Властивості задачі лінійного програмування

Властивості задачі лінійного програмування

3.1 Форми ЗЛП

3.2 Еквівалентність форм ЗЛП

3.3 Множина допустимих розв’язків ЗЛП (багатогранні множини, багатогранники, вершини, грані)

3.4 Основні властивості ЗЛП і теореми лінійного програмування

3.3 Множина допустимих розв'язків ЗЛП (багатогранні множини, багатогранники, вершини, грані)

Гіперплощина

Визначення. Множина точок простору R^n, координати яких задовольняють рівнянню

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b,$$

де $a_j \in R, a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} \neq 0, b \in R$, називається ***гіперплощиною*** H_{ab}

.

Короткий запис визначення: $H_{ab} = \left\{ x \in R^n \middle| a^T x = b \right\}$.

Напівпростори

Визначення. Множини

$$H_{ab}^{+} = \left\{ x \in R^n \,\middle|\, a^T x \geq b \right\},$$

$$H_{ab}^{-} = \left\{ x \in R^n \,\middle|\, a^T x \leq b \right\},$$

що породжуються гіперплощиною H_{ab}, називаються

(***закритими***) ***напівпросторами***.

Напівпростори

Відкриті ніпівпростори:

$$H_{ab}^{+} = \left\{ x \in R^n \,\middle|\, a^T x > b \right\}$$

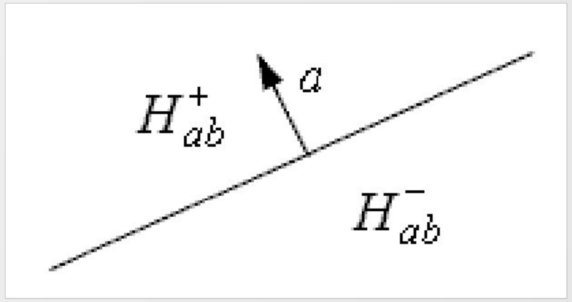
$$H_{ab}^{+} = \left\{ x \in R^n \,\middle|\, a^T x < b \right\}$$

Нормаль

Визначення.

Вектор a називається ***нормаллю*** до гіперплощини H_{ab}.

Нормаль ортогональна до H_{ab} і направлена у бік простору H_{ab}^{+}.



Твердження. *Гіперплощина* H_{ab} *є опуклою множиною.*

Схема доведення опуклості деякої множини $X \subset R^n$

1) Записати множину X у вигляді:

$$X = \{x \in R^n | \, x \ \ \text{задовольнає умові (−ам)} \ S\}$$

2) Припустити, що $x^1, x^2 \in X$

3) Записати умову (-и) S для обох точок x^1, x^2:

$$S \text{ для } x^1 \qquad (1)$$

$$\text{S для } x^2 \qquad (2)$$

4) Показати, що ОЛК цих двох точок $x = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2$ також належить множині S

Тобто, враховуючи (1) та (2), показати, що для x виконується умова (-и) S .

Самостійно № 2

Довести, що куля є опуклою множиною.

Твердження.

Перетин довільного числа опуклих множин також є ***опуклою*** множиною

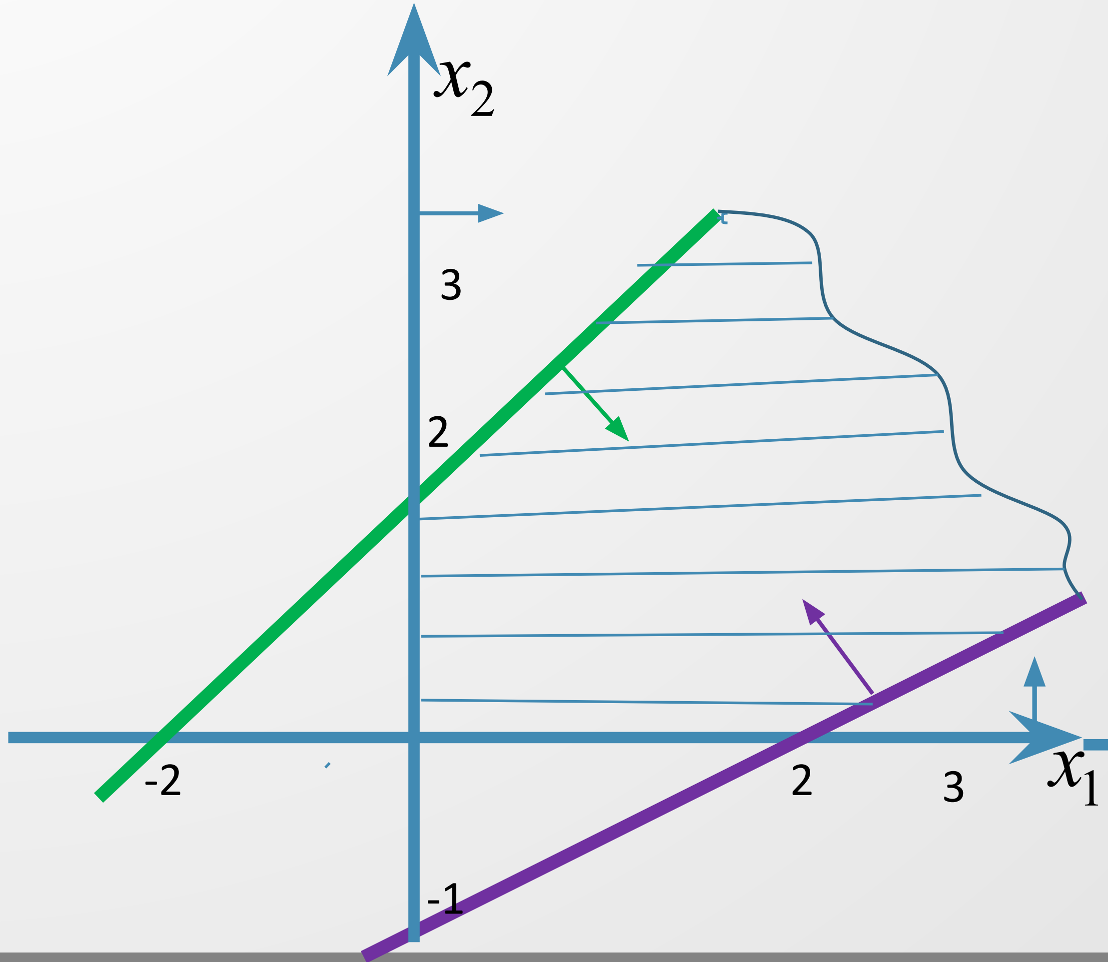
(Самостійно №3)

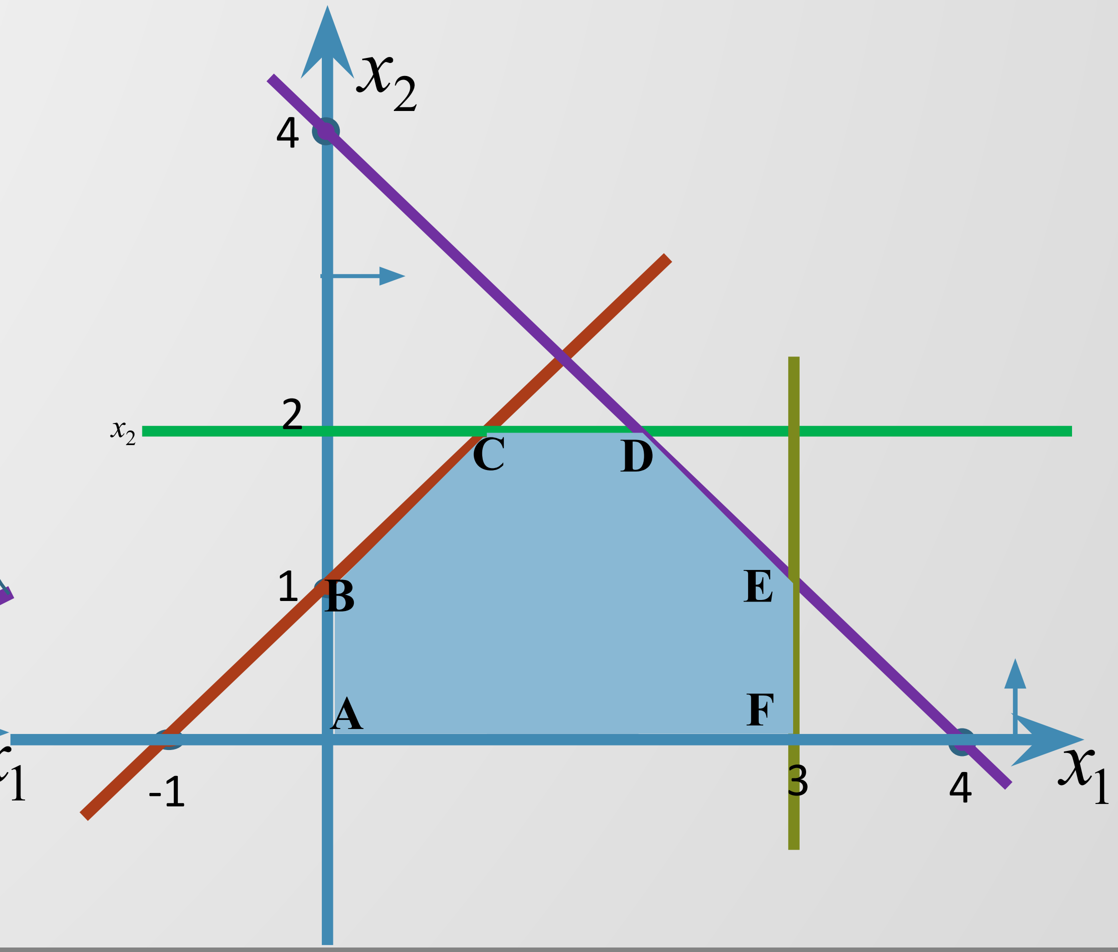
Визначення.

Множина, утворена перетином скінченого числа напівпросторів і гіперплощин (якщо цей перетин не порожній) називається ***багатогранною множиною***.

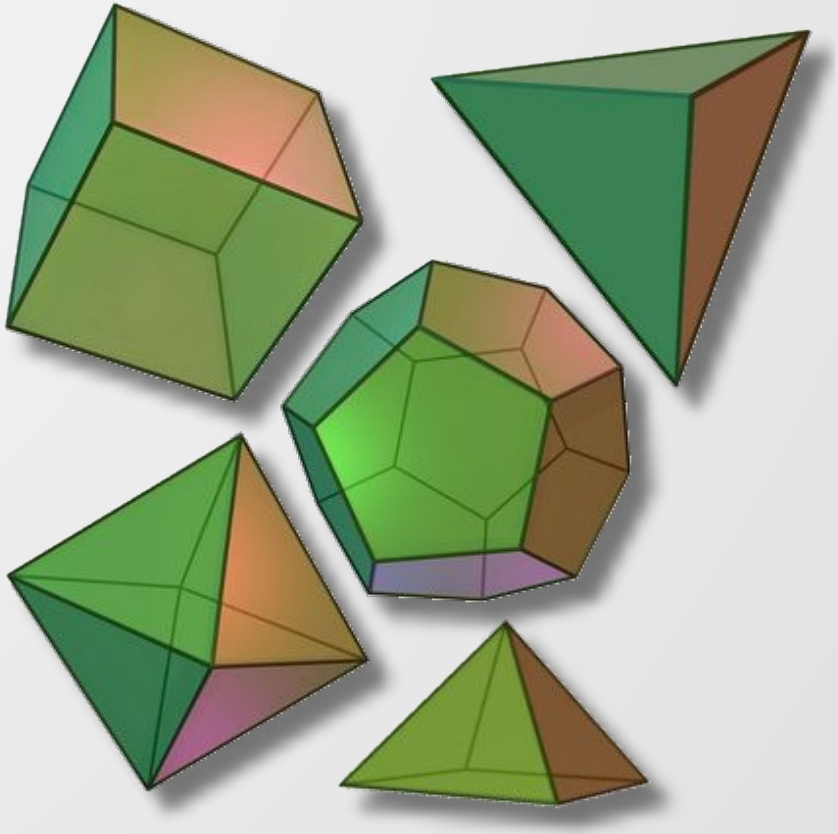
Багатогранником називається обмежена багатогранна множина.

Багатогранні множини $X \subset R^2$





Багатогранники $X \subset R^3$



Твердження.

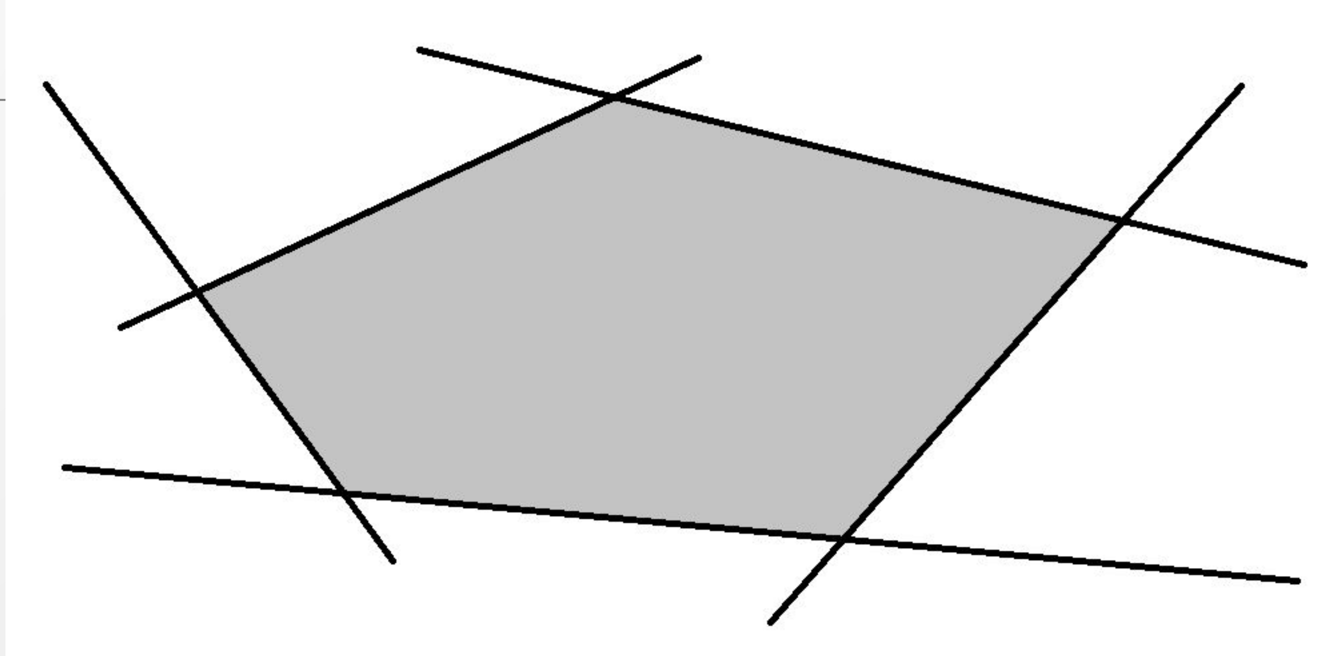
Багатогранна множина є ***опуклою*** множиною

(Самостійно №4)

Будь-яка багатогранна множина може бути представлена як множина розв’язків системи із скінченого числа лінійних нерівностей:

$$X = \left\{ x \in R^n \middle| \, Ax \le b \right\} = \left\{ x \in R^n \middle| \, a_{i*}^T x \le b_i, \, i = \overline{1,m} \right\} \qquad (3)$$

$$X = \left\{ x \in R^n \middle| \; Ax \le b \right\} = \left\{ x \in R^n \middle| \; a_{i*}^T x \le b_i ,\, i = \overline{1,m} \right\} \qquad (3)$$



Визначення.

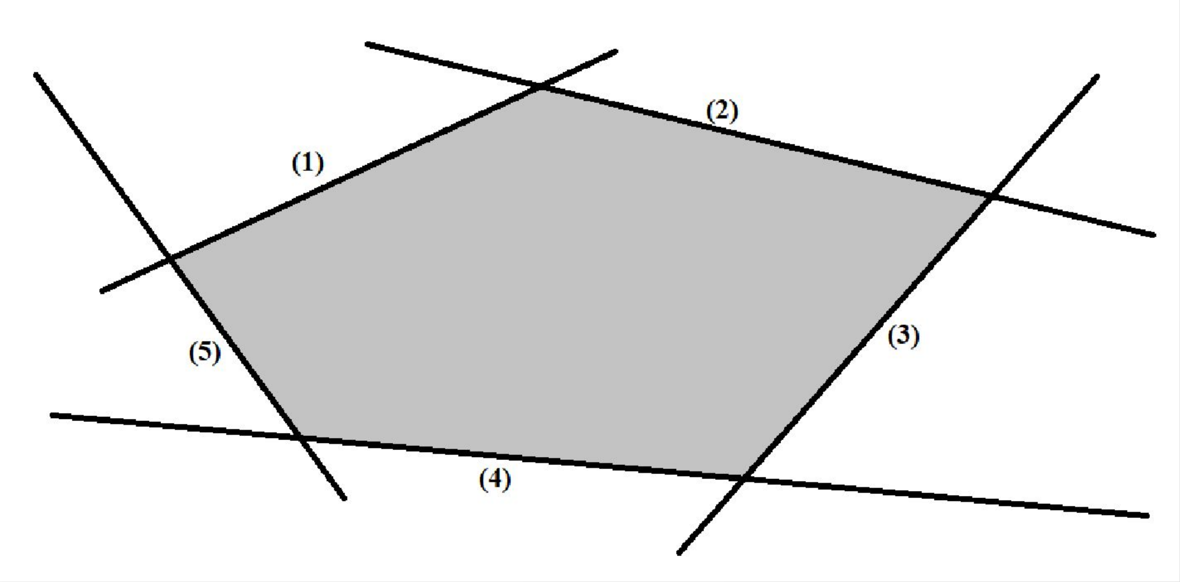
Обмеження $a_{i*}^T x \le b_i$ називається ***активним*** в точці $x^* \in X$,

якщо воно виконується в ній як точна рівність: тобто $a_{i*}^T x^* = b_i$.

Визначення.

Через $I(x^*)$ позначатимемо множину номерів активних в точці $x^* \in X$ обмежень:

$$I(x^*) = \left\{ i, 1 \le i \le m \,\middle|\, a_{i*}^T x^* = b_i \right\}$$

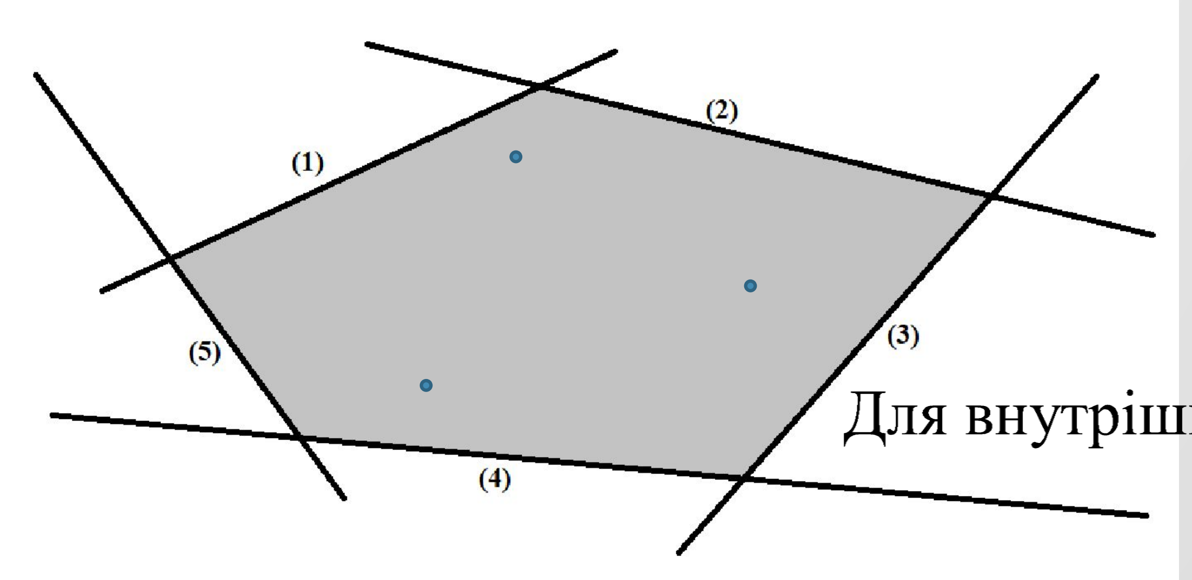


Визначення.

Точка $x^* \in X$ називається ***внутрішньою***, якщо для неї всі нерівності в

$$a_{i*}^T x \le b_i, \quad i = \overline{1,m}$$

виконуються як строгі нерівності.



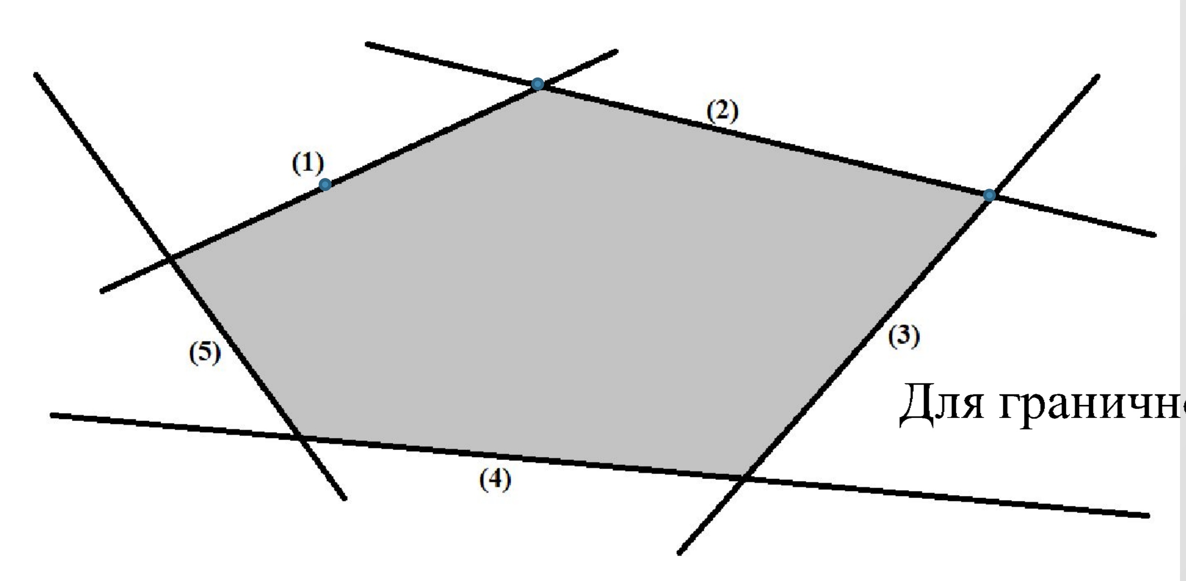
Для внутрішньої точки: $I(x^*) = \varnothing$.

Визначення.

Точка $x^* \in X$ називається ***граничною***, якщо для неї хоча б одна нерівність в

$$a_{i*}^T x \le b_i, \quad i = \overline{1,m}$$

виконується як строга рівність



Для граничної точки $x^*: \quad I(x^*) \neq \varnothing.$

Визначення вершини

Визначення 1.

Точка $x^* \in X$ називається ***вершиною***, якщо вона не може бути виражена у вигляді опуклої лінійної комбінації інших різних точок множини X.

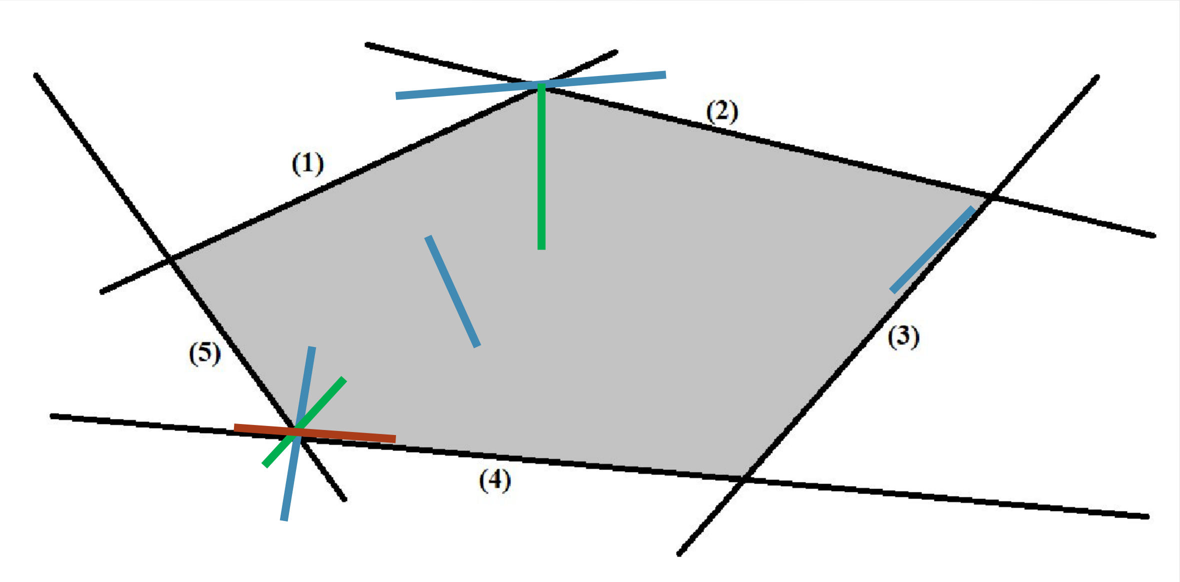
Визначення 2.

Точка $x^* \in X$ називається ***вершиною***, якщо не існує точок $x^1, x^2 \in X$ таких, що $x^* = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2$ при $x^1 \neq x^2,\ 0 < \lambda < 1.$

Визначення 3.

Точка $x^* \in X$ є ***вершиною*** X тоді, коли в X не існує відрізка, усередині якого лежала б точка x^*.

Визначення вершини



Властивості вершин

Властивість 1.

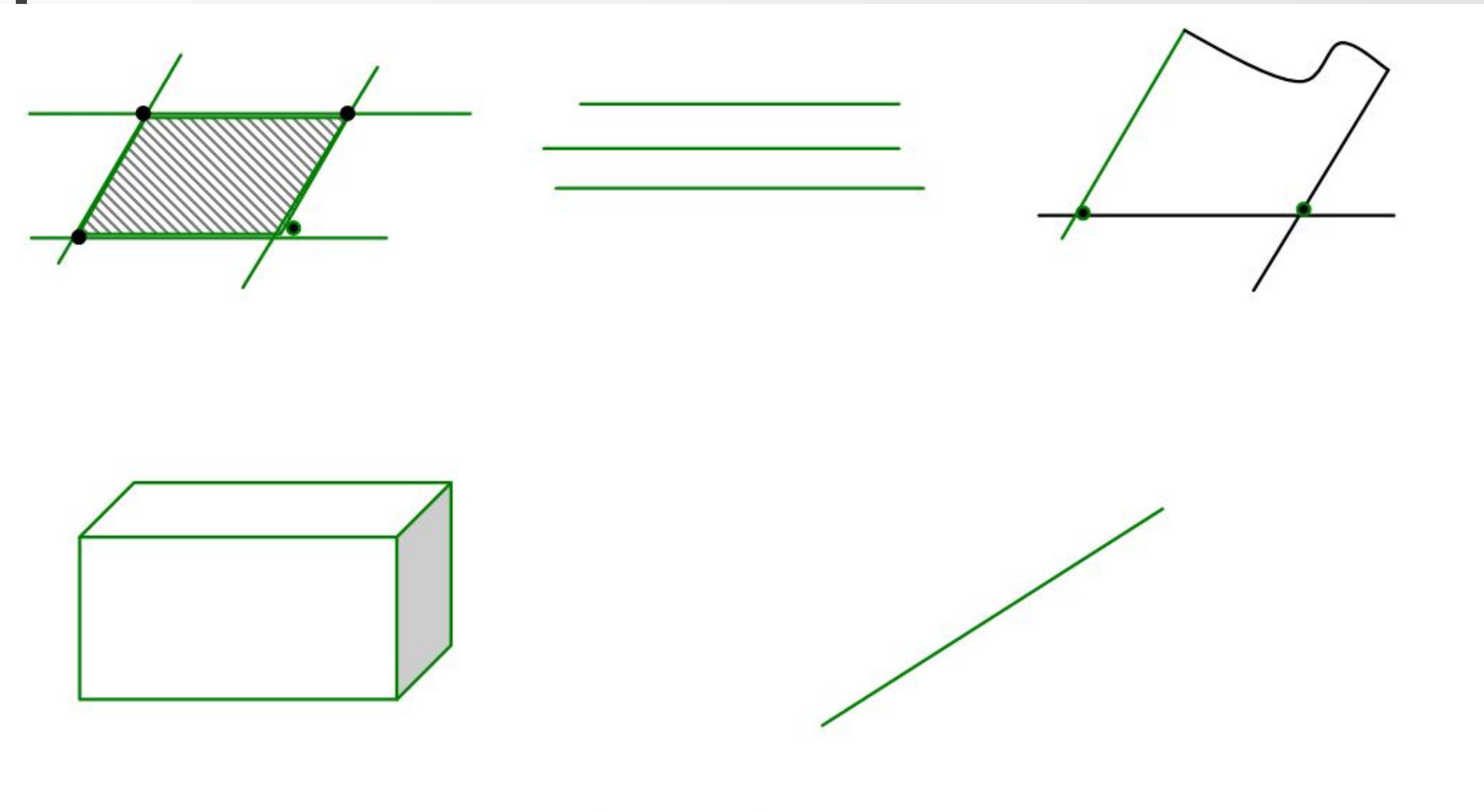
Точка x^* є вершиною багатогранної множини X виду (3), якщо $x^* \in X$ і серед векторів a_{i*} , $i \in I\left(x^*\right)$ є n лінійно незалежних.

Властивість 2.

Точка x^* є вершиною багатогранної множини X виду (3), якщо $x^* \in X$ і вона є єдиним розв'язком системи рівнянь

$$a_{i*}^T x = b_i, i \in I(x^*)$$

Міцність множини активних в вершині обмежень



Для вершини x^* маємо $\left| I(x^*) \right| \geq n$.

$$\begin{cases} 2x_1 + 1x_2 \le 4 \\ 4x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 6x_1 + 3x_2 \le 12 \end{cases}$$

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2$$

Приклад екзаменаційного завдання

Является ли точка с координатами $x_1 = 1,\ x_2 = 4,\ x_3 = 2$ вершиной многогранного множества, задаваемого системой:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \quad - x_3 \le 2 \\ 3x_1 + 2x_2 \qquad \ge 11 \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 \le 13 \\ 4x_1 + x_2 \quad + x_3 \le 9 \\ x_1,\ x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

Властивості вершин

$x \in X \subset R^2$

Дана ЗЛП:

$$\max \ z = 2x_1 + 1x_2$$

$$-x_1 + x_2 \le 1, \quad ①$$

$$x_2 \le 2, \quad ②$$

$$3x_1 + 3x_2 \le 12, \quad ③$$

$$2x_1 \le 6, \quad ④$$

$$x_1, x_2 \ge 0. \quad ⑤ \quad ⑥$$

$$-x_1 + x_2 < 1,$$

$$x_2 < 2,$$

$$3x_1 + 3x_2 < 12,$$

$$2x_1 < 6,$$

$$x_1, x_2 > 0.$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 1$$

НЕ ВЕРШИНА!!!

Властивості вершин

$x \in X \subset R^2$

Дана ЗЛП:

$$\max \ z = 2x_1 + 1x_2$$

$$-x_1 + x_2 \le 1, \quad ①$$

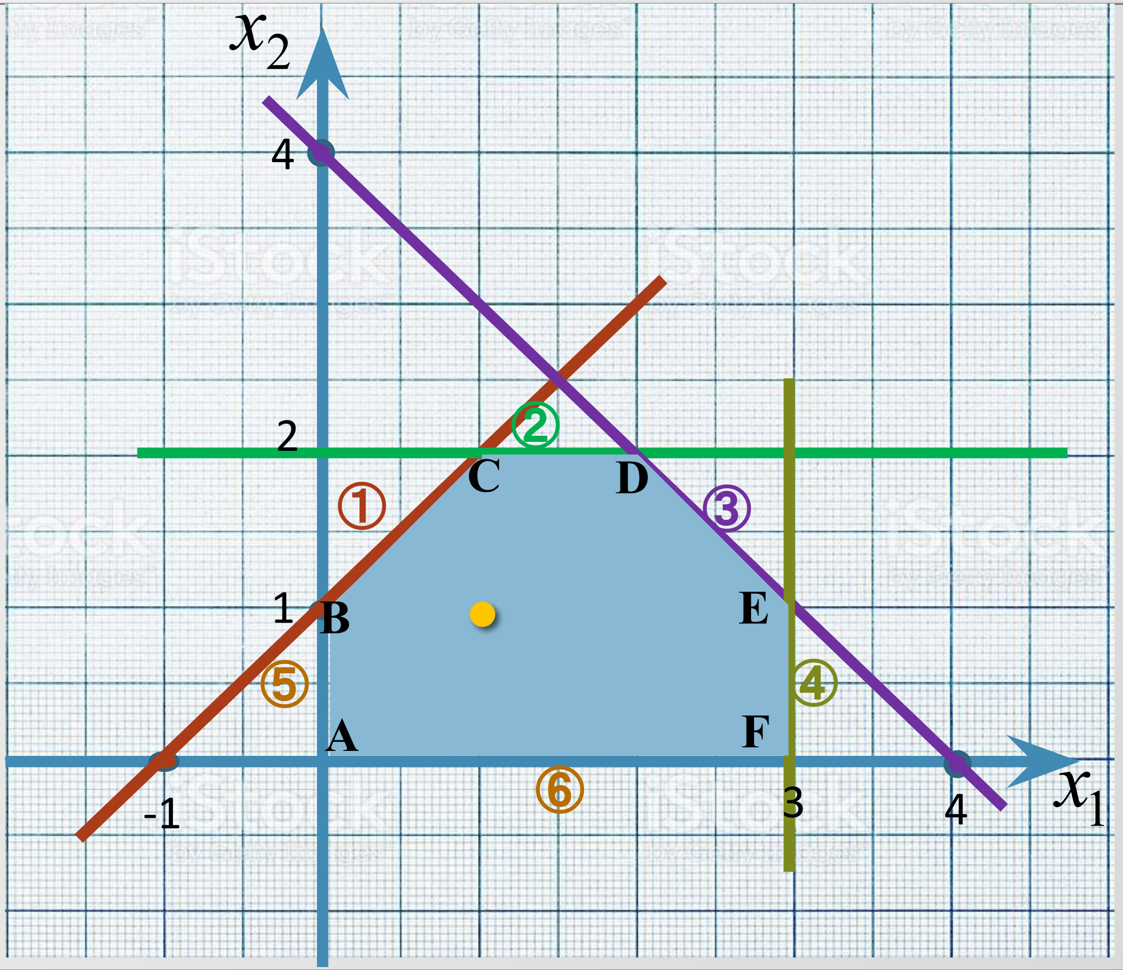
$$x_2 \le 2, \quad ②$$

$$3x_1 + 3x_2 \le 12, \quad ③$$

$$2x_1 \le 6, \quad ④$$

$$x_1, x_2 \ge 0. \quad ⑤ \quad ⑥$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 1$$



Властивості вершин

$x \in X \subset R^2$

Дана ЗЛП:

$$\max \ z = 2x_1 + 1x_2$$

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\le 1, && ① \\ x_2 &\le 2, && ② \\ 3x_1 + 3x_2 &\le 12, && ③ \\ 2x_1 &\le 6, && ④ \\ x_1, x_2 &\ge 0. && ⑤ \quad ⑥ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &< 1, \\ x_2 &= 2, \\ 3x_1 + 3x_2 &= 12, \\ 2x_1 &< 6, \\ x_1, x_2 &> 0. \end{aligned}$$

$x_1 = 2 \quad x_2 = 2$

$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$

Лінійно-незалежні $\Rightarrow$ ВЕРШИНА!!!

Властивості вершин

$x \in X \subset R^2$

Дана ЗЛП:

$$\max \ z = 2x_1 + 1x_2$$

$$-x_1 + x_2 \le 1, \quad ①$$

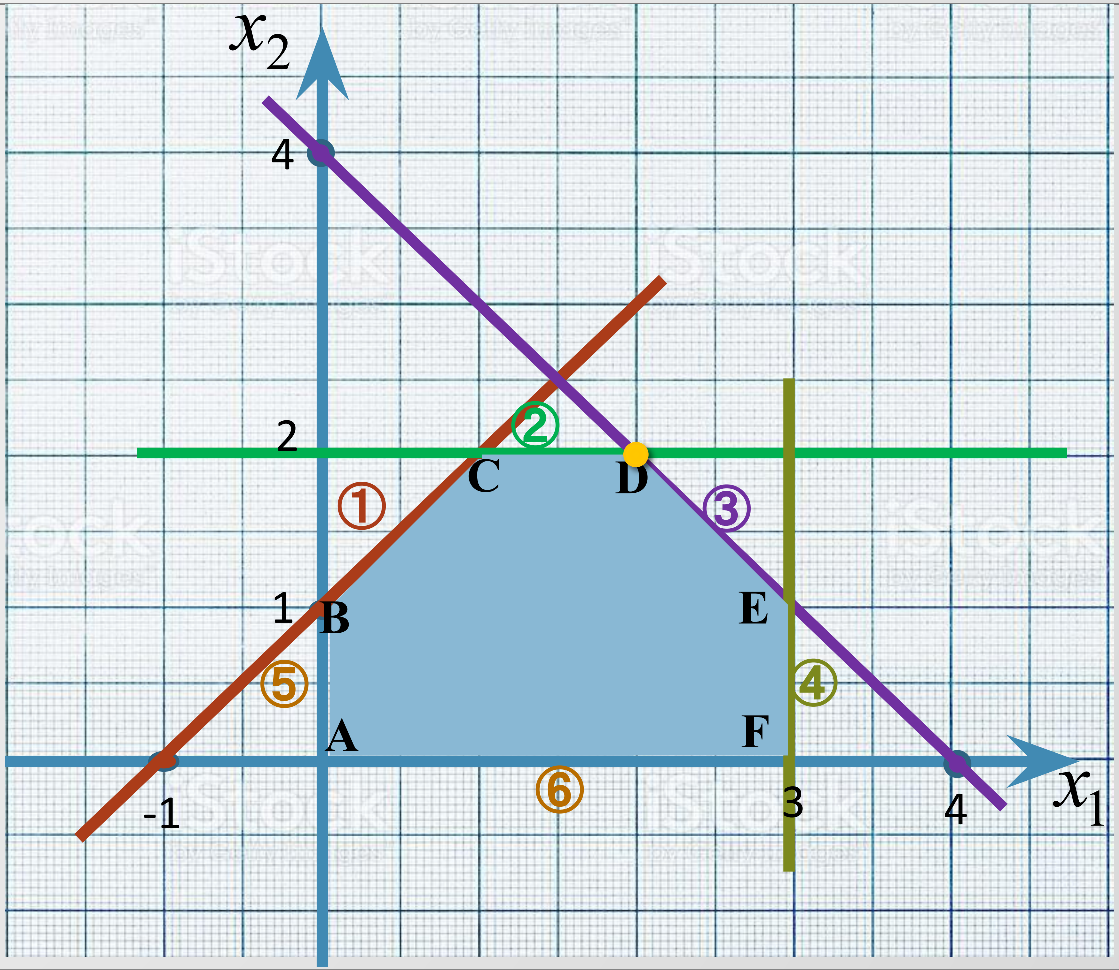
$$x_2 \le 2, \quad ②$$

$$3x_1 + 3x_2 \le 12, \quad ③$$

$$2x_1 \le 6, \quad ④$$

$$x_1, x_2 \ge 0. \quad ⑤ \quad ⑥$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = 2$$



Виродженість

Визначення.

Вершина x^* називається ***не виродженою***, якщо $\left| \, I(x^*) \, \right| = n$

Вершина x^* називається ***виродженою***, якщо $\left| \, I(x^*) \, \right| > n$.

Алгоритм знаходження усіх вершин

Самостійно № 5

Запропонувати алгоритм знаходження всіх вершин багатогранної множини

$$X = \left\{ x \in R^n \middle| \; Ax \le b \right\} = \left\{ x \in R^n \middle| \; a_{i*}^T x \le b_i, \; i = \overline{1,m} \right\}$$

Приклад екзаменаційного завдання

Сколько вершин имеет множество, задаваемое системой:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 - x_3 &= 5 \\
x_1 - x_2 - x_3 &= 3 \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Теорема.

Будь-яка багатогранна множина має не більш кінцевого числа вершин.

Самостійно № 6 Довести теорему

☺️

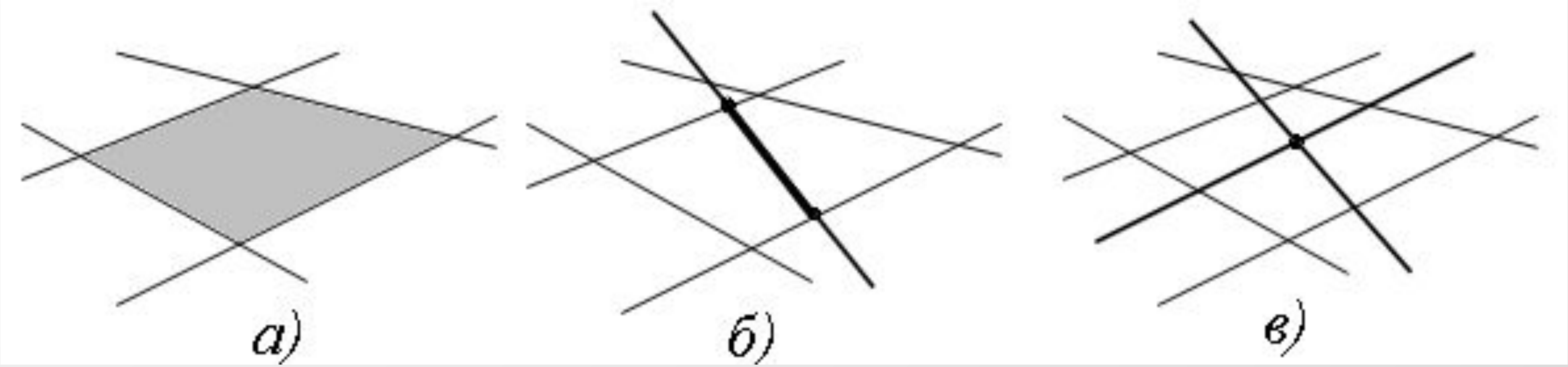
Директор школы возражает против отмены решения о запрете контроля за причёсками

Теорема. *Не порожня багатогранна множина вигляду (3) має принаймні одну вершину в тому і лише тому випадку, якщо* $rank\ A = n$.

Без доведення.

Визначення.

Обмеження багатогранної множини X називається ***жорстким***, якщо будь-яка точка X задовольняє йому як точній рівності.



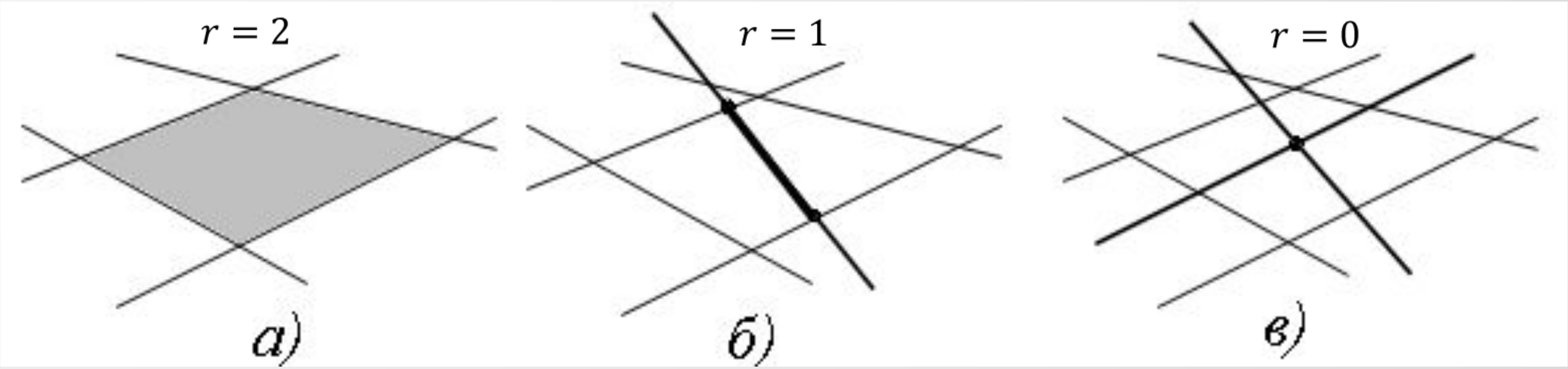
Визначення.

Розмірність r багатогранної множини $X \subset R^n$ визначається формулою:

$$r = n - g,$$

де g - ранг матриці, складеної з жорстких обмежень цієї множини.

$n = 2$ $g = 0$ $g = 1$ $g = 2$



Визначення.

Підмножина Y багатогранної множини X називається q ***-вимірною гранню*** X, якщо

а) розмірність Y дорівнює q;

б) з умов $x = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in Y, \quad 0 < \lambda < 1$ і $x^1, x^2 \in X$ слідує, що $x^1, x^2 \in Y$.

Самостійно №

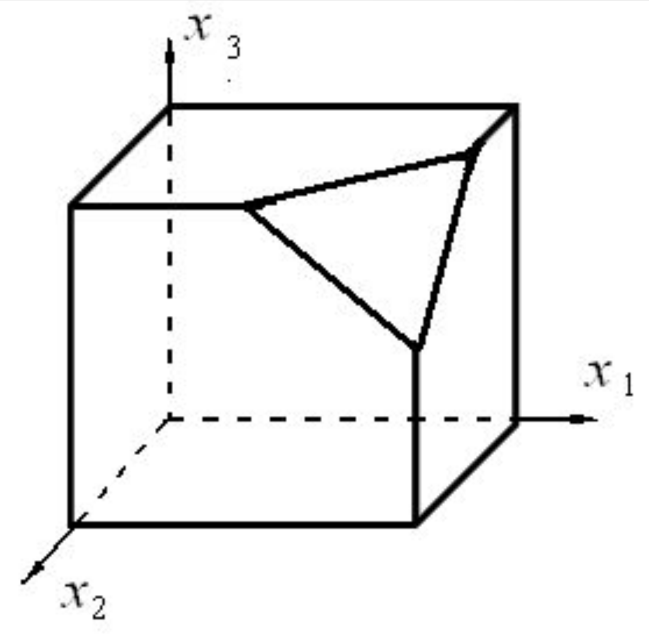
Показати, що визначення вершини співпадає з визначенням грані розмірності 0

Властивість грані

q -вимірна грань множини X це q-вимірна багатогранна множина, система умов якої утворюється з обмежень (що описують множину X) шляхом заміни деяких знаків нерівностей знаками рівності, при цьому число **незалежних обмежень**, що виконуються на грані **як рівність**, рівне $n-q$.

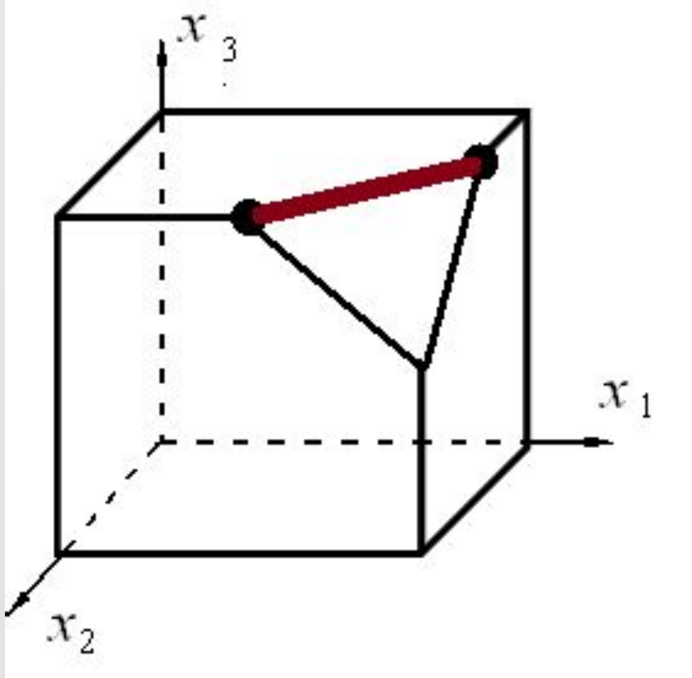
Приклад (1)

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad\qquad &\le 10 \\ x_2 \qquad\quad &\le 10 \\ x_3 \quad &\le 10 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\le 25 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 & \end{aligned}$$



Приклад (2)

$$
\begin{aligned}
&x_1 && < 10\\
&x_2 && < 10\\
&x_3 && = 10\\
&x_1 + x_2 + x_3 && = 25\\
&x_1, x_2, x_3 > 0
\end{aligned}
$$

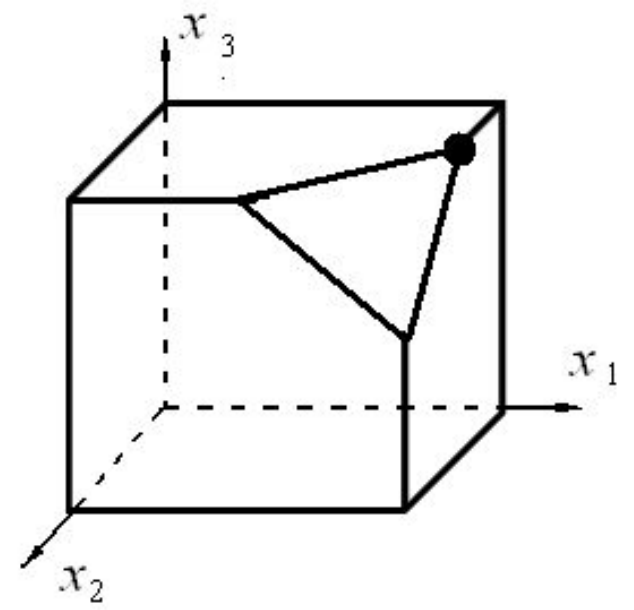


$n = 3$ $q = 1$ $n - q = 2$

лінійно − незалежних,
які вик. як рівність

Приклад (3)

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad\quad\quad &= 10 \\ x_2 \quad\quad &< 10 \\ x_3 &= 10 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 25 \\ x_1, x_2, x_3 &> 0 \end{aligned}$$

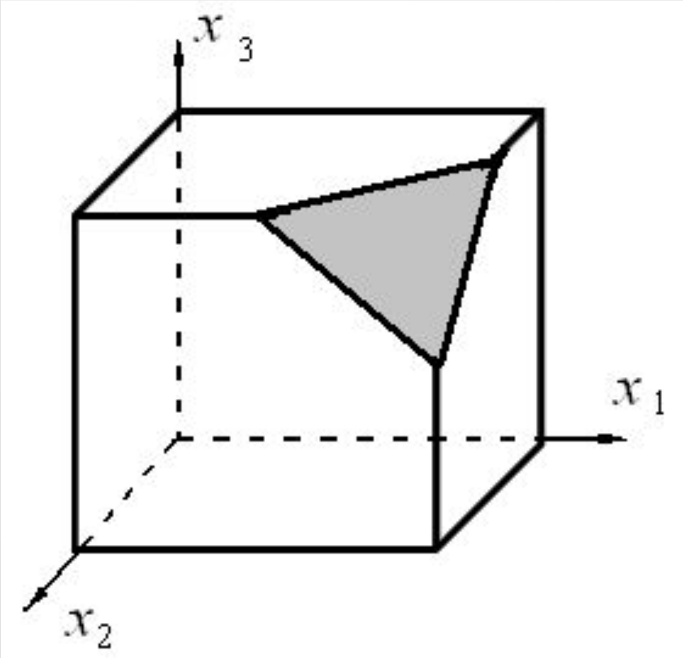


$n = 3$ $\quad q = 0 \quad n - q = 3$

лінійно − незалежних ,
які вик. як рівність

Приклад (4)

$$
\begin{aligned}
x_1 \qquad\qquad\qquad & < 10 \\
x_2 \qquad\qquad & < 10 \\
x_3 \qquad & < 10 \\
x_1 + x_2 + x_3 \quad & = 25 \\
x_1, x_2, x_3 > 0 &
\end{aligned}
$$



$n = 3$ $\qquad$ $q = 2$ $\qquad$ $n - q = 1$

лінійно – незалежних,
які вик. як рівність

Самостійно №

Нехай маємо наступну $(n-1)$-вимірну множину – так званий $(n-1)$-вимірний симплекс:

$$X = \left\{ x \in R^n \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} x_j = 1,\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n} \right\}$$

Визначити число граней X розмірності r_0, $0 \leq r_0 \leq n$.

Самостійно №

Нехай маємо n-вимірний куб:

$$X = \left\{ x \in R^n \,\middle|\, 0 \le x_j \le a,\ j = \overline{1, n},\ a > 0 \right\}$$

Визначити число граней X розмірності r_0, $0 \le r_0 \le n$.

Теорема

Нехай X *– опукла множина,* $x^1, x^2, \ldots, x^k$ *– довільні точки з* X.
Тоді множина X *містить будь-яку опуклу лінійну комбінацію цих точок.*

Доведемо за допомогою методу математичної індукції (по числу точок k).

$k = 1$

Схема доведення опуклості деякої множини $X \subset R^n$

1) Записати множину X у вигляді:

$$X = \{x \in R^n \mid x \text{ задовольнає умові (-ам) } S\}$$

2) Припустити, що $x^1, x^2 \in X$

3) Записати умову (-и) S для обох точок x^1, x^2:

S для x^1 (1)

S для x^2 (2)

4) Показати, що ОЛК цих двох точок $x = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2$ також належить множині S

Тобто, враховуючи (1) та (2), показати, що для x виконується умова (-и) S .

Багатогранні множини $X \subset R^2$

$k = 2$ $\quad x^1, x^2 \in X,$ $\quad$ ОЛК $x = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2$ $\quad X$ опукла $\Rightarrow$ $x \in X,$

Нехай будь-яка опукла лінійна комбінація $k-1$ точок множини X належить даній множині

Розглянемо k точок $x^1, x^2, \ldots, x^{k-1}, x^k$

Їх лінійна опукла комбінація: $x = \lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 + \ldots + \lambda_k x^k$.

$\lambda_k = 1$ $\qquad\qquad$ $\lambda_k < 1$

Теорема (про представлення багатогранника).

Множина точок багатогранника $X \subset R^n$ збігається з множиною усіх опуклих лінійних комбінацій його вершин

Теорема містить два твердження, якщо $x^1, x^2, \ldots, x^k$ – вершини багатогранника, то

а) кожна його точка x може бути представлена у вигляді:

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i \ , \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \quad \forall \lambda_i \geq 0 \, ; \qquad (4)$$

б) кожна точка x, що задовольняє умовам (4), належить багатограннику з даними вершинами.

Доведення твердження а) для випадку $n = 2$

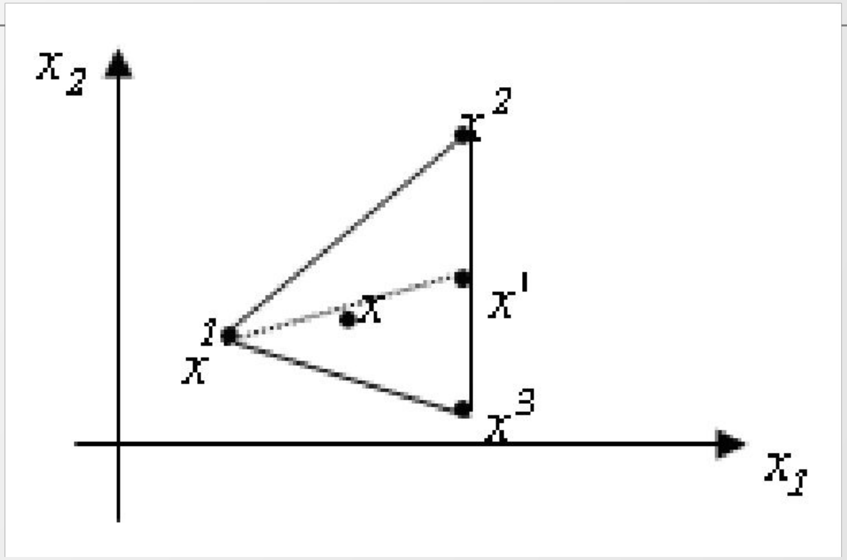
$k=1$: $X=\left\{x^1\right\}$ і $x=x^1$ (теорема вірна).

$k=2$: $X=\left[x^1,x^2\right]$ - відрізок,

Будь-яка точка x цього відрізку може бути представлена у вигляді

$$x=\lambda x^1+(1-\lambda)x^2, \quad 1\geq\lambda\geq 0.$$

$k = 3$: X – трикутник з вершинами x^1, x^2, x^3



Розглянемо довільний k - кутник $(k > 3)$.

За допомогою діагоналей, проведених з однієї вершини, його завжди можна розбити на $(k-2)$ трикутника