v^2}{R}$$

$a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}$

$C'=0$

$a_\tau=\frac{dv}{dt}$

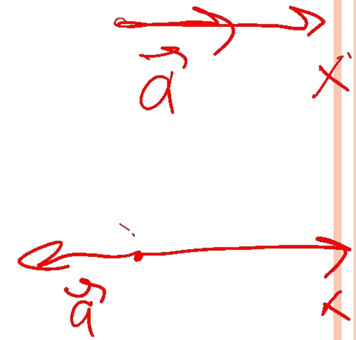
$a_n=\frac{v^2}{R}$

• *Прямолинейное движение материальной точки*:

В этом случае радиус кривизны траектории равен бесконечности и нормальное ускорение равно нулю. Полное ускорение равно тангенциальному и направлено вдоль направления движения: если $a > 0$, по направлению движения, если $a < 0$, против направления движения.

R

$$R = \infty \Rightarrow a_n = \frac{v^2}{R} = 0$$

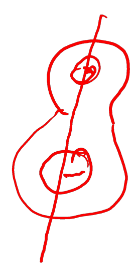


$$a = a_\tau = \frac{dv}{dt}$$

ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

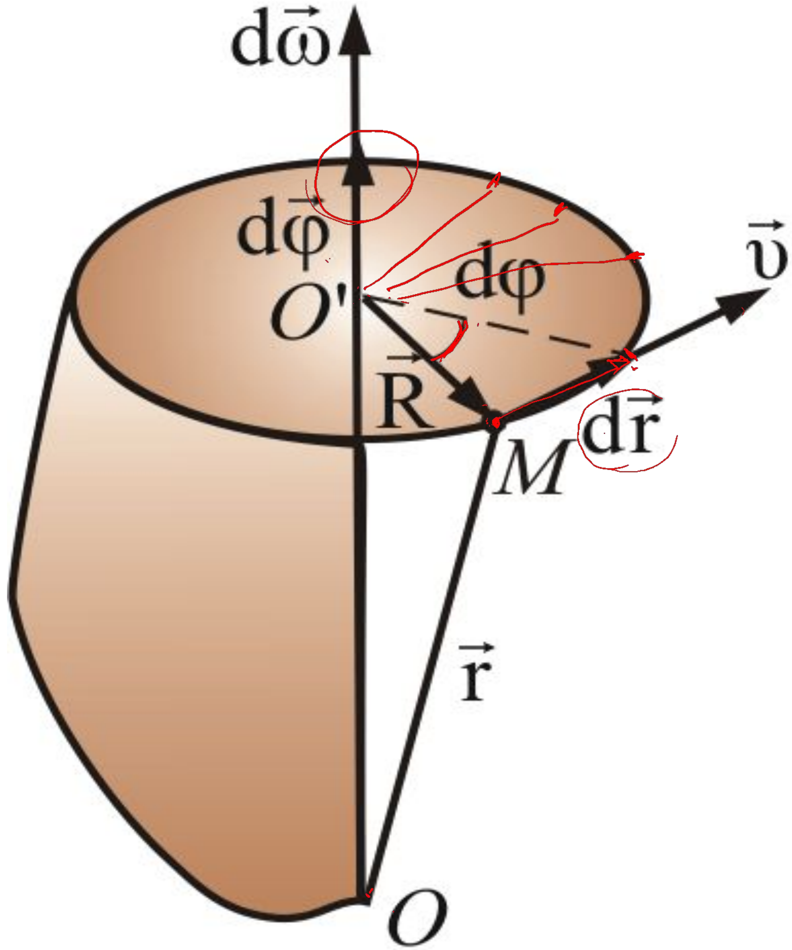
Вращательное движение *– это такое движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой осью вращения.*

Ось вращения может находиться и вне тела.



Пусть абсолютно твердое
 тело вращается вокруг
неподвижной оси *OO'*

Проследим за некоторой
точкой *M* этого твердого
тела. За время $\mathrm{d}t$ точка
M совершает
элементарное
перемещение



Угол поворота $d\varphi$ характеризует *перемещения всего тела за время* d*t* (**угловой путь**)

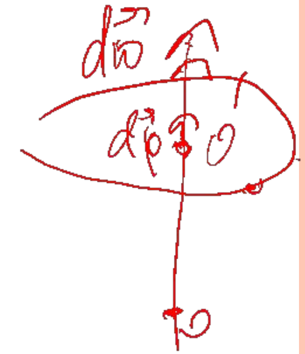
$d\vec{\varphi}$

<u>Угловое перемещение</u> – вектор, численно равный углу поворота тела за время и направленный вдоль оси вращения так, что, глядя вдоль него, поворот тела наблюдается происходящим по часовой стрелке.

Удобно ввести $d\vec{\varphi}$ – вектор элементарного поворота тела, численно равный $d\varphi$ и направленный вдоль оси вращения *OO′* так, чтобы вдоль вектора мы видели вращение по часовой стрелке (направление вектора $d\vec{\varphi}$ и направление вращения связаны правилом буравчика).

Элементарные повороты удовлетворяют обычному правилу сложения векторов:

$$d\vec{\varphi} = d\vec{\varphi}_1 + d\vec{\varphi}_2 .$$



$[\varphi] = [рад]$

Угловой скоростью $\vec{\omega}$ *называется* ***вектор численно равный первой производной от угла поворота по времени*** *и направленный вдоль оси вращения в направлении* $d\vec{\varphi}$ ($\vec{\omega}$ и $d\vec{\varphi}$ всегда направлены в одну сторону).

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \qquad [\omega] = \left[\frac{рад}{с}\right] \qquad \omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Связь линейной и угловой скорости

Пусть $\vec{\upsilon}$ – линейная скорость точки *M*.
За промежуток времени d*t* точка *M* проходит путь $\mathrm{d}r = \upsilon \mathrm{d}t$. В то же время $\mathrm{d}r = R\mathrm{d}\varphi$ (центральный угол). Тогда,

$$\boxed{\upsilon = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{R\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \omega R}$$

$= \omega$

$\vartheta = \omega \cdot R$

$$\boxed{\upsilon = \omega R}$$

В векторной форме $\vec{\upsilon} = [\vec{\omega}, \vec{R}]$

Вектор $\vec{\upsilon}$ ортогонален к векторам $\vec{\omega}$ и $\vec{R}$ и направлен в ту же сторону, что и векторное произведение

$$[\vec{\omega}, \vec{R}]$$

Период *T* – *промежуток времени, в течение которого тело совершает полный оборот* (т.е. поворот на угол $\varphi = 2\pi$)

$T = \frac{t}{n}$

$$T = \frac{2\pi}{\omega};$$

$[T] = [c]$

Частота $\boldsymbol{\nu}$ – *число оборотов тела за* 1 *сек.*

$\nu = \frac{n}{t}$

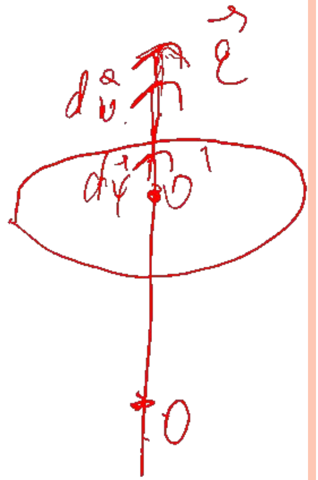
$$\nu = \frac{1}{T}.$$

$[\nu] = \left[\frac{1}{c}\right] = [Гц]$

Угловая скорость $$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu;$$

Введем вектор ***углового ускорения*** $\vec{\varepsilon}$ для характеристики *неравномерного вращения тела*:

$$\boxed{\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}}$$



<u>Угловое ускорение</u> характеризует быстроту изменения угловой скорости с течением времени, равно первой производной угловой скорости и направлено вдоль оси вращения

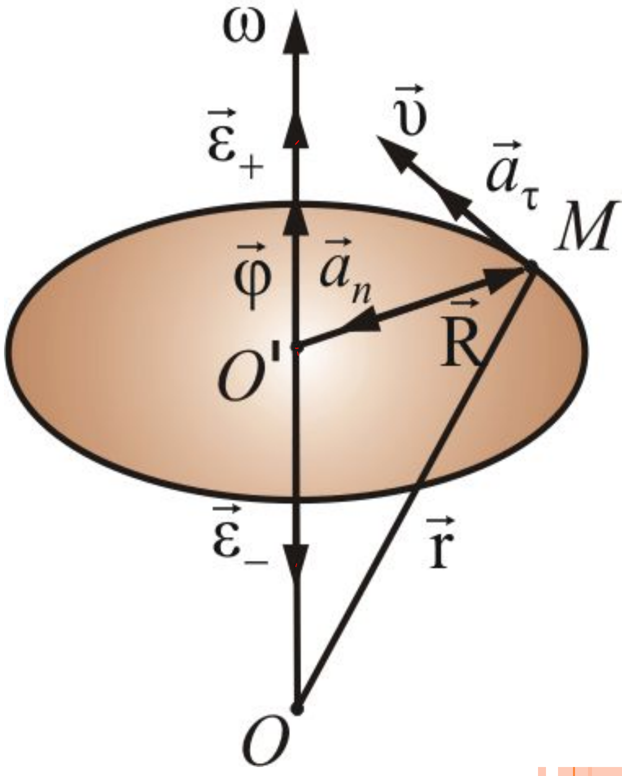
$[\varepsilon] = \left[\frac{рад}{с^2}\right]$

Вектор $\vec{\varepsilon}_+$ направлен в ту же сторону, что и $\vec{\omega}$ при ускоренном вращении

$$\vec{\varepsilon}_{\_} \quad \left(\frac{d\omega}{dt} > 0\right)$$

а $\vec{\varepsilon}_-$ направлен в противоположную сторону при замедленном вращении

$$\left(\frac{d\omega}{dt} < 0\right)$$



Выразим нормальное и тангенциальное ускорения точки *М* через угловую скорость и угловое ускорение:

$\upsilon = \omega \cdot R$

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega R) = R\frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon;$$

$$\boxed{a_\tau = R\varepsilon;}$$

$$\boxed{a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 R.}$$

Ускорение отдельной точки вращающегося тела представим в виде суммы

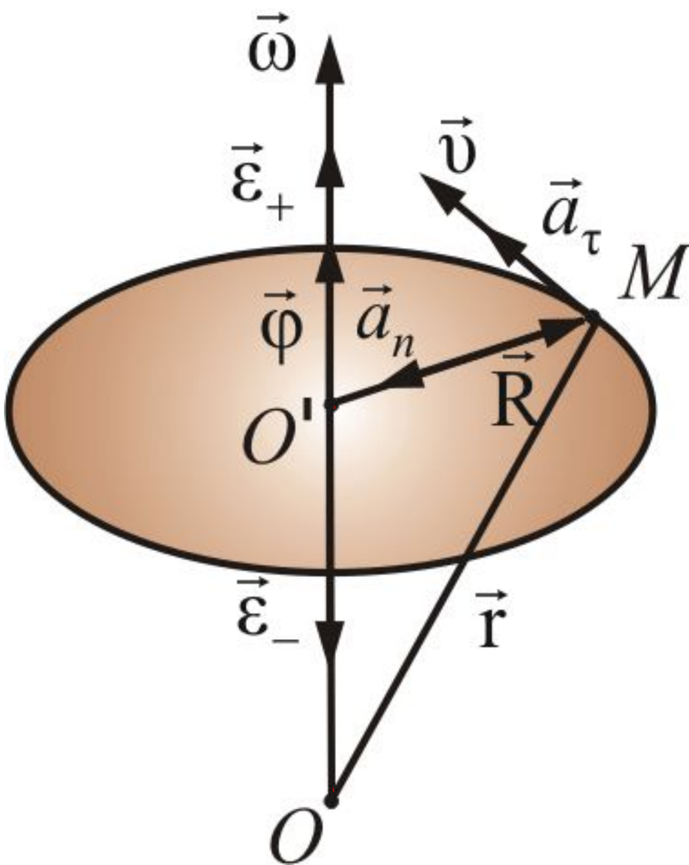
$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$

Полное ускорение *a* равно:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

Обратите внимание.

Все кинематические параметры, *характеризующие вращательное движение (угловое ускорение, угловая скорость и угол поворота* ***направлены вдоль оси вращения.***



В частных случаях *равномерного и равнопеременного вращения* можно провести аналогию с соответствующими случаями прямолинейного поступательного движения:

Поступательное движение	*Вращательное движение*
Равномер.	
$\boldsymbol{a = 0}$	$\boldsymbol{\varepsilon = 0}$
$v = const$	$\omega = const$
$s = vt$	$\phi = \omega t$
– – – – – – – – – – – – – – – –	– – – – – – – – – – – – – – – –
Равнопер.	
$\boldsymbol{a = const}$	$\boldsymbol{\varepsilon = const}$
$v = v_0 \pm at$	$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t$
$s = v_0 t \pm at^2/2$	$\phi = \omega_0 t \pm \varepsilon t^2/2$

Поступательное движение

$$\upsilon = \frac{dS}{dt}$$

$$a = \frac{d\upsilon}{dt}$$

$$\upsilon = \upsilon_0 \pm at$$

$$S = \upsilon_0 t \pm \frac{at^2}{2}$$

$$S = \int_0^t \upsilon dt$$

Вращательное движение

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$$

$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t$$

$$\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}$$

$$\varphi = \int_0^t \omega dt$$