Системы счисления

Это совокупность приёмов и правил для записи чисел цифровыми знаками.

Системы счисления

позиционные

Количественные значения символов, используемых для записи чисел, зависит от их положения (места,) в коде числа

непозиционные

Количественные значения символов, используемых для записи чисел, не зависит от их положения (места,) в коде числа

Непозиционные системы счисления

Система счисления в Древнем Египте

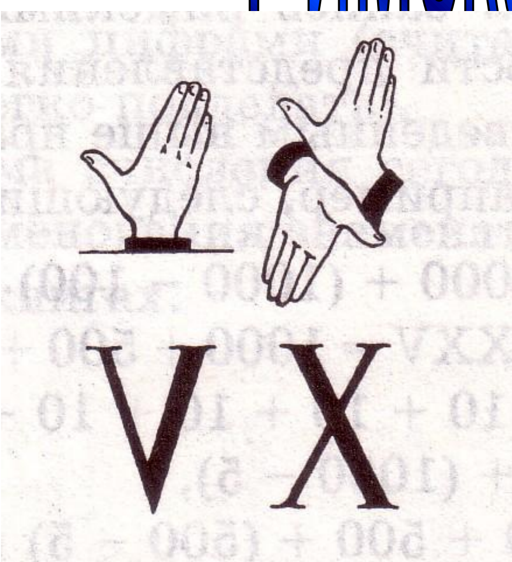
1 10 100 1000 10 000 100 000 1 000 000

С течением времени эти знаки изменились и приобрели более простой вид:

1 10 100 1000 10 000 100 000 1 000 000

Все остальные числа составлялись из этих ключевых символов при помощи операции сложения. Например, чтобы изобразить 3 252, рисовали три цветка лотоса (три тысячи), два свернутых пальмовых листа (две сотни), пять дуг (пять десятков) и два шеста (две единицы):

Римская система счисления



Единицы	Десятки	Сотни	Тысячи
1 I	10 X	100 C	1000 M
2 II	20 XX	200 CC	2000 MM
3 III	30 XXX	300 CCC	3000 MMM
4 IV	40 XL	400 CD	
5 V	50 L	500 D	
6 VI	60 LX	600 DC	
7 VII	70 LXX	700 DCC	
8 VIII	80 LXXX	800 DCCC	
9 IX	90 XC	900 CM	

Алфавитные системы счисления

Наряду с иероглифическими в древности широко применялись алфавитные системы счисления, в которых числа изображались буквами алфавита. Так, в Древней Греции числа 1, 2, ..., 9 обозначали первыми девятью буквами греческого алфавита: $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$ и так далее. Для обозначения десятков применялись следующие девять букв: $\iota = 10$, $\kappa = 20$, $\lambda = 30$, $\mu = 40$ и так далее. Для обозначения сотен использовались последние девять букв: $\rho = 100$, $\sigma = 200$, $\tau = 300$ и так далее.

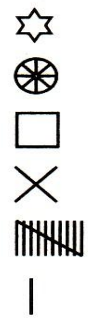
Ниже приведен греческий алфавит с числовыми значениями входящих в него букв.

Буква	Название	Числовой эквивалент	Буква	Название	Числовой эквивалент	Буква	Название	Числовой эквивалент
Αα	Альфа	1	Ιι	Йота	10	Ρρ	Ро	100
Ββ	Бета	2	Κκ	Каппа	20	Σσ	Сигма	200
Γγ	Гамма	3	Λλ	Ламбда	30	Ττ	Тау	300
Δδ	Дельта	4	Μμ	Мю	40	Υυ	Ипсилон	400
Εε	Эпсилон	5	Νν	Ню	50	Φφ	Фи	500
–	–	6	Ξξ	Кси	60	Χχ	Хи	600
Ζζ	Дзета	7	Οο	Омикрон	70	Ψψ	Пси	700
Ηη	Эта	8	Ππ	Пи	80	Ωω	Омега	800
Θθ	Тэта	9	–	–	90	–	–	900

Славянский цифровой алфавит

Буква	Название	Числовой эквивалент	Буква	Название	Числовой эквивалент	Буква	Название	Числовой эквивалент
а҃	Аз	1	і҃	И	10	р҃	Рцы	100
в҃	Веди	2	к҃	Како	20	с҃	Слово	200
г҃	Глаголь	3	л҃	Люди	30	т҃	Твердо	300
д҃	Добро	4	м҃	Мыслете	40	ѹ҃	Ук	400
є҃	Есть	5	н҃	Наш	50	ф҃	Ферт	500
ѕ҃	Зело	6	ѯ҃	Кси	60	х҃	Хер	600
з҃	Земля	7	о҃	Он	70	ѱ҃	Пси	700
и҃	Иже	8	п҃	Покой	80	ѿ҃	Омега	800
ѳ҃	Фита	9	ч҃	Червь	90	ц҃	Цы	900

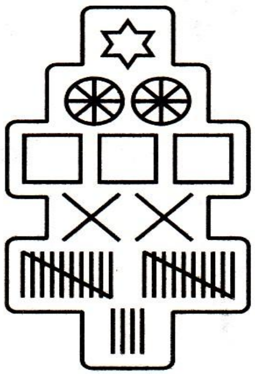
Ясачные грамоты



— тысяча рублей,
— сто рублей,
— десять рублей,
— один рубль,
— десять копеек,
— копейка.

Дабы не можно было сделать здесь никаких прибавлений, все таковые знаки очерчивать кругóм прямыми линиями.»

Например, 1232 рубля 24 копейки изображались так:



Вавилонская система счисления

 = 12,  = 31,  = 45.

Все число в целом записывалось в позиционной системе счисления с основанием 60. Поясним это на примерах.

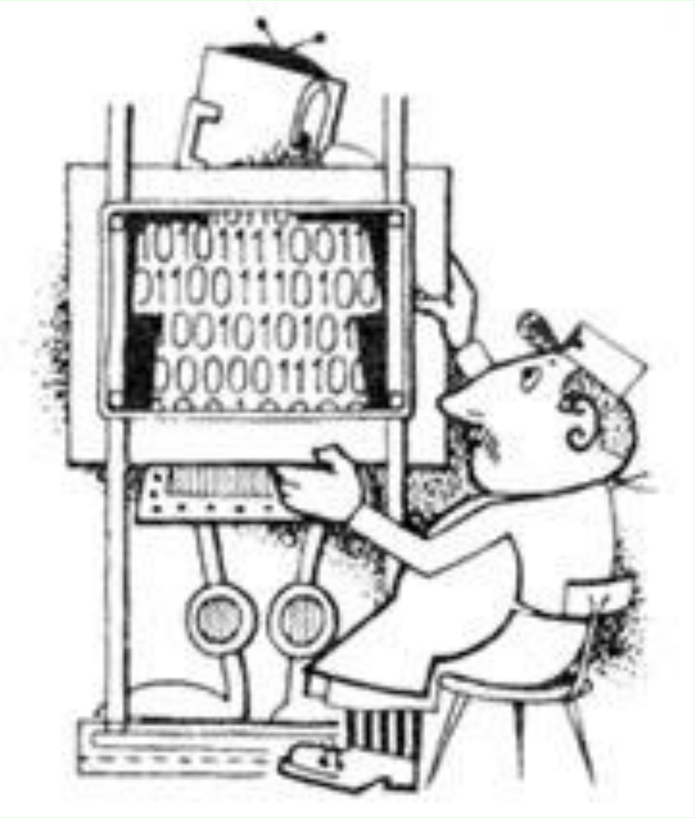
Запись  обозначала $6 \cdot 60 + 3 = 363$, подобно тому как наша запись 63 обозначает $6 \cdot 10 + 3$.

Запись  обознала $32 \cdot 60 + 52 = 1972$; запись  обозначала $1 \cdot 60 \cdot 60 + 2 \cdot 60 + 4 = 3724$.

Позиционные системы счисления

ПОЗИЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

В позиционных системах счисления количественный эквивалент (значение) цифры зависит от её места (позиции) в записи числа.



Позиция цифры в числе называется разрядом.

Разряд числа возрастает справа налево, от младших разрядов к старшим.

Основанием позиционной системы счисления называется целое число, которое равно количеству цифр, используемых для изображения чисел в данной системе счисления.

Основание показывает, во сколько раз изменяется количественное значение цифры при перемещении её в младший или старший разряд.

ПОЗИЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ОСНОВАНИЕМ

Возможно использование множества позиционных систем счисления, основание которых равно или больше 2.

В системах счисления с основанием *q* (q-ичная система счисления) числа в развернутой форме записываются в виде суммы ряда степеней основания *q* с коэффициентами, в качестве которых выступают цифры *0, 1, …, q-1*.

Для записи **дробей** используются разряды с отрицательными значениями степеней основания.

$$A_q = a_{n-1} \cdot q^{n-1} + a_{n-2} \cdot q^{n-2} + \ldots + a_0 \cdot q^0 + a_{-1} \cdot q^{-1} + \ldots + a_{-m} \cdot q^{-m}$$

или

$$A_q = \pm \sum_{i=-m}^{n-1} a_i q_i$$

A_q – число в q-ичной системе счисления,
q – основание системы счисления,
A_i – цифры, принадлежащие алфавиту данной системы счисления,
n – число целых разрядов числа,
m – число дробных разрядов числа.

Коэффициенты a_i - цифры числа, записанного в q-ичной системе счисления.

Свернутая форма записи числа: $A = a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0 , a_{-1} \ldots a_{-m}$

Свернутой формой записи чисел мы пользуемся в повседневной жизни, её называют естественной или цифровой.

ДЕСЯТИЧНАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

Основание: q = 10.

Алфавит: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Развернутая форма записи числа:

$$A_{10} = a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_0 \cdot 10^0 + a_{-1} \cdot 10^{-1} + \ldots + a_{-m} \cdot 10^{-m}$$

Коэффициенты a_i - цифры десятичного числа.

Свернутая форма записи числа: $A_{10} = a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0 , a_{-1} \ldots a_{-m}$

Например, число $123{,}45_{10}$ в развернутой форме будет записываться следующим образом:

$$123{,}45_{10} = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2}$$

Умножение или деление десятичного числа на 10 (величину основания) приводит к перемещению запятой, отделяющей целую часть от дробной на один разряд вправо или влево. Например:

$$123{,}45_{10} \cdot 10 = 1234{,}5_{10};$$

$$123{,}45_{10} : 10 = 12{,}345_{10}.$$

ДВОИЧНАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

Основание: q = 2.

Алфавит: 0, 1.

Развернутая форма записи числа:

$$A_2 = a_{n-1}\cdot 2^{n-1} + a_{n-2}\cdot 2^{n-2} + \ldots + a_0\cdot 2^0 + a_{-1}\cdot 2^{-1} + \ldots + a_{-m}\cdot 2^{-m}$$

Коэффициенты a_i - цифры двоичного числа (0 или 1).

Свернутая форма записи числа: $A_2 = a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1a_0, a_{-1}\ldots a_{-m}$

Например, число $101{,}01_2$ в развернутой форме будет записываться следующим образом:

$$101{,}01_2 = 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 + 0\cdot 2^{-1} + 1\cdot 2^{-2}$$

Умножение или деление двоичного числа на 2 (величину основания) приводит к перемещению запятой, отделяющей целую часть от дробной на один разряд вправо или влево. Например:

$$101{,}01_2 \cdot 2 = 1010{,}1_2;$$

$$101{,}01_2 : 2 = 10{,}101_2.$$

ВОСЬМЕРИЧНАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

Основание: **q = 8**.

Алфавит: **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7**

Развернутая форма записи числа:

$$A_8 = a_{n\text{-}1} \cdot 8^{n\text{-}1} + a_{n\text{-}2} \cdot 8^{n\text{-}2} + \ldots + a_0 \cdot 8^0 + a_{\text{-}1} \cdot 8^{\text{-}1} + \ldots + a_{\text{-}m} \cdot 8^{\text{-}m}$$

Коэффициенты a_i - цифры восьмеричного числа.

Свернутая форма записи числа: $A_8 = a_{n\text{-}1} a_{n\text{-}2} \ldots a_1 a_0 , a_{\text{-}1} \ldots a_{\text{-}m}$

Например, число $123{,}67_8$ в развернутой форме будет записываться следующим образом:

$$123{,}67_8 = 1 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0 + 6 \cdot 8^{-1} + 7 \cdot 8^{-2}$$

Умножение или деление восьмеричного числа на 8 (величину основания) приводит к перемещению запятой, отделяющей целую часть от дробной на один разряд вправо или влево. Например:

$$123{,}67_8 \cdot 8 = 1236{,}7_8;$$

$$123{,}67_8 : 8 = 12{,}367_8.$$

ШЕСТНАДЦАТЕРИЧНАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

Основание: **$q = 16$.**

Алфавит: **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F**

Развернутая форма записи числа:

$$A_{16} = a_{n-1} \cdot 16^{n-1} + a_{n-2} \cdot 16^{n-2} + \ldots + a_0 \cdot 16^0 + a_{-1} \cdot 16^{-1} + \ldots + a_{-m} \cdot 16^{-m}$$

Коэффициенты a_i - цифры шестнадцатеричного числа.

Свернутая форма записи числа: $A_{16} = a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0 , a_{-1} \ldots a_{-m}$

Например, число $2BC,DE_{16}$ в развернутой форме будет записываться следующим образом:

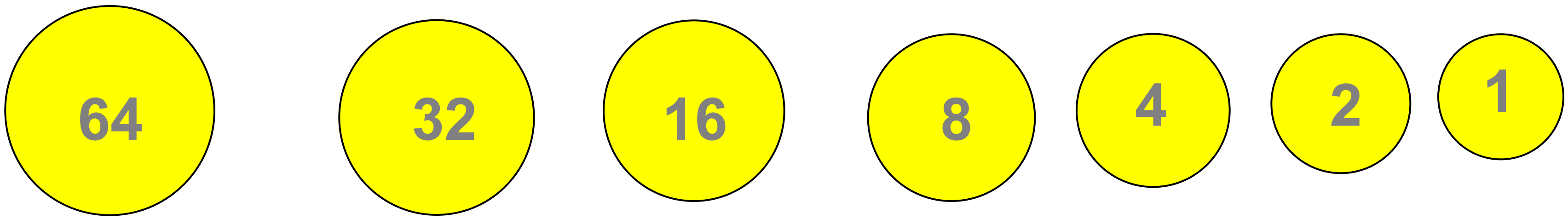
$$2BC,DE_{16} = 2 \cdot 16^2 + B \cdot 16^1 + C \cdot 16^0 + D \cdot 16^{-1} + E \cdot 16^{-2}$$

Умножение или деление шестнадцатеричного числа на 16 (величину основания) приводит к перемещению запятой, отделяющей целую часть от дробной на один разряд вправо или влево. Например:

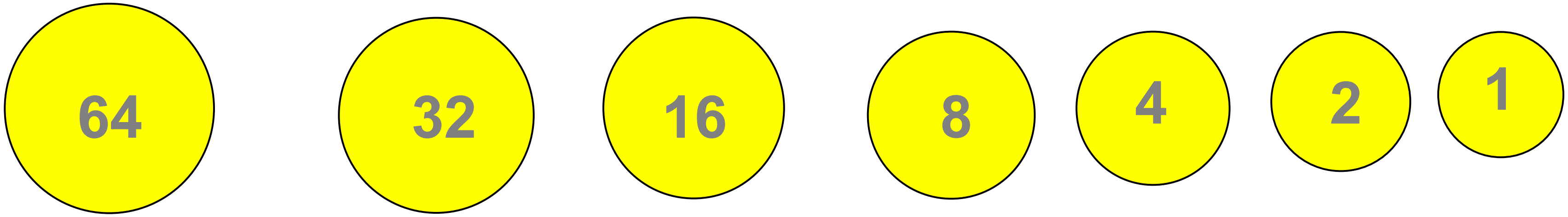
$$2BC,DE_{16} \cdot 16 = 2BCD,E_{16};$$

$$2BC,DE_{16} : 16 = 2B,CDE_{16}.$$

Перевод чисел из десятичной системы счисления в двоичную и обратно.



Задача. ***На столе лежат монеты достоинством 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 копейки. Вам нужно набрать сумму - 35 копеек, при условии, что с каждым ходом вы берете копейку максимального достоинства, учитывая сумму, которую вам нужно набрать. Какие монеты вы возьмете?***



Сопоставим монетам, которые берем 1, а которые не берем – 0. Получим:

64	32	16	8	4	2	1
0	1	0	0	0	1	1

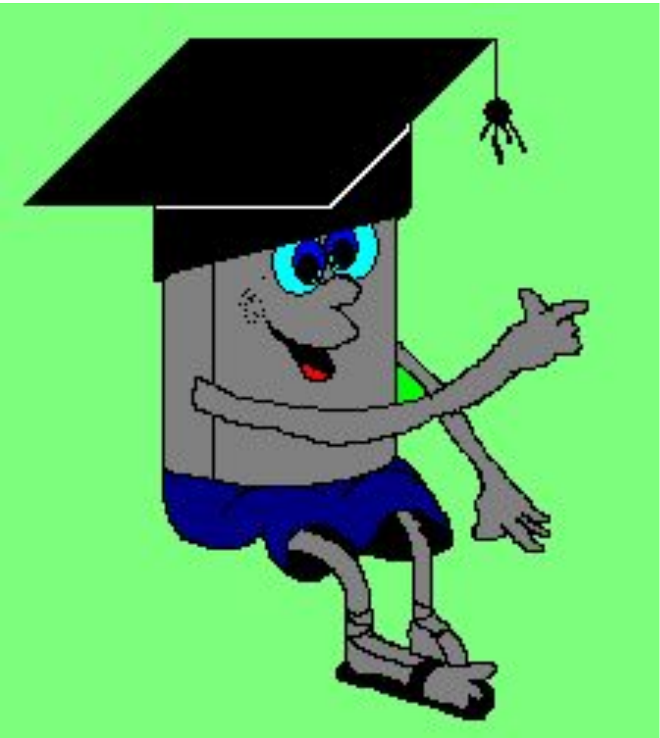
Таким образом, мы получили:

$$35_{10}=100011_2$$

Заполним таблицу степеней двойки

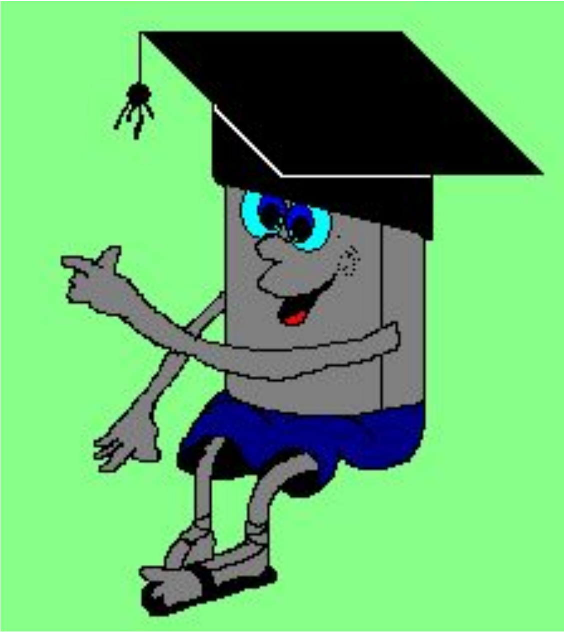
(2^n, где n=0,1,2,3,4,5,6).

n	2^n
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64



Расположим эту таблицу горизонтально (без названий).

6	5	4	3	2	1	0
64	32	16	8	4	2	1



Используя таблицу, переведите числа из десятичной системы счисления в двоичную.

	6	5	4	3	2	1	0
	64	**32**	**16**	**8**	**4**	**2**	**1**
17_{10}			1	0	0	0	1
28_{10}			1	1	1	0	0
54_{10}		1	1	0	1	1	0
63_{10}		1	1	1	1	1	1

Решим обратную задачу: ***переведем число из двоичной системы счисления в десятичную.***

16	8	4	2	1
4	3	2	1	0
1	0	1	0	1

$10101_2 = 21_{10}$

$16 + 4 + 1$

Переведите следующие числа из двоичной системы счисления в десятичную:

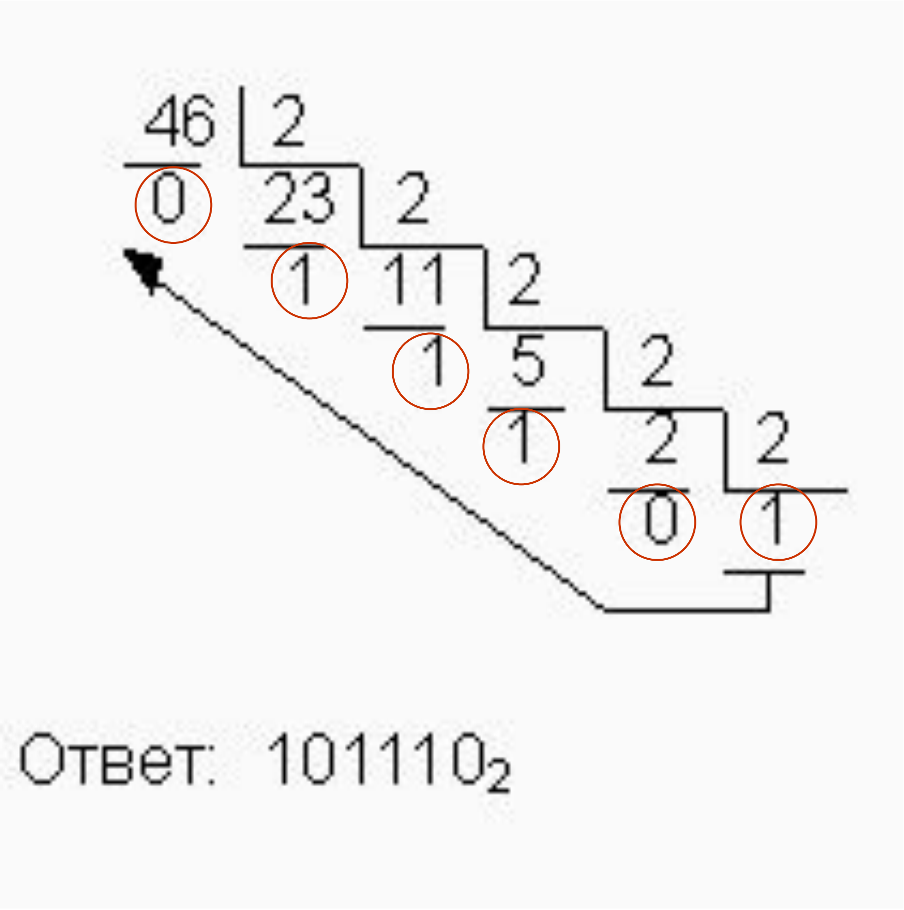
$1001_2 = 9_{10}$

$11001_2 = 25_{10}$

$1100110_2 = 102_{10}$

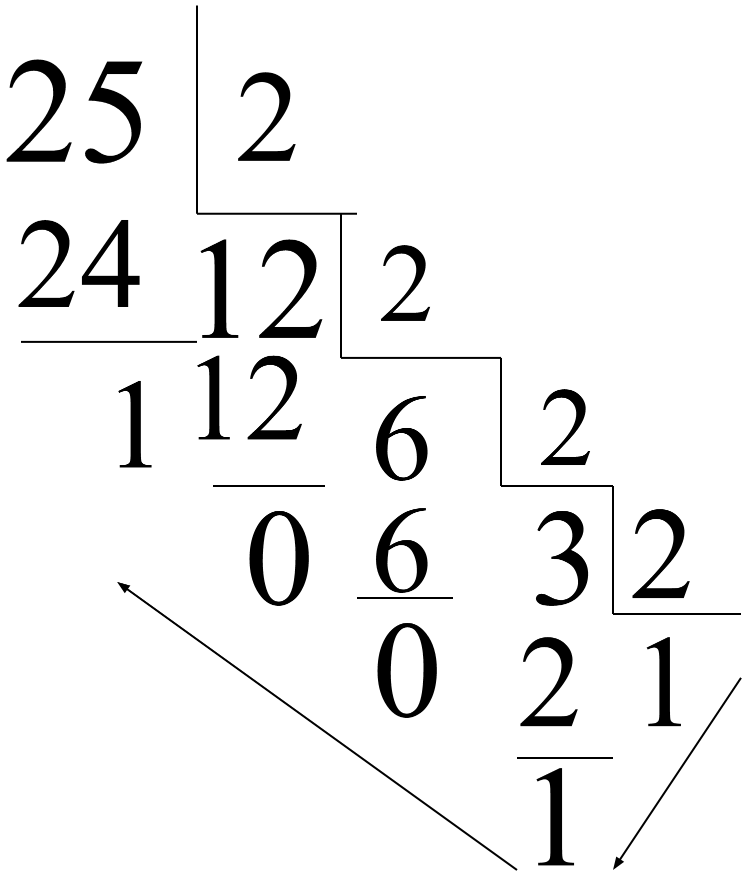
Перевод чисел из 10-ой системы счисления в 2-ую

2 способ



$$46_{10} \rightarrow 101110_2$$

Переведем число 25



$25_{10}=11001_2$

2

Перевести числа из 10 с/с в 2 с/с способом деления числа

$29_{10} = 11101_2$

$38_{10} = 100110_2$

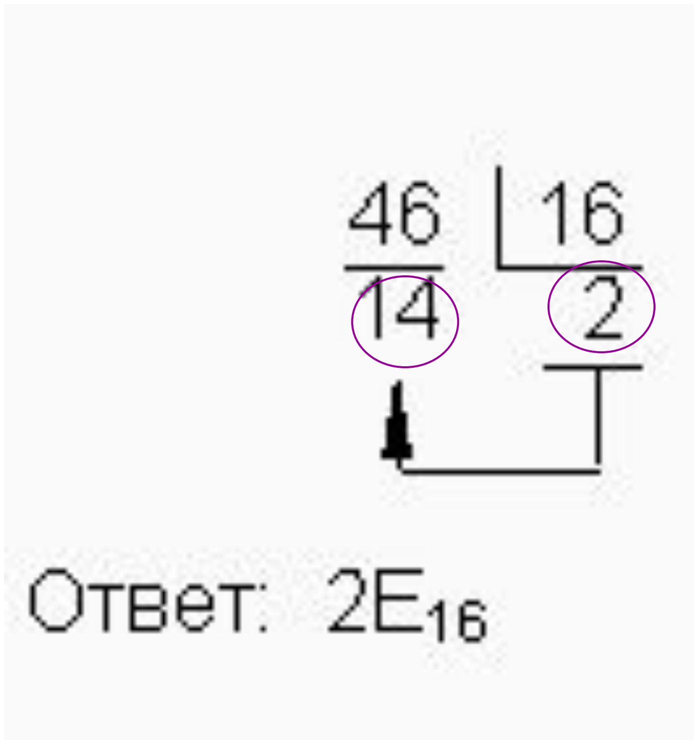
$52_{10} = 110100_2$

Перевод чисел из 10-ой системы счисления в 8-ую

$46_{10} \rightarrow 56_8$

Перевод чисел из 10-ой системы счисления в 16-ую

$46_{10} \rightarrow 2E_{16}$



Перевод дробных чисел из 10-ой системы в 2-ую

Перевод дробного числа из десятичной системы счисления в двоичную осуществляется по следующему алгоритму:
Вначале переводится целая часть десятичной дроби в двоичную систему счисления;
Затем дробная часть десятичной дроби умножается на основание двоичной системы счисления;
В полученном произведении выделяется целая часть, которая принимается в качестве значения первого после запятой разряда числа в двоичной системе счисления;
Алгоритм завершается, если дробная часть полученного произведения равна нулю или если достигнута требуемая точность вычислений. В противном случае вычисления продолжаются с предыдущего шага.

Пример: Требуется перевести дробное десятичное число 206,6 в дробное двоичное число.

Перевод целой части дает $\mathbf{206_{10}=11001110_2}$ по ранее описанным алгоритмам; дробную часть умножаем на основание **2**, занося целые части произведения в разряды после запятой искомого дробного двоичного числа:

.6 • 2 = **1**.2

.2 • 2 = **0**.4

.4 • 2 = **0**.8

.8 • 2 = **1**.6

.6 • 2 = **1**.2

.2 • 2 = **0**.4

.4 • 2 = **0**.8

.8 • 2 = **1**.6

.6 • 2 = **1**.2

.2 • 2 = **0**.4 **и т.д.**

Получим: $\mathbf{=11001110,(1001)_2}$

Пример: Требуется перевести дробное десятичное число 206,6 в дробное восьмиричное число.

Перевод целой части дает $\mathbf{206_{10}=316_8}$ по ранее описанным алгоритмам; дробную часть умножаем на основание **8**, занося целые части произведения в разряды после запятой искомого дробного двоичного числа:

.6 • 8 = **4**.8

.8 • 8 = **6**.4

.4• 8 = **3**.2

.2 • 8 = **1**.6

.6 • 8 = **4**.8

.8 • 8 = **6**.4

.4 • 8 = **3**.2

.2 • 8 = **1**.6

.6 • 8 = **4**.8

.8 • 8 = **6**.4 **и т.д.**

Получим: $\mathbf{=316,(4631)_8}$

Пример: Требуется перевести дробное десятичное число 206,6 в дробное шестнадцатиричное число.
Перевод целой части дает $\mathbf{206_{10}=CE_{16}}$ по ранее описанным алгоритмам; дробную часть умножаем на основание **16**, занося целые части произведения в разряды после запятой искомого дробного двоичного числа:

.6 • 16 = **9**.6

.6 • 16 = **9**.6

.6• 16 = **9**.6

и т.д.

Получим: **=CE,(9)**$_{\mathbf{16}}$

Перевод чисел из 2-ой системы счисления в 10-ую

$$\overset{5}{1}\ \overset{4}{0}\ \overset{3}{1}\ \overset{2}{1}\ \overset{1}{1}\ \overset{0}{0}_2 = \overset{32}{2^5} + \overset{8}{2^3} + \overset{4}{2^2} + \overset{2}{2^1} =$$

32+8+4+2

$= 46_{10}$

Ответ: 46_{10}

$101110_2 \rightarrow 46_{10}$

Перевод чисел из 8-ой системы счисления в 10-ую

$$\overset{1}{5}\,\overset{0}{6}_8 = 5*8^1+6*8^0 = 40+6 =$$
$$= 46_{10}$$

Ответ: 46_{10}

Перевод чисел из 16-ой системы счисления в 10-ую

$$\overset{1}{2}\,\overset{0}{E}_{16} = 2*16^1+E*16^0 =$$

$$= 32+14 = 46_{10}$$

Ответ: 46_{10}

Алгоритм перевода числа из десятичной системы счисления в двоичную.

1. Разделить данное число с остатком на 2.
2. Полученное частное разделить снова с остатком на 2.
3. Продолжить деление до тех пор пока частное не будет равно1.
4. Двоичный код исходного числа получается при последовательной записи последнего частного и всех остатков начиная с последнего.

Алгоритм перевода числа из двоичной системы счисления в десятичную:

1. Подписать над каждой цифрой номер соответствующего разряда числа.
2. Умножить каждую цифру числа на 2 в степени разряда и сложить полученные произведения $(110101=1*25+1*24+0*2^3+1*2^2+0*2^1+1*2^0)$
3. Найти значение полученного выражения.

Триады.

8 с/с	2 с/с
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

Тетрады

16 с/с	2 с/с
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001
A	1010
B	1011
C	1100
D	1101
E	1110
F	1111

Перевод чисел из 8-ой системы счисления в 16-ую

$$5\ 6_8 = \underbrace{101}\ \underbrace{110}_2 = 10\ \underbrace{1110}_2 =$$

$$= 2E_{16}$$

Ответ: $2E_{16}$

$$\mathbf{56_8 \rightarrow 2E_{16}}$$

Перевод чисел из 16-ой системы счисления в 2-ую

$$2E_{16} = \underbrace{0010}\ \underbrace{1110}_2 = 101110_2$$

Ответ: 101110_2

$2E_{16} \rightarrow 101110_2$

Перевод чисел из 8-ой системы счисления в 2-ую

$$56_8 = \underbrace{101}\ \underbrace{110}_2$$

Ответ: 101110_2

$$56_8 \rightarrow 101110_2$$

Выполните упражнения

1. Запишите числа в развёрнутой форме:
   а) 314_{10} **б)** $\mathbf{101_2}$
2. Какое минимальное основание может иметь система счисления, если в ней записано число 11? Число 99?
3. На какую величину в позиционных системах счисления различаются одинаковые цифры, стоящие в соседних разрядах числа? (например 33_{10}, 33_4)

Домашнее задание

Переведите число $89{,}7_{10}$

во все остальные системы счисления

$\dots\dots_2$ $\dots\dots_8$ $\dots\dots_{16}$