МЕТОДЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ПРОТИВОБОРСТВА

ИСТОРИЯ, ЗАДАЧИ И РАЗНОВИДНОСТИ ИГР

- В ТПР **противоборство** характеризуется нанесением конфликтующими сторонами взаимного ущерба и стремлением одержать победу над соперником.
- **Конфликтная ситуация** - это ситуация скрытого или открытого *противоборства* двух или нескольких участников, каждый из которых имеет свои цели и мотивы, средства и способы решения значимой проблемы.
- Формальной моделью *противоборства* является **игра**.

ИСТОРИЯ, ЗАДАЧИ И РАЗНОВИДНОСТИ ИГР

- **Игра** – модель конфликтной ситуации, включающая четкие правила действий игроков, для достижения выигрыша в результате принятия некоторой стратегии.
- **Теория игр** (ТИГР) – это прикладная междисциплинарная наука, изучающая математические модели принятия решений в конфликтных ситуациях.

ИСТОРИЯ, ЗАДАЧИ И РАЗНОВИДНОСТИ ИГР

- **Теория игр** занимается *моделями принятия решений*, а не их поведенческими, психологическими аспектами или вопросами реализации решений.
- **Суть игры** в том, что каждый из участников из множества *альтернатив* выбирает такую стратегию действий, которая, возможно, обеспечит ему *наибольший выигрыш* или *наименьший проигрыш*.
- **Результат** зависит не только от него, но и от действий противника. Это значит, что он принимает решение в условиях *неопределенности*.

ИСТОРИЯ, ЗАДАЧИ И РАЗНОВИДНОСТИ ИГР

- **Целью теории игр** является выработка рекомендаций для разумного поведения игроков в конфликтных ситуациях, т.е. *выработка оптимальных стратегий* для каждого игрока.
- **Одна из задач теории игр** состоит в том, чтобы выяснить, возможно ли (если - да, то при каких условиях) некоторое *равновесие* (компромисс, *седловая точка*), в наибольшей степени устраивающее игроков.

ИСТОРИЯ, ЗАДАЧИ И РАЗНОВИДНОСТИ ИГР

- Если интересы участников **противоположны**, то эти модели называются *антагонистическими* играми.
- Если интересы не совпадают, но **не противоположны**, то речь идет об играх с *непротивоположными интересами*.
- Если в игре участвуют n лиц, то они могут вступать между собой в **постоянные или временные коалиции**, а игра называется *коалиционной*.

ИСТОРИЯ, ЗАДАЧИ И РАЗНОВИДНОСТИ ИГР

Основные разновидности игр:

- *антагонистические,*
- игры с *непротивоположными интересами*
- *коалиционные* игры
- *биматричные*,
- *дифференциальные*,
- *матричные*,
- *статистические* игры с природой

ИСТОРИЯ, ЗАДАЧИ И РАЗНОВИДНОСТИ ИГР

- **Основной особенностью теории игр** является расширение понятия *оптимальности*, включая в него компромисс, устраивающий игроков. (Например, в экономике при выборе оптимальных решений для повышения качества продукции или определения запасов.)
- «Конфликты» здесь заключаются:
  - 1) в стремлении выпустить больше продукции, затратив на нее меньше труда, и сделать продукцию лучше;
  - 2) в желании так запастись ресурсами, чтобы застраховаться от случайностей и не замораживать средства.
- *Многие задачи теории игр могут быть сведены к задачам линейного программирования, и наоборот.*

ИСТОРИЯ, ЗАДАЧИ И РАЗНОВИДНОСТИ ИГР

- **Другой особенностью игровых моделей** является поиск *устойчивых решений*, когда отход от оптимальной стратегии невыгоден обоим игрокам.
- При многократном повторении игры и разных в каждом розыгрыше стратегиях, **седловая точка** и **устойчивые решения** существуют. Однако игрокам надо выбирать стратегию по жребию, иначе противник, обнаружив закономерности в решениях, может угадать ход и выиграть.

ИСТОРИЯ, ЗАДАЧИ И РАЗНОВИДНОСТИ ИГР

- Рассмотрим игры с ненулевой суммой.
- Если для конечной *бескоалиционной игры* двух лиц ставить в соответствие стратегиям 1-го игрока строки некоторой таблицы, стратегиям 2-го игрока – её столбцы, а клетки таблицы заполнять значениями выигрыша 1-го игрока, то полученная таблица называется ***матрицей выигрыша*** 1-го игрока.
- Если клетки той же таблицы заполнить значениями функции выигрыша 2-го игрока, то получится ***матрица выигрышей*** 2-го игрока.

ИСТОРИЯ, ЗАДАЧИ И РАЗНОВИДНОСТИ ИГР

- Эта пара матриц полностью описывает ***биматричную игру***.
- Если биматричная игра является *антагонистической*, то она полностью описывается единственной матрицей выигрышей одного из игроков и называется ***матричной*** игрой с ***нулевой суммой***. В ней выигрыш одного игрока означает проигрыш другого, а их сумма равна нулю.

ИСТОРИЯ, ЗАДАЧИ И РАЗНОВИДНОСТИ ИГР

- **Биматричная игра** не обязательно является антагонистической, т.е. интересы игроков не полностью противоположны (имеется возможность сообщать друг другу о своих намерениях, координировать свои действия, а также применять блеф, угрозы и другие способы обмена информацией).
- Выигрыш одного игрока не обязательно означает проигрыш другого, а сумма выигрышей – не обязательно равна нулю. Это ***игры с ненулевой суммой***.

ИСТОРИЯ, ЗАДАЧИ И РАЗНОВИДНОСТИ ИГР

- Игру **n** лиц с ненулевой суммой всегда можно преобразовать в игру **n+1** лиц с нулевой суммой путем добавления «*фиктивного*» игрока.

ИСТОРИЯ, ЗАДАЧИ И РАЗНОВИДНОСТИ ИГР

Пример биматричной игры с ненулевой суммой.

Студент сдает зачет преподавателю.

«Игроки»: студент и преподаватель.

Стратегии студента, готовящегося к зачету:

- $\boldsymbol{x_1}$ - подготовиться хорошо;
- $\boldsymbol{x_2}$ - подготовиться плохо.

Стратегии преподавателя, принимающего зачет:

- $\boldsymbol{y_1}$ - поставить зачет;
- $\boldsymbol{y_2}$ - не поставить зачет.

ИСТОРИЯ, ЗАДАЧИ И РАЗНОВИДНОСТИ ИГР

- В зависимости от выбора стратегий в игре складываются *четыре ситуации*, которые могут приносить игрокам разное моральное удовлетворение.
- Оценки морального удовлетворения выставим в шкале с положительными и отрицательными баллами и примем их за выигрыши игроков.
- Получим, например, следующие две матрицы $\boldsymbol{A = (a_{ij})}$ и $\boldsymbol{B = (b_{ij})}$:

ИСТОРИЯ, ЗАДАЧИ И РАЗНОВИДНОСТИ ИГР

A= (a_{ij})	*Выигрыши студента*	
	y_1	y_2
x_1	**2** (оценили по заслугам)	**– 1** (обидно)
x_2	**1** (удалось словчить)	**0** (получил по заслугам)

B= (b_{ij})	*Выигрыши преподавателя*	
	y_1	y_2
x_1	**0** (все нормально)	**– 2** (проявил несправед-ливость)
x_2	**– 3** (дал себя обмануть)	**– 1** (студент придет еще раз)

ИСТОРИЯ, ЗАДАЧИ И РАЗНОВИДНОСТИ ИГР

- **Целью** каждого игрока является *максимизации индивидуального выигрыша*. Тогда приведенная пара матриц однозначно задает правила игры.

ИСТОРИЯ, ЗАДАЧИ И РАЗНОВИДНОСТИ ИГР

- Ситуация (i^*, j^*), в которой для матриц выигрыша выполняются неравенства вида

$$\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{i*j*}} \geq \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{ij*}}\ ,\ \boldsymbol{b}_{\boldsymbol{i*j*}} \geq \boldsymbol{b}_{\boldsymbol{i*j}}\ ,\ i = 1,\ 2;\ j = 1,\ 2,$$

называется ***равновесной***.

- В равновесной ситуации игроки добиваются наибольших выигрышей стратегиями $i = i^*$, $j = j^*$.
- Их называют ***равновесными стратегиями***, а соответствующие элементы $\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{i*j*}}$, $\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{i*j*}}$ матриц выигрышей – ***равновесными выигрышами*** игрока.

ИСТОРИЯ, ЗАДАЧИ И РАЗНОВИДНОСТИ ИГР

- Применим определение равновесных стратегий к исходным матрицам в биматричной игре «студент сдает зачет преподавателю»:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Ситуация (i, j) = (1, 1) ***равновесная***, поскольку для первого столбца матрицы A и первой строки матрицы B имеем

$$2 = a_{11} \geq a_{21} = 1,\ 0 = b_{11} \geq b_{12} = -2.$$

- Ситуация (i, j) = (2, 2) тоже ***равновесная***, поскольку $0 \geq -1$ и $-1 \geq -3$.
- Ситуации (1, 2) и (2, 1) ***не равновесные***.

ИСТОРИЯ, ЗАДАЧИ И РАЗНОВИДНОСТИ ИГР

Пример биматричной игры -

- классическая задача теории игр «**Дилемма заключенного**».

Игроками являются два узника, находящиеся в предварительном заключении по подозрению в совершении преступления. При отсутствии прямых улик возможность их осуждения зависит от того, будут они говорить (***Г***) или молчать (***М***). Если в ходе следствия оба будут молчать, то наказанием будет лишь срок предварительного заключения (1 год). Если оба сознаются, то получат срок 3 года, учитывающий признание как смягчающее обстоятельство. Если же заговорит только один, а другой будет молчать, то заговоривший будет выпущен на свободу, а сохранивший молчание получит 10 лет. Заключенных лишили контакта.

ИСТОРИЯ, ЗАДАЧИ И РАЗНОВИДНОСТИ ИГР

- Ситуация иллюстрируется следующими платежными матрицами:

	Выигрыши А	
	Б молчит	*Б говорит*
А молчит	**– 1**	**– 10**
А говорит	**0**	**– 3**

	Выигрыши Б	
	Б молчит	*Б говорит*
А молчит	**– 1**	**0**
А говорит	**– 10**	**– 3**

ИСТОРИЯ, ЗАДАЧИ И РАЗНОВИДНОСТИ ИГР

Особенности переговорного процесса

Рассмотрим две пиратских процедуры дележа добычи (золото), которые выглядят вполне демократичными и открытыми, но происходят в атмосфере взаимного недоверия.

Пусть два пирата делят 1 кг золотого песка. Здесь лучшей процедурой считается «*дели - выбирай*»:

- один делит на две части, а другой выбирает любую из них.

ИСТОРИЯ, ЗАДАЧИ И РАЗНОВИДНОСТИ ИГР

Особенности переговорного процесса

Пусть теперь три пирата делят 1 кг золотого песка. Тогда процедура «дели - выбирай» состоит в следующем.

- первый пират выделяет часть, на которую он претендует.
- если второй и третий пираты одновременно согласны с выбором первого, то он получает свою долю и выбывает из дележа.
- если не согласны оба пирата, то право деления передается другому пирату.
- если же с предложением первого пирата согласен только один, то несогласному третьему пирату дается право выделить из доли первого пирата свою часть, и он выбывает из дележа.

ИСТОРИЯ, ЗАДАЧИ И РАЗНОВИДНОСТИ ИГР

Иначе выглядит процедура деления золотых слитков.

Пусть n пиратов решили разделить 100 золотых слитков.

Установлена следующая процедура дележа.

Сначала дележ проводит старший пират. Его предложение принимается, если с ним согласна хотя бы половина пиратов, включая его самого. Если с ним не согласится больше половины, то он выбывает из дележа, а право дележа передается второму по старшинству пирату и т.д.

ИСТОРИЯ, ЗАДАЧИ И РАЗНОВИДНОСТИ ИГР

Итоги дележа при этом будут выглядеть следующим образом:

- для двух пиратов – (100; 0);
- для трех пиратов – (99; 0; 1) (если бы средний пират предложил младшему объединиться против старшего пирата, пообещав ему половину золота, то где гарантия, что он его не обманет, заняв место старшего пирата и забрав все?);
- для четырех пиратов – (99, 0, 1; 0) (старший пират рассуждает так: надо предложить дележ, который был бы выгоден хотя бы одному пирату, а мне давал бы наибольшую долю);
- для пяти пиратов – (98, 0, 1; 0; 1) и т.д.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР ДВУХ ЛИЦ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ

Пусть дана конечная **антагонистическая игра** двух лиц с нулевой суммой. При матричном способе задания она задается тройкой множеств

$$\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{M}),$$

где $\boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_m}\}$ – множество стратегий **1-го игрока**;

$\boldsymbol{Y} = \{\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}, \dots, \boldsymbol{y_n}\}$– множество стратегий **2-го игрока**;

$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ - *платежная функция* (ограниченная числовая функция одного из игроков, определенная на декартовом произведении множеств стратегий $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$ и равная математическому ожиданию выигрыша/проигрыша игрока).

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР ДВУХ ЛИЦ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ

Антагонистическая игра двух лиц с нулевой суммой полностью описывается единственной матрицей выигрышей одного из игроков.

Обычно функцию $\boldsymbol{M}$ задают в виде платежной матрицы *выигрышей 1-го игрока*:

$$\boldsymbol{Q} = \|\boldsymbol{q}_{ij}\|_{m\times n}\text{, где } \boldsymbol{q}_{ij} = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_j).$$

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР ДВУХ ЛИЦ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ

В **ситуации противоборства** цели игроков считаем *противоположными*:

1-й игрок стремится максимизировать свой выигрыш, а **2-й игрок** – минимизировать свой проигрыш (или наоборот).

Трудность в этих задачах состоит в том, что ни один из игроков не контролирует полностью платежную функцию $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

Сказанное справедливо лишь **для игр двух лиц**, так как *если игроков больше двух*, то возникает возможность образования **коалиций с договорным распределением выигрыша**!

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР ДВУХ ЛИЦ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ

Пример построения платежной матрицы

Пример: **игра Морра**

Каждый из двух игроков показывает один или два пальца и одновременно называет количество пальцев, которое, по его мнению, покажет противник. Если один из игроков угадывает правильно, то он выигрывает сумму, равную сумме пальцев, показанных им и его противником, иначе игра заканчивается вничью.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР ДВУХ ЛИЦ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ

- **Пример построения платежной матрицы**

Чтобы построить матрицу игры, вначале необходимо определить, сколько стратегий у каждого игрока. В данной игре при указанных правилах очевидно, что их четыре:

$X = \{ x_1, x_2, x_3, x_4 \} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\};$

$Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4 \} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$, где первое число указывает на то, сколько пальцев показывает игрок, а второе – сколько пальцев, по его мнению, покажет противник.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР ДВУХ ЛИЦ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ

Пример построения платежной матрицы

Тогда игра состоит из 4×4 = 16 партий, а матрица выигрышей $\boldsymbol{Q}$ 1-го игрока имеет следующий вид:

		2-й игрок			
		(1, 1)	(1, 2)	(2, 1)	(2, 2)
1-й игрок	(1, 1)	**0**	**2**	**–3**	**0**
	(1, 2)	**–2**	**0**	**0**	**3**
	(2, 1)	**3**	**0**	**0**	**–4**
	(2, 2)	**0**	**–3**	**4**	**0**

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР ДВУХ ЛИЦ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ

В антагонистических играх двух лиц с нулевой суммой единственным критерием выбора оптимальной стратегии является следующий критерий:

> ***Оптимальной стратегией*** игрока является такая стратегия, использование которой при многократном повторении игры обеспечивает игроку максимально возможный средний выигрыш (или минимально возможный средний проигрыш).

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР ДВУХ ЛИЦ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ

- Для поиска **оптимальной стратегии** в теории игр используется «пессимистический» критерий, называемый критерием *максимина/минимакса* и основанный на выборе наилучшей из наихудших возможностей.
- Теория исходит из предположения о том, что оба игрока одинаково сильны и не прощают ошибок. Предполагается также, что оптимальное решение достигнуто, если ни одному из игроков невыгодно изменять свою стратегию (*точка равновесия* или *седловая точка*), т.е. достижение компромисса в реальном конфликте сторон, имеющих противоположные интересы, является выгодным для каждого из противников.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР ДВУХ ЛИЦ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ

Проиллюстрируем критерий *максимина/минимакса* и понятие «седловая точка» на примере.

Пусть задана игра со следующей платежной матрицей:

$Q=$

	y_1	y_2	y_3	y_4	*min*
x_1	6	0	7	3	0
x_2	4	**3**	5	16	**3**
x_3	5	1	–6	8	–6
max	6	**3**	7	16	

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР ДВУХ ЛИЦ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ

- Находим минимальный элемент в каждой строке матрицы и выбираем среди них максимальный (максимин равен 3).

Нижняя чистая цена игры (***максимин***) равна

$\alpha = \boldsymbol{max_x\ min_y}\ M(\ x, y\ ) = \boldsymbol{max_i\ min_j\ q_{ij}}.$

Находим максимальный элемент в каждом столбце матрицы и выбираем среди них минимальный (минимакс равен 3).

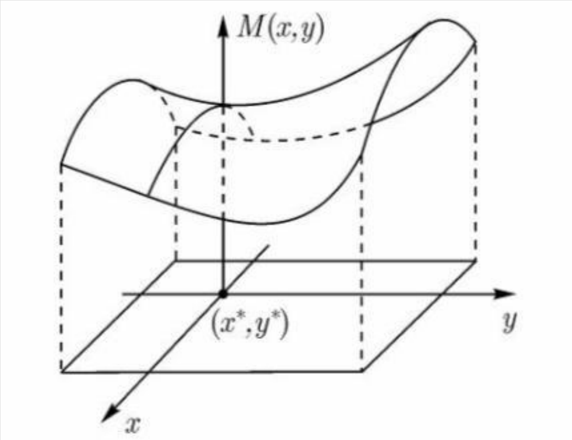
Верхняя чистая цена игры (***минимакс***) равна

$\beta = \boldsymbol{min_y\ max_x}\ M(\ x, y\ ) = \boldsymbol{min_j}\ max_i\ \boldsymbol{q_{ij}}\ .$

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР ДВУХ ЛИЦ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ

Для данной матрицы $\boldsymbol{\alpha = \beta = \nu = 3}$, т.е. игра имеет **седловую точку** (*точка равновесия*, или *точка Нэша*). Здесь $\boldsymbol{\nu}$ – *чистая цена игры*.

Схематичное изображение седловой точки



ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР ДВУХ ЛИЦ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ

У **седловой точки** замечательное свойство: она одновременно является *минимальным элементом* строки и *максимальным элементом* в столбце платежной матрицы.

Если сравнить *максимин* и *минимакс* в любой **антагонистической игре двух лиц с нулевой суммой**, то справедлива теорема, из которой вытекают практически полезные свойства оптимальных стратегий.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР ДВУХ ЛИЦ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ

- **Теорема**

В антагонистической игре двух лиц с нулевой суммой максимин всегда не больше минимакса:

$\boldsymbol{\alpha \leq \beta}$ или $\boldsymbol{max_x\, min_y\, M(x, y) \leq min_y\, max_x\, M(x, y)}$.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР ДВУХ ЛИЦ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ

- **Необходимым** и **достаточным условием** существования **седловой точки** (x^*, y^*) является справедливость равенства

$$\alpha = \beta \text{ или } \max_x \min_y M(x, y) = \min_y \max_x M(x, y).$$

- Исход игры, имеющей **седловую точку**, является *предопределенным*.
- Он не зависит от искусства или глубины анализа игроков, а зависит только **от условий игры**, которые исчерпываются заданием функции выигрыша $M(x, y)$. Поэтому игры, имеющие **седловые точки**, называют *вполне определенными*, или играми с *полной информацией* (каждый игрок знает все предшествующие ходы, как свои, так и противника).

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР ДВУХ ЛИЦ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ

Большинство **антагонистических игр двух лиц с нулевой суммой** не имеют **седловой точки**, т.е. *нет решения в чистых стратегиях*.

Например, в игре Морра с платежной матрицей

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

нет седловой точки. Действительно, α = - 2, β = 2, т.е. интервал [- 2, 2] является как бы ничейным и каждый из игроков может попытаться улучшить результат на этом интервале.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР ДВУХ ЛИЦ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ

Если $\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta}$, то существует ли в игре цена, и какие стратегии рекомендовать игрокам в качестве оптимальных стратегий?

Рассмотрим платежную матрицу в известной игре «Орлянка».

Игра «Орлянка»

По условиям игры 1-й игрок выкладывает монету на стол, а 2-й игрок, не видя монеты, угадывает, какой стороной вверх она положена («орел» - ***О*** или «решка» - ***Р***). В случае угадывания он получает от 1-го игрока 1 рубль, а в противном случае уплачивает ему 1 рубль.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР ДВУХ ЛИЦ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ

- Платежная матрица этой игры имеет следующий вид:

	O	***P***
O	–1	1
P	1	–1

- Здесь $\boldsymbol{\alpha} = -1 < \boldsymbol{\beta} = 1$. Если игра проводится только один раз, то каждый из игроков может принять любое решение. О каких-то оптимальных стратегиях игроков здесь говорить не приходится. При многократном повторении игры положение меняется. Придерживаться одной стратегии невыгодно, их надо ***случайно смешивать*** (причем в данной игре – с одинаковой частотой).

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР ДВУХ ЛИЦ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ

Смешанной стратегией игрока называется полный набор вероятностей применения его чистых стратегий.

Если 1-й игрок имеет $\boldsymbol{m}$ чистых стратегий, то его смешанная стратегия $\boldsymbol{\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)}$, где $\boldsymbol{\xi_i}$ – вероятность применения чистой стратегии $\boldsymbol{x_i}$ при многократном повторении игры, причем

$$\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_m = 1,\ \xi_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m.$$

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР ДВУХ ЛИЦ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ

Аналогично, если 2-й игрок имеет $\boldsymbol{n}$ чистых стратегий, то его смешанную стратегию обозначим через $\boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{\eta_1}, \boldsymbol{\eta_2}, \ldots, \boldsymbol{\eta_n})$, **где** $\boldsymbol{\eta_j}$ - вероятность применения чистой стратегии $\boldsymbol{y_j}$, причем

$$\boldsymbol{\eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_n = 1, \eta_j \geq 0, j = 1, 2, \ldots, n.}$$

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР ДВУХ ЛИЦ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ

- Чистые стратегии являются несовместными событиями и единственными возможными событиями.
- Чистая стратегия – это частный случай смешанной стратегии.
- Если в смешанной стратегии **i-я** чистая стратегия применяется с вероятностью **1**, то все остальные чистые стратегии не применяются.
- Для соблюдения секретности каждый игрок применяет свои стратегии независимо от выбора другого игрока (лотерея).

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР ДВУХ ЛИЦ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ

- Возможность нахождения каждым игроком своей *оптимальной стратегии* базируется на **основной теореме теории игр**. Она является доказательством существования решения для каждой конечной антагонистической игры двух лиц с нулевой суммой.
- В 1927 г. Э.Борель сформулировал *основную теорему теории игр*, а в 1928 г. Дж.фон Нейман доказал эту теорему.
- Ее доказательство основано на теореме Брауэра о неподвижной точке и в силу этого является неконструктивным, т.е. не дает способа нахождения решения игры.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР ДВУХ ЛИЦ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ

Основная теорема теории игр

Всякая конечная **антагонистическая игра двух лиц с нулевой суммой** имеет цену $\boldsymbol{v^*}$ и у каждого игрока имеется, по меньшей мере, одна оптимальная стратегия ($\boldsymbol{\xi^*, \eta^*}$).

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР ДВУХ ЛИЦ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ

- Как и большинство фундаментальных математических теорем о существовании решения, теорема не дает ответа, в данном случае, на два вопроса:
  - Если известна некоторая смешанная стратегия, то как определить является она **оптимальной** или нет?
  - Если решение всегда существует, то чему равна **цена игры** и какие стратегии игроков являются оптимальными?

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР ДВУХ ЛИЦ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ

Доказано, что для оптимальных стратегий игроков (ξ^*, η^*) выполняются следующие неравенства:

$$M(\xi, \eta^*) \leq M(\xi^*, \eta^*) \leq M(\xi^*, \eta) , \qquad (3)$$

где $M(\xi^*, \eta^*) = v^*$ - цена игры.

Отсюда следует свойство, которое можно практически применить для определения того, является ли некоторая стратегия (ξ, η) оптимальной:

$$M(x_i, \eta^*) \leq M(\xi^*, \eta^*) \leq M(\xi^*, y_i) , \qquad (4)$$

справедливое для всех i = 1, 2,…, m; j = 1,2,…, n.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР ДВУХ ЛИЦ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ

Проверка оптимальности некоторой заданной смешанной стратегии

1. Определить величину среднего выигрыша $M(\xi, \eta)$ для заданной смешанной стратегии.

2. Проверить, выполняются ли в (4) неравенства слева для всех I = 1, 2,…, m. Если для некоторого i неравенство не выполняется, то стратегия ξ не является оптимальной.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР ДВУХ ЛИЦ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ

Проверка оптимальности некоторой заданной

смешанной стратегии

3. Проверить, выполняются ли в (**4**) неравенства справа для всех **j = 1, 2,…, n.** Если для некоторого **j** неравенство не выполняется, то стратегия $\boldsymbol{\eta}$ не является оптимальной и останов.

4. Если неравенства (**4**) справедливы для всех индексов **i, j,** то стратегии $\boldsymbol{\xi}$ и $\boldsymbol{\eta}$ являются оптимальными, а цена игры равна $\boldsymbol{M}(\xi, \boldsymbol{\eta})$.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР ДВУХ ЛИЦ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ

Пример платежной матрицы для игры Морра,

в которой нет седловой точки

Определим, являются ли оптимальными в этой игре следующие стратегии 1-го и 2-го игрока:

$$\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{3/5}, \boldsymbol{2/5}, \boldsymbol{0}) \text{ и } \boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{4/7}, \boldsymbol{3/7}, \boldsymbol{0}).$$

Оценим вначале величину среднего выигрыша для заданных стратегий:

$$\boldsymbol{M(\xi, \eta)} = \sum_i \sum_j \boldsymbol{\xi_i q_{ij} \eta_j} = 0\times(0\times0+2\times4/7-3\times3/7+0\times0) + 3/5\times(-2\times0+ +0\times4/7+0\times3/7+3\times0) + 2/5\times(3\times0+0\times4/7+0\times3/7-4\times0) + 0\times(0\times0-3\times4/7+ +4\times3/7+0\times0) = 0.$$

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР ДВУХ ЛИЦ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ

- Проверим, выполняются ли неравенства $M(x_i, \eta) \le M(\xi, \eta)$ для **i = 1, 2, 3, 4:**

$$M(x_1, \eta) = 0\times0+2\times4/7 - 3\times3/7+0\times0 = -1/7 < 0,$$

$$M(x_2, \eta) = -2\times0+0\times4/7+0\times3/7+3\times0 = 0,$$

$$M(x_3, \eta) = 3\times0+0\times4/7+0\times3/7 - 4\times0 = 0,$$

$$M(x_4, \eta) = 0\times0 - 3\times4/7+4\times3/7+0\times0 = 0.$$

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР ДВУХ ЛИЦ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ

- Проверим, выполняются ли неравенства $M(\xi, \eta) \le M(\xi, y_j)$ для **j = 1, 2, 3, 4:**

$$M(\xi, y_1) = 0\times0 - 2\times3/5+3\times2/5+0\times0 = 0,$$
$$M(\xi, y_2) = 2\times0 +0\times3/5+0\times2/5 - 3\times0 = 0,$$
$$M(\xi, y_3) = -3\times0 +0\times3/5+0\times2/5+4\times0 = 0,$$
$$M(\xi, y_4) = 0\times0+3\times3/5 - 4\times2/5+0\times0 = 1/5 > 0.$$

Неравенства справедливы для всех индексов **i, j**, следовательно, стратегии ξ, η являются ***оптимальными***, а цена игры равна 0.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР ДВУХ ЛИЦ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ

- При поиске решения игры иногда необходимо выполнять операции над платежными матрицами.
- Какое влияние это оказывает на решение игры (оптимальные стратегии и цену игры)?

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР ДВУХ ЛИЦ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ

- **Теорема**

Оптимальные смешанные стратегии ($\boldsymbol{\xi}$*, $\boldsymbol{\eta}$*) в матричной игре $||\boldsymbol{q_{ij}}||_{\boldsymbol{m\times n}}$ с ценой $\boldsymbol{v}$ будут оптимальными и в матричной игре

$||\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{q_{ij}} + \boldsymbol{b}||_{\boldsymbol{m\times n}}$ с ценой $\boldsymbol{v^*=av+b}$, где $\boldsymbol{a}>0$.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР ДВУХ ЛИЦ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ

- На основании данной теоремы *платежную матрицу*, имеющую **отрицательные числа**, можно преобразовать в матрицу с **положительными числами**, что полезно при поиске решения игр.
- Поиск решения игры становится менее трудоемким, если ее *платежную матрицу* удается упростить путем удаления **доминируемых** и **дублирующих строк (столбцов**), что не влияет на решение игры.

- Стратегии называются **дублирующими**, если в матричной игре имеются строки (столбцы) с одними и теми же элементами.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР ДВУХ ЛИЦ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ

Рассматривая стратегии **1-го игрока**, сравним поэлементно строки $\boldsymbol{s}$ и $\boldsymbol{t}$. Целью **1-го игрока** является *максимизация выигрыша*. Если все $\boldsymbol{q_{sj}} \geq \boldsymbol{q_{tj}}$ (**j = 1, 2,…, n**), то выигрыш **1-го игрока** при стратегии $\boldsymbol{x_s}$ будет больше, чем при стратегии $\boldsymbol{x_t}$. В этом случае стратегия $\boldsymbol{x_t}$ будет **доминируемой**, и ее можно исключить, упростив тем самым игру.

Поскольку **2-й игрок** стремится *минимизировать свой проигрыш*, то, рассматривая его стратегии, сравним поэлементно столбцы $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{p}$. Если все элементы $\boldsymbol{q_{ir}} \geq \boldsymbol{q_{ip}}$ (**i=1, 2,…, m**), то проигрыш **2-го игрока** при стратегии $\boldsymbol{y_r}$ будет больше, чем при стратегии $\boldsymbol{y_r}$. В этом случае стратегия $\boldsymbol{y_r}$ будет **доминируемой**, и ее можно исключить из матрицы, упростив игру.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР ДВУХ ЛИЦ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ

Пример упрощения матрицы игры

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 5 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 0 & 10 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 0 & 10 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 5 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -2 & 5 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 0 & 10 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 1 & 9 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 5 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ИГР

- Чистые стратегии игрока, входящие в его оптимальную смешанную стратегию с вероятностями, отличными от нуля, называются ***активными стратегиями*** игрока.
- Понятие **активной стратегии** играет важную роль при поиске решения игры.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ИГР

Теорема

Если один из игроков придерживается своей **оптимальной смешанной стратегии**, то его выигрыш остается неизменным и равным цене игры независимо от того, какую стратегию применяет другой игрок, если только тот не выходит за пределы своих активных стратегий.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ИГР

Общий подход к решению игровых задач

Найти цену игры $\boldsymbol{v^*}$ и оптимальные стратегии игроков $\boldsymbol{\xi^*}$, $\boldsymbol{\eta^*}$ по имеющейся платежной матрице, действуя по следующей схеме:

- установить, имеется или нет в игре **седловая точка**, которая указывает на **цену игры** и определяет **оптимальные чистые стратегии** игроков;
- если седловая точка отсутствует, то выяснить, нельзя ли **упростить игру**;
- собственно **поиск решения игры** каким-либо методом.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ИГР

Аналитическое решение для простейшего случая игры (2×2), которая задана следующей матрицей ***Q***:

	y_1	y_2
x_1	q_{11}	q_{12}
x_2	q_{21}	q_{22}

В игре **нет седловой точки** и **матрицу нельзя упростить** (обе стратегии игроков являются активными, иначе игра имела бы седловую точку).

Чему равна цена игры v^* и оптимальные стратегии игроков $\xi^*=(\xi^*1, \xi^*2)$, $\eta^*=(\eta^*1, \eta^*2)$?

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ИГР

- Согласно предыдущей **теореме**, если 1-й игрок применяет свою оптимальную смешанную стратегию ξ^*, а 2-й - одну из своих активных чистых стратегий, то его выигрыш остается неизменным и равным цене игры. Отсюда получаем два уравнения:
    - для чистой стратегии $\boldsymbol{y_1}$ имеем $\boldsymbol{M(\xi^*, y_1\ ) = q_{11}\ q\ \xi^*_1 + q_{21}\ \xi^*_2\ \ = v^*;}$
    - для чистой стратегии $\boldsymbol{y_2}$ имеем $\boldsymbol{M}(\xi^*, \boldsymbol{y_1}) = \boldsymbol{q_{12}}\ \xi^*_1 + \boldsymbol{q_{22}}\ \xi^*_2 = \boldsymbol{v}^*$.

  Справедливо уравнение $\boldsymbol{\xi^*_1 + \xi^*_2\ =1.}$

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ИГР

Решая эту систему из трех уравнений с тремя неизвестными, получим

- $v^* = (q_{11}\, q_{22} - q_{12}\, q_{21})/(q_{11} - q_{12} - q_{21} + q_{22})$,
- $\xi^*_1 = (q_{22} - q_{21})/(q_{11} - q_{12} - q_{21} + q_{22})$,
- $\xi^*_2 = (q_{11} - q_{12})/(q_{11} - q_{12} - q_{21} + q_{22})$.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ИГР

- Аналогично рассуждая, можно вычислить оптимальную стратегию для 2-го игрока, решив систему уравнений следующего вида:
  - для стратегии $\boldsymbol{x_1}$ имеем $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{\eta}^*) = \boldsymbol{q_{11}} \times \boldsymbol{\eta}^*{}_1 + \boldsymbol{q_{12}} \times \boldsymbol{\eta}{*}_2 = \boldsymbol{v}^*$,
  - для стратегии $\boldsymbol{x_2}$ имеем $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{\eta}^*) = \boldsymbol{q_{21}} \times \boldsymbol{\eta}{*}_1 + \boldsymbol{q_{22}} \times \boldsymbol{\eta}{*}_2 = \boldsymbol{v}^*$,
- кроме того, справедливо уравнение $\boldsymbol{\eta}{*}_1 + \boldsymbol{\eta}{*}_2 = 1$.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ИГР

Решая эту систему из трёх уравнений с тремя неизвестными, получим

- $v^* = (q_{11}\, q_{22} - q_{12}\, q_{21})/(q_{11} - q_{12} - q_{21} + q_{22})$,
- $\eta^*_1 = (q_{22} - q_{12})/(q_{11} - q_{12} - q_{21} + q_{22})$,
- $\eta^*_2 = (q_{11} - q_{21})/(q_{11} - q_{12} - q_{21} + q_{22})$.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ИГР

- Пусть дана следующая матрица игры:

	y_1	y_2
x_1	5	1
x_2	3	4

Для нее нижняя чистая цена игры **α = 3**, верхняя чистая цена игры **β = 4** (седловой точки нет). Подставляя выигрыши из матрицы в решение, получим:

$$v^* = (5 \times 4 - 1 \times 3)/(5 - 1 - 3 + 4) = 17/5 = 3{,}4;$$

$$\xi^*_1 = (4 - 3)/5 = 1/5, \ \xi^*_2 = (5 - 1)/5 = 4/5;$$

$$\eta^*_1 = (4 - 1)/5 = 3/5, \ \eta^*_2 = (5 - 3)/5 = 2/5.$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ИГР

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ИГР

- **Алгоритм геометрического решения игры**

1. На оси абсцисс выбирается отрезок длиной 1. Левый край отрезка будет соответствовать чистой стратегии 1-го игрока $\boldsymbol{x_1}$, правый край отрезка – чистой стратегии 1-го игрока $\boldsymbol{x_2}$.

2. Через начало и конец отрезка проводим две оси ординат, точки на которых будут соответствовать значениям выигрыша **1-го игрока**, если **2-й игрок** применяет свои чистые стратегии $\boldsymbol{y_1}$ и $\boldsymbol{y_2}$.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ИГР

3. В случае, если **1-й игрок** применяет смешанную стратегию $\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{\xi_1}, \boldsymbol{\xi_2})$, а **2-й игрок** отвечает своими чистыми стратегиями $\boldsymbol{y_1}$ и $\boldsymbol{y_2}$, то выигрыш **1-го игрока** соответственно будет равен

для $\boldsymbol{y_1}$: $\boldsymbol{M}(\xi, \boldsymbol{y_1}) = \boldsymbol{q_{11}}\xi_1 + \boldsymbol{q_{21}}\,\xi_2 = \boldsymbol{q_{11}}\,\xi_1 + \boldsymbol{q_{21}}(1-\xi_1) = \xi_1(\boldsymbol{q_{11}} - \boldsymbol{q_{21}}) + \boldsymbol{q_{21}}$,

для $\boldsymbol{y_2}$: $\boldsymbol{M}(\xi, \boldsymbol{y_2}) = \boldsymbol{q_{12}}\xi_1 + \boldsymbol{q_{22}}\xi_2 = \boldsymbol{q_{22}}\xi_2 + \boldsymbol{q_{22}}(1-\xi_1) = \xi_1(\boldsymbol{q_{12}} - \boldsymbol{q_{22}}) + \boldsymbol{q_{22}}$.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ИГР

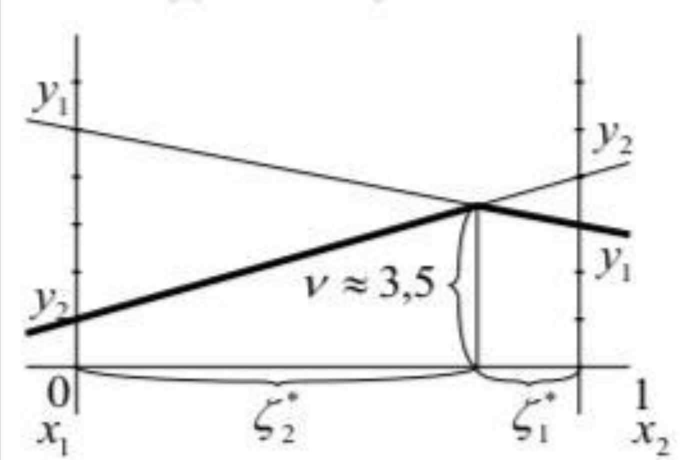
4. Точки с координатами $\boldsymbol{q_{11}}$ и $\boldsymbol{q_{21}}$ соединяем отрезком прямой. Любая точка на этом отрезке равна среднему выигрышу **1-го игрока**, если он применяет некоторую смешанную стратегию ξ=(ξ_1, ξ_2), а **2-й игрок** отвечает своей чистой стратегией $\boldsymbol{y_1}$. Аналогично строим прямую через точки с координатами $\boldsymbol{q_{12}}$ и $\boldsymbol{q_{22}}$ для стратегии $\boldsymbol{y_2}$. Координаты любой точки на этом отрезке будут соответствовать среднему выигрышу **1-го игрока**, если он применяет некоторую смешанную стратегию ξ=(ξ_1 , ξ_2), а **2-й игрок** отвечает стратегией $\boldsymbol{y_2}$.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ИГР

5. Находим точку *максимума* на *нижней огибающей двух прямых*. Из этой точки строим перпендикуляр на ось абсцисс. Его высота будет соответствовать цене игры $\boldsymbol{v}$, расстояние от точки пересечения перпендикуляра с осью абсцисс до правого края единичного отрезка - вероятности $\boldsymbol{\xi*_1}$, расстояние от точки пересечения перпендикуляра с осью абсцисс до левого края единичного отрезка - вероятности $\boldsymbol{\xi*_2}$. Если абсциссой «пиковой» точки является 0 или 1, то **1-й игрок** имеет чистую оптимальную стратегию. Если абсцисса «пиковой» точки лежит строго между 0 и 1, то одна проходящая через нее прямая имеет положительной наклон, а другая - отрицательный наклон.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ИГР

Точка максимума на нижней огибающей двух прямых

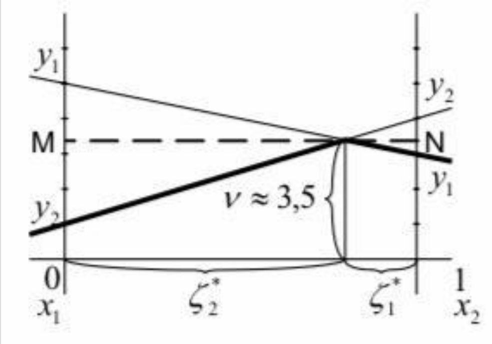


ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ИГР

6. Для того чтобы найти оптимальную стратегию $\boldsymbol{\eta^* = (\eta^*_1, \eta^*_2)}$ 2-го игрока, можно или воспользоваться построенным графиком, или построить новый график для **2-го игрока**. Рассмотрим обе возможности.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ИГР

6.1. На существующем графике через точку максимина проведем прямую, параллельную оси абсцисс. Обозначим точки ее пересечения с осями ординат через ***M*** и ***N*.** Поиск оптимальной стратегии **2-го игро**ка с использованием построенного графика:



ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ИГР

- Тогда оптимальная стратегия **2-го игрока** равна отношению следующих отрезков:
  - $\eta^*_1 = M_{y2/y1y2} = N_{y2/y1y2} \approx 3/5$,
  - $\eta^*_2 = 1 - \eta^*_1 \approx 2/5$.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ИГР

- **6.2.** Для получения более точного решения построим новый график для **2-го игрока** по шагам, аналогичным пп. 1 - 4 данного алгоритма.

  Вначале на оси абсцисс выбирается отрезок длиной 1. Левый край отрезка будет соответствовать чистой стратегии **2-го игрока** $\boldsymbol{y_1}$, правый – $\boldsymbol{y_2}$.

  Через начало и конец отрезка проводим две оси ординат, точки на которых будут соответствовать значениям выигрыша **1-го игрока**, если он применяет свои чистые стратегии $\boldsymbol{x_1}$ и $\boldsymbol{x_2}$.

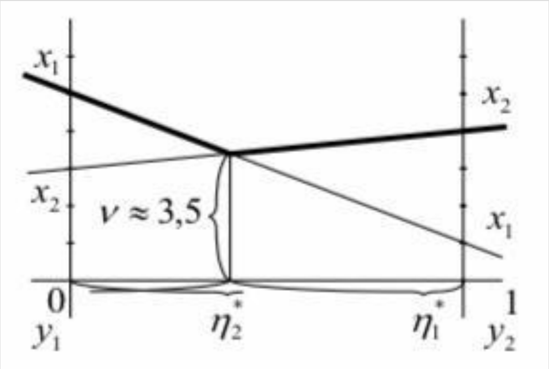
  Точки с координатами $\mathbf{q_{11}}$ и $\mathbf{q_{12}}$ соединяем отрезком прямой. Любая точка на этом отрезке равна среднему выигрышу **1-го игрока**, если он применяет свою чистую стратегию $\boldsymbol{x_1}$, а **2-й игрок** отвечает некоторой смешанной стратегией **η*=(η*$_1$, η*$_2$).** Аналогично строим прямую через точки с координатами $\mathbf{q_{21}}$ и $\mathbf{q_{22}}$ для стратегии $\boldsymbol{x_2}$.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ИГР

Координаты любой точки на этом отрезке будут соответствовать среднему выигрышу **1-го игрока**, если он применяет некоторую свою чистую стратегию $\boldsymbol{x_2}$, а **2-й игрок** отвечает некоторой смешанной стратегией $\boldsymbol{\eta^*=(\eta^*_1, \eta^*_2)}$**.** Затем находим точку *минимума* на *верхней огибающей двух прямых,* поскольку **2-й игрок** стремится минимизировать свой максимальный проигрыш.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ИГР

- **Точка минимума на верхней огибающей двух прямых**



Из точки минимума на верхней огибающей опускаем перпендикуляр на единичный отрезок оси абсцисс и определяем оптимальную стратегию **2-го игрока** $\boldsymbol{\eta^* = (\eta^*_1, \eta^*_2) \approx (3/5,\ 2/5)}$.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ИГР

Утверждение

В любой конечной игре существует решение, в котором количество активных стратегий каждого игрока не превосходит числа

$$\boldsymbol{min(m, n)}.$$

Геометрический метод можно применять при поиске решений игр (**2×n**) и (**m×2**). Для этого используется данное утверждение, справедливость которого доказана.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ИГР

- Игры (**2×n**) и (**m×2)** сводятся к решению игры (**2×2**). Их геометрический метод решения аналогичен рассмотренному выше.
- Аналогично в трехмерном пространстве можно решать игры (**3×n**), (**m×3**), сводя их к игре (**3×3**). Однако получающиеся при этом построения оказываются весьма громоздкими и требуют привлечения методов начертательной геометрии.

РЕШЕНИЕ ИГР МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

- Любое **измерение** имеет определенную погрешность, ошибки могут накапливаться.
- Поиск **оптимального решения игры** при большом количестве стратегий игроков - достаточно трудоемкий процесс.
- **Точность** в определении значения игры и оптимальных стратегий игроков оправдана не всегда.
- Достаточно найти **приближённое решение**, которое даёт средний выигрыш, близкий к цене игры, и **приближённые оптимальные стратегии игроков**.

РЕШЕНИЕ ИГР МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Метод Брауна - Робинсон

- один из простейших последовательных приближенных методов решения матричной игры.

Идея метода: имитируется многократное повторение игры и набирается статистика, показывающая, какие **стратегии** максимизируют выигрыш, и таким образом приближенно определяется **оптимальная стратегия**.

РЕШЕНИЕ ИГР МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Метод Брауна - Робинсон

Для анализа антагонистической игры с некоторой платежной матрицей строится итерационный процесс, каждый шаг которого - **розыгрыш игры**.

В **первом розыгрыше** у игроков ещё нет никакой информации, поэтому они выбирают свои стратегии **произвольно**.

Далее каждый игрок выбирает такую **чистую стратегию**, которая является *наилучшей* с учетом всех предыдущих ходов противника, рассматриваемых как некоторая «*смешанная*» стратегия, т.е. последовательно, при каждом розыгрыше выбирается та стратегия, которая **первому игроку** дает *максимальный средний выигрыш,* а **второму** - *минимальный средний выигрыш*.

РЕШЕНИЕ ИГР МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Метод Брауна - Робинсон

- После каждого **розыгрыша** вычисляется *среднее значение выигрыша* **первого игрока**, *проигрыша* **второго игрока**, и их среднее арифметическое принимается за **приближенное значение цены игры**. После завершения **итерационного процесса** вычисляются *частоты использования игроками своих стратегий,* которые являются *приближенными значениями вероятностей* в ***оптимальных смешанных стратегиях игроков***.

РЕШЕНИЕ ИГР МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

- Например, пусть дана следующая матрица выигрышей **1-го игрока**:

	y_1	y_2	y_3
x_1	2	1	0
x_2	2	0	3
x_3	–1	3	–3

- В игре нет седловой точки ($\alpha = 0$, $\beta = 2$).

РЕШЕНИЕ ИГР МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Результаты вычислений **по методу последовательных приближений:**

N	i(N)	$L_1(N)$	$L_2(N)$	$L_3(N)$	$v_{\wedge}(N)$	j(N)	$U_1(N)$	$U_2(N)$	$U_3(N)$	$\hat{v}(N)$	v
1	x_1	2	1	**0**	0	y_3	0	**3**	–3	3	1,5
2	x_2	4	**1**	3	0,5	y_2	1	**3**	0	1,5	1
3	x_2	6	**1**	6	0,3	y_2	2	**3**	**3**	1	0,7
4	x_2	8	**1**	9	0,25	y_2	3	3	**6**	1,5	0,9
5	x_3	7	**4**	6	0,8	y_2	4	3	**9**	1,8	1,3
6	x_3	6	7	**3**	0,5	y_3	4	**6**	**6**	1	0,75
7	x_2	8	7	**6**	0,9	y_3	4	**9**	3	1,3	1,1
8	x_2	10	**7**	9	0,9	y_2	5	**9**	6	1,1	1
9	x_2	12	**7**	12	0,8	y_2	6	**9**	**9**	1	0,9
10	x_2	14	**7**	15	0,7	y_2	7	9	**12**	1,2	0,95
11	x_3	13	**10**	12	0,9	y_2	8	9	**15**	1,4	1,1
12	x_3	12	13	**9**	0,75	y_3	8	**12**	**12**	1	**0,9**

РЕШЕНИЕ ИГР МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

В таблице приняты следующие **обозначения** столбцов:

- **N** – номер розыгрыша (партии);
- **i(N)** – номер чистой стратегии **1-го игрока**, выбранной в партии **N**;
- $\boldsymbol{L_j}$**(N)** – общий выигрыш **1-го игрока** после N партий, если **2-й игрок** все время применяет стратегию $\boldsymbol{y_j}$;
- **ν^(N) = min**$_j$ **(**$\boldsymbol{L_j}$**(N))/N** – наименьший средний выигрыш **1-го игрока** за **N** ходов;

РЕШЕНИЕ ИГР МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

- **j(N)** – номер чистой стратегии **2-го игрока** в партии **N**;
- $\boldsymbol{U_i}$**(N)** – общий выигрыш **1-го игрока** после **N** партий, если он все время использует стратегию $\mathbf{x_i}$;
- **v^(N) = max**$_i$ **(**$\boldsymbol{U_i}$**(N))/N** – наибольший средний выигрыш **1-го игрока** за **N** ходов;
- **v** = (**v**$_\wedge$ + **v^**)/**2** – приближенное значение цены игры.

РЕШЕНИЕ ИГР МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

В таблице приведены **розыгрыши** для **12 партий**.

В результате **цена игры** $\boldsymbol{\nu} \approx 0{,}9$,

- *приближенное значение оптимальной стратегии* **1-го игрока**
  - $\boldsymbol{\xi} \approx (1/12,\ 7/12,\ 4/12)$,
- **2-го игрока**
  - $\boldsymbol{\eta} \approx (0{,}8/12{,}4/12)$.

Приведем для сравнения **точное решение**: $\boldsymbol{\nu}^* = 1$, $\boldsymbol{\xi}^* = \boldsymbol{\eta}^* = (0,\ 8/12,\ 4/12)$.

РЕШЕНИЕ ИГР МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

- Данный метод легко автоматизировать, поэтому он иногда предпочтительнее сведения матричной игры к **задаче линейного программирования** и использования **симплекс-метода**.
- **Для остановки итерационного процесса компьютерного моделирования игры необходимо указать число итераций**.
- **Дополнительным условием остановки** является достижение положения «*равновесия*», при котором все выигрыши $\boldsymbol{L_j}$(N) или $\boldsymbol{U_i}$ (N) совпадают между собой.

РЕШЕНИЕ ИГР МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Достоинства метода последовательных приближенных :

- сложность и объём вычислений сравнительно слабо возрастают по мере увеличения числа стратегий игроков ($\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{n}$).
- К тому же трудоемкость метода снижается, если в ходе розыгрышей определять не только **номер очередной чистой стратегии**, но и сколько раз подряд она должна применяться.