НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

Понятие непрерывности функции

определение 1.

Функция f(x) называется непрерывной в точке x_0, если она определена в этой точке (т.е. существует значение функции в этой точке $f(x_0)$) и имеет конечный предел при

$$x \to x_0$$

равный значению функции в этой точке:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

ПРИМЕРЫ.

1

Функция $y = \frac{1}{x}$

не является непрерывной в точке *x=0*, т.к. не существует значения функции в этой точке:

$$y(0) = \frac{1}{0} \quad \cancel{\exists}$$

2

Функция $$y=\begin{cases} x+1, & x\geq 0 \\ x-1, & x<0 \end{cases}$$

существует в точке ***x=0*** **, т.к.** ***y(0)=1***

Рассмотрим пределы этой функции в точке ***x=0*** **.**

Предел слева: $$\lim_{x\to 0-0}(x-1)=-1$$

Предел справа: $$\lim_{x\to 0+0}(x+1)=1$$

Эти пределы неравны, следовательно общего предела не существует и функция не является непрерывной в этой точке.

3

Функция $y = x^2$

является непрерывной в точке *x=0*, т.к. существует значение функции в этой точке: *y(0)=0*

и существует предел $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$

Определение непрерывности функции может быть записано в виде:

определение 2.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x)$$

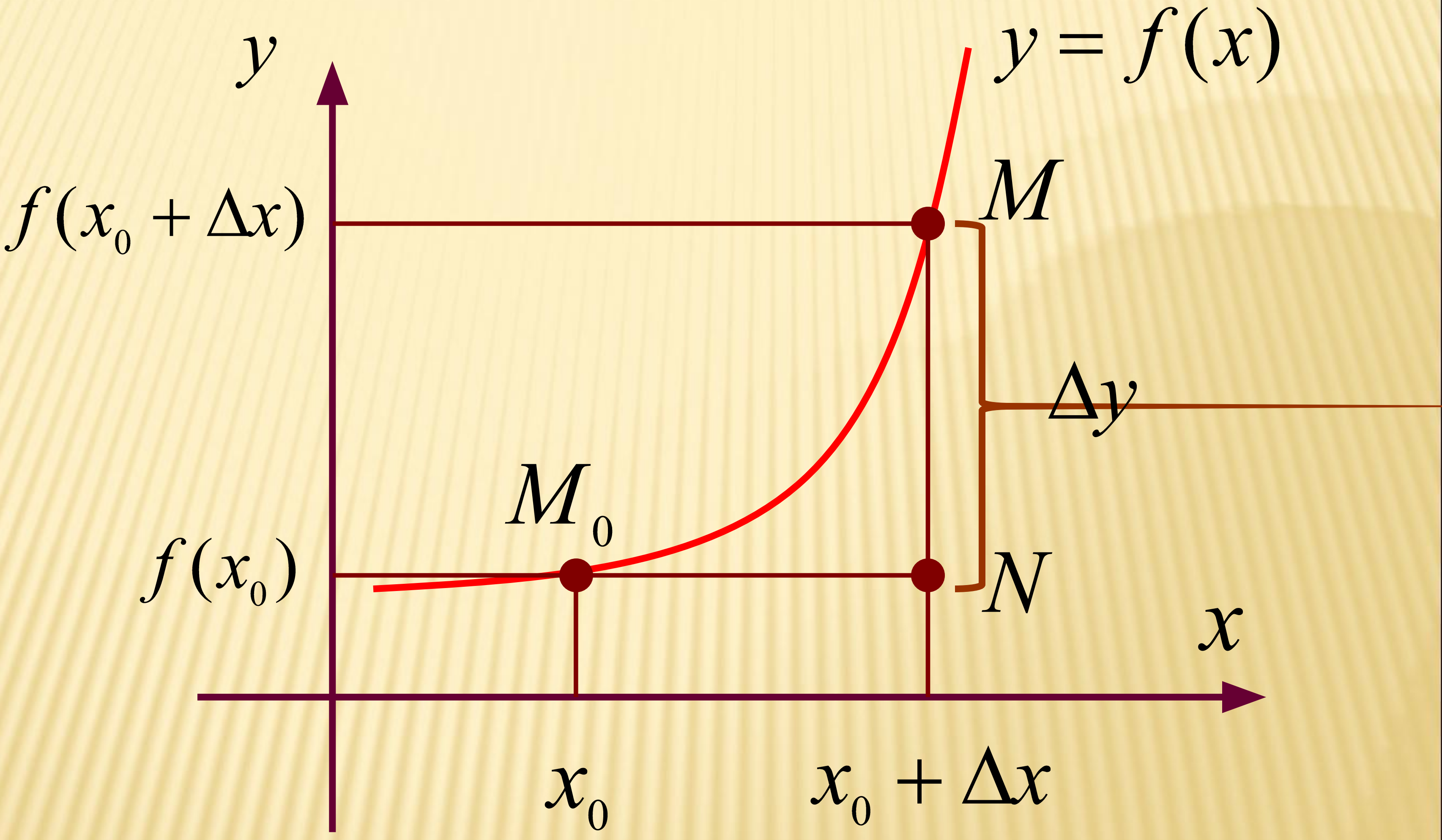
Непрерывность функции в данной точке выражается непрерывностью графика при прохождении этой точки.

Рассмотрим график функции *y=f(x)*.

Дадим аргументу x_0 приращение *Δx*. Тогда функция получит приращение *Δy*:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Графически:



y
$y = f(x)$
M
$f(x_0 + \Delta x)$
Δy
M_0
$f(x_0)$
N
x
x_0
$x_0 + \Delta x$

определение 3.

Функция f(x) называется непрерывной в точке x_0, если она определена в точке x_0 и бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

Точка x_0 называется точкой разрыва функции $f(x)$, если в этой точке функция не является непрерывной.

Точки разрыва бывают 1 и 2 рода.

Точка x_0 называется точкой разрыва первого рода функции f(x), если существуют односторонние пределы функции слева и справа при $x \to x_0$

Точка x_0 называется точкой разрыва второго рода функции f(x), если хотя бы один из односторонних пределов функции равен бесконечности или не существует.

ПРИМЕРЫ.

1

Функция $y = \frac{1}{x}$

имеет точку разрыва второго рода x=0, поскольку:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$$

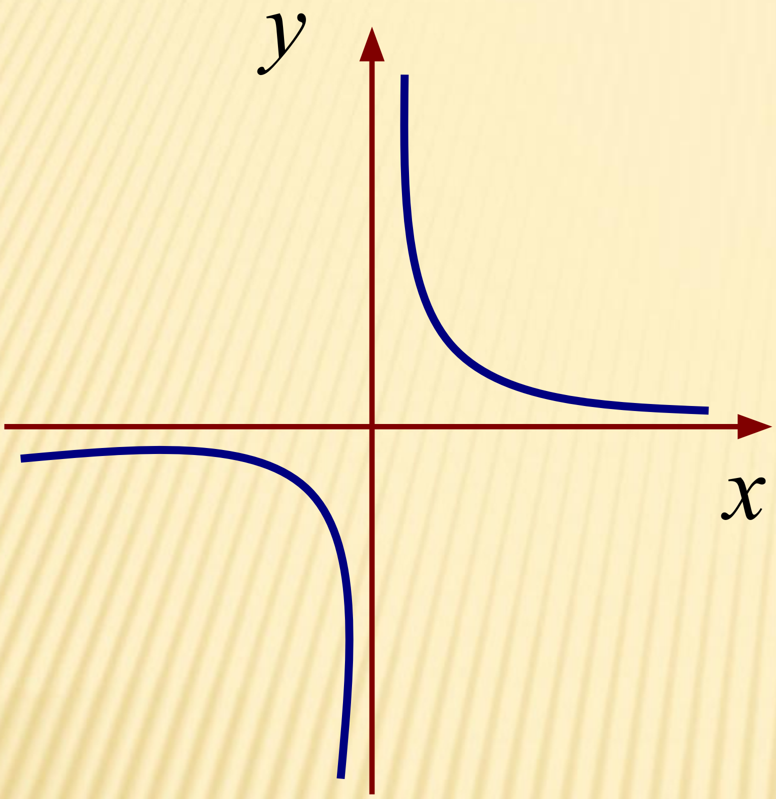
2

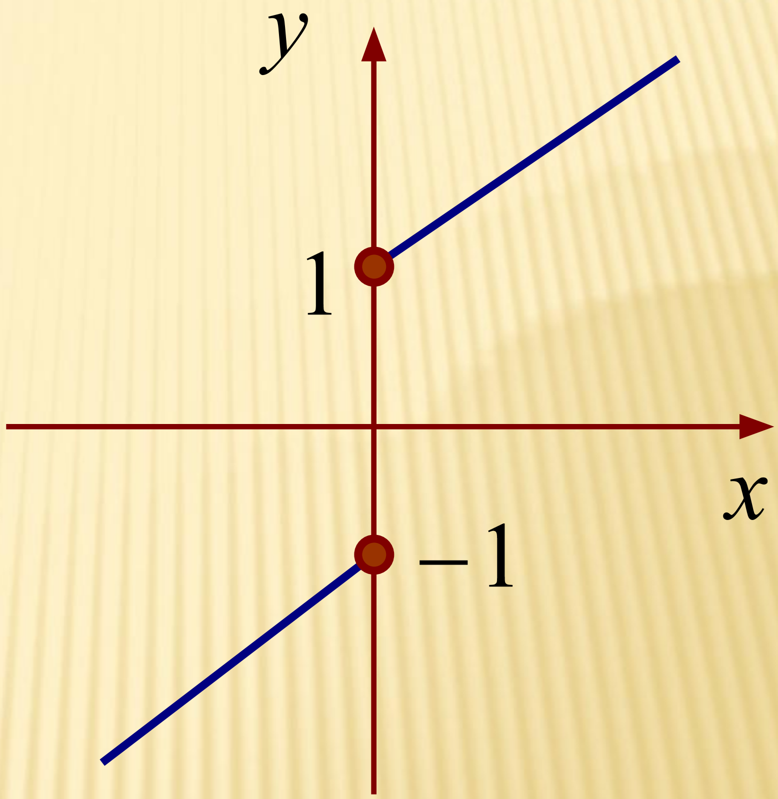
Функция $$y = \begin{cases} x+1, & x \geq 0 \\ x-1, & x < 0 \end{cases}$$

имеет точку разрыва первого рода x=0, поскольку:

$$\lim_{x \to 0-0} (x-1) = -1$$

$$\lim_{x \to 0+0} (x+1) = 1$$





$$y = \frac{1}{x}$$

$$y = \begin{cases} x + 1, & x \geq 0 \\ x - 1, & x < 0 \end{cases}$$