РАЗДЕЛ 2

ТЕМА:

«КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА.

ФОРМЫ ЗАПИСИ»

Алгебраическая форма записи комплексного числа

Опр.: ***Алгебраическая форма записи комплексного числа*** – это запись вида $z = a + bi$, где a и b – действительные числа, i (или j) – символ, называемый мнимой единицей.

Опр.: Комплексные числа $z = a + ib$ и $\bar{z} = a - ib$ называются ***сопряженными***.

Опр.: Два комплексных числа $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ ***равны*** тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$, т.е. когда равны их действительные и мнимые части.

Действия над комплексными числами в алгебраической форме записи:

1. Сумма двух комплексных чисел:

$$z = z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

2. Сумма двух сопряженных комплексных чисел:

$$z + \bar{z} = a_1 + a_2$$

3. Произведением комплексных чисел:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + i(a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)$$

4. Произведением сопряженных комплексных чисел:

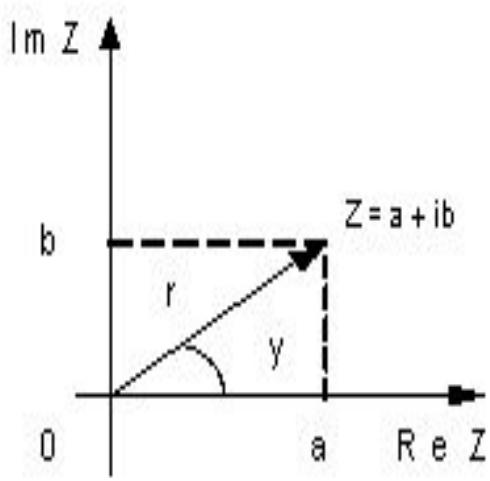
$$z_1 \cdot \overline{z_2} = a_1^2 + b_1^2$$

5. Деления комплексных чисел (умножают числитель и знаменатель на комплексное число сопряженное знаменателю):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{(a_1 + ib_1) \cdot (a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2) \cdot (a_2 - ib_2)} = \frac{(a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2) + i(a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2)}{a_2^2 + b_2^2}$$

Геометрическая форма записи комплексного числа

Опр.: ***Тригонометрическая форма записи комплексных чисел*** – это запись вида $z = r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где r – модуль комплексного числа, φ - аргумент.



Геометрическая интерпретация комплексного числа

Модуль комплексного числа:

$r = \sqrt{a^2 + b^2} = |Z|$

Аргумент комплексного числа (φ) - величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором, соответствующим комплексному числу.

$$\varphi = arctg\frac{b}{a}$$

Аргумент зависит от того, в какой координатной четверти лежит вектор, соответствующий этому комплексному числу:

$$\varphi = \begin{cases} \mathrm{arctg}\frac{b}{a}, & I\text{ ч} \\ \Pi + \mathrm{arctg}\frac{b}{a}, & II\text{ ч} \\ \Pi + \mathrm{arctg}\frac{b}{a}, & III\text{ ч} \\ 2\Pi - \mathrm{arctg}\frac{b}{a}, & 4\text{ ч} \end{cases} \quad \text{и} \quad \varphi = \begin{cases} arctg\,\frac{b}{a}, & \text{если } a > 0 \\ \frac{\Pi}{2}, & \text{если } a = 0, b > 0 \\ arctg\,\frac{b}{a} + \Pi, & \text{если } a < 0 \\ -\frac{\Pi}{2}, & \text{если } b < 0, a = 0 \end{cases}$$

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме записи:

$$1.\ z_1 \times z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_2)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1 \times r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

$$2.\ \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$$

$$3.\ z^n = r^n\cdot(\cos(n\times\varphi) + i\sin(n\times\varphi) - \text{\textit{формула Муавра}}$$

Экспоненциальная форма записи комплексного числа

Опр.: ***Экспоненциальная форма записи комплексных чисел*** – это запись вида $z = r \cdot e^{i\varphi}$, где r – модуль комплексного числа, φ - аргумент

$$z = r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi) = r \cdot e^{i\varphi} - \textit{формула}\ \text{Эйлера}$$

Действия над комплексными числами в показательной форме:

1. $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$

2. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$

3. $\boldsymbol{z}^n = \boldsymbol{r}^n \cdot \boldsymbol{e}^{i \cdot n \cdot \varphi}$

4. $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i(\varphi+2\Pi r)/n}$